HIT

数学·统计学系列

Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry

十九和二十世纪欧氏几何学中的片段

[加] 罗斯·洪斯贝格 著　赵勇 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

十九和二十世纪欧氏几何学中的片段

Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry

[加] 罗斯·洪斯贝格 著

赵勇 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

19 世纪下半叶至 20 世纪初,欧氏几何学经历了一场快速的复兴,期间发现了数以千百计的新定理. 本书分十三个章节介绍了其中最优美的一些珍宝. 有一些构思精妙的定理在别的书中很难看到,如亚当斯圆,里格比点,春木定理等.

本书写的生动有趣,逻辑严谨,深入浅出. 书中所列举的定理基本上都给出了详细的初等证明,书末附有习题解答. 具有中学几何基本知识的读者就能看懂.

本书可作为中学生的课外读物,也可为几何爱好者的学习研究提供参考.

图书在版编目(CIP)数据

十九和二十世纪欧氏几何学中的片段/(加)罗斯·洪斯贝格著;赵勇译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.1

ISBN 978-7-5603-6284-7

Ⅰ.①十… Ⅱ.①罗…②赵… Ⅲ.①几何学-研究 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 265127 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 12 字数 222 千字
版 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6284-7
定 价 58.00 元

翻译说明

本书根据美国数学协会出版的*Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*一书译出. 该书出版于1995年, 作者是加拿大滑铁卢大学的罗斯 · 洪斯贝格(Ross Honsberger).

这本书是美国《新数学丛书》中的一本. 《新数学丛书》开始于1961年, 至今已陆续出版四十余种. 目的是向普通读者介绍一些在一般的高中和大学课程中学不到的近代数学相关分支中的专题. 丛书的作者大多是该领域的著名学者, 学术造诣精深, 且热衷于数学的普及教育. 所以这套丛书写得高瞻远瞩, 深入浅出, 生动而严肃, 简明而不失全貌. 内容虽然浅显, 但要完全读懂也需要一些努力. 北京大学出版社在20世纪八九十年代曾集中翻译出版了其中的十几种. 里面就包括了本书作者的另外一本书——《数学中的智巧》.

至于本书, 如原作者在序中所写的,"不是为了繁重的研究", 而主要是让读者"获得轻松的消遣". 所以书中涉及的内容并不是太多, 不会令初学者望而生畏. 所探讨的都是一些精美有趣的结论, 容易引起读者的兴趣. 并且对这些结论都给出了详细的初等证明, 这使得读者无须多少专门的知识就能轻松读懂. 译者觉得对于本书的欣赏包含两个方面: 一是领略结论的美妙, 二是体会证明的精巧. 本书的部分定理虽然在别的书中也能看到, 但处理的方法往往不同. 证明中多处使用了质点法, 以及位似、旋转等几何变换. 这些方法的运用, 使得许多证明显得新颖别致, 读者在阅读中应细加体会. 另外本书也包含了一些在其他书中很难见到的结果, 如亚当斯圆(59页), 里格比点(123页), 春木定理(135页), 等等.

在翻译中, 译者尽量保留了原书的绘图风格以及排版格式. 译者是位普通的小学教师, 水平能力有限, 译文中难免有疏漏之处, 望读者朋友们不吝批评指正.

赵 勇

2013年6月于六安东桥

序

发现有能力去欣赏一本数学书并愉快地阅读它总是令人高兴的事. 我常常梦想能够认识一些肯定存在于数学各分支中的初等的珍宝, 这将是多么快乐, 但通过文献我能够获得的只有失望. 这些珍宝无疑就在那里, 但它们通常深藏于正文或广泛的参考著作中. 一个人往往剩下的只是不愉快地选择在这一领域中从事长期的研究或者完全放弃自己的信念. 虽然需要知识渊博的学者写出一些不寻常的东西, 但投入的专家能够被吸引进行探讨的原因是一个人只有在长时间认真的研究之后才可以达到欣赏的能力. 遗憾的是, 这使得对于一般的读者来说要理清他们心中所爱的初等珍宝是非常困难的. 除此之外, 通常所谓的很简明或粗略的证明只是对于对这一学科已经熟知的人才可以容易地理解.

我很乐意能够承诺你们在你们即将阅读的这本书中没有这样的沮丧. 我能保证的是在这本短文集中不准备涉及大量的资料, 并且每一个论题都已经从大量经常被发现并作为初等和尽可能详尽处理的材料中解脱出来. 假装有办法围绕需要去为材料中的证明奠定基础是没有意义的, 但是通过选择非常容易理解的主题我希望大部分读者都能用最少的预备知识从这些珍宝中得到乐趣.

在许多地方都涉及没有包含证明的九点圆的基本性质, 除了这种情况之外, 超出高中背景的一切知识都在需要出现时才进行详细阐述. 但是应该告知你们的是, 在一篇短文中给出的推导不再在后面的短文中重复. 因此, 虽然从最初几篇短文中抽样阅读可能不会有多么不连贯, 但后面的短文使用了在前面的讨论中已经考虑过的概念和结论, 而你可能不得不在前面的短文中寻找在后面的短文中遇到的条目的说明.

当你拿起这样的一本书时非常取决于你的心情. 肯定地, 这些短文的意图不是为了繁重的研究; 相反, 虽然对于它们的欣赏需要一点全神贯注, 但我希望你们能获得轻松的消遣, 并像面对一首优美的乐曲那样去欣赏它们.

很高兴地感谢 Paul Zorn 和《新数学丛书》编委会的各位成员, 以及 Don Albers 和 Beverly Ruedi, 感谢他们优秀的编辑工作和本书出版过程中的指

导. 特别感谢加利福尼亚大学戴维斯分校的教授 Chakerian 先生，以及加利福尼亚大学洛杉矶分校的教授 Basil Gordon 先生，由于他们对原稿的审查，导致了许多改进. 尤其要特别感谢 Anneli Lax 对于《新数学丛书》系列持续的奉献：她极其仔细地阅读原稿使得本书在表达方面得到很大的改进和净化.

前言

当代的数学已不只是一门学科，而是很多学科. 在过去的一百年，特别是过去的五十年中，我们的知识以前所未有的速度迅速增加. 我们学校的课程依据新发现进行逐渐演变是正确的. 然而也有许多遗憾，我们不得不放弃了综合几何学中大量漂亮的老问题.

大约在1875年，欧氏几何学经历了一场快速的复兴，在接下来的半个世纪中看到数以百计令人惊异的新结果得以发表. 这一领域中两本杰出的著作是 Nathan Altschiller Court 的 *College Geometry* 和 Roger Johnson 的 *Advanced Euclidean Geometry*. 此外，任何被几何学所吸引的人必定都欣赏 Coxeter 和 Greitzer 的 *Geometry Revisited.*

综合几何学显然是一门链状的学科，虽然许多新结论本质上是初等的，但它们常常涉及相当复杂的构形，而只能在进行大量的预备讨论之后才可以轻松处理. 无疑任何指向它们的欣赏的努力成果都是一个不错的奖励. 幸运的是，许多这样惹人喜爱的小瑰宝可以通过回忆少数几个著名的定理并推导临时的预备结论而欣赏到.

非常感谢威尔士大学卡迪夫学院的

John Rigby 博士

向他为本书做出的宝贵贡献致以深深的谢意.

目录

第一章

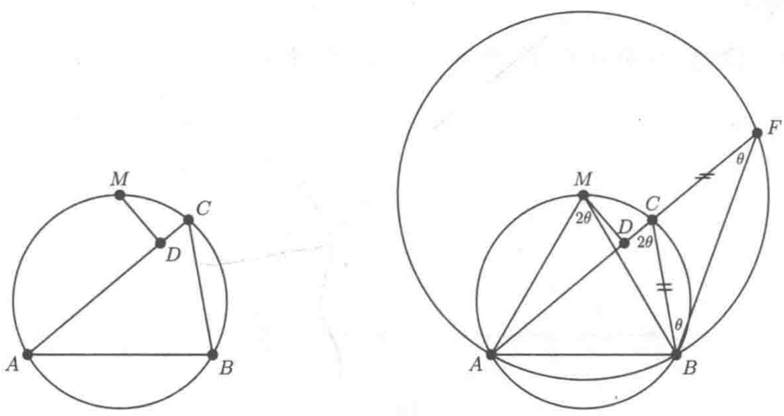
中分线与中界线

1. 中分线

当阿基米德(Archimedes)发现他的“折弦定理”时一定非常欣喜.

(a) **阿基米德定理** 设M 是 $\triangle ABC$ 的外接圆上弧 ACB 的中点，并设 MD 是 AC 和 AB 中较长者(设为 AC)的垂线(图1(a)). 则 D 平分多边形路线，即

$$AD = DC + CB.$$



(a) (b)

图1

证明 如果将 AC 延长至 F 使 $CF = CB$，则 $\triangle CBF$是一个在 F 和 B 处有相等的底角 θ 以及外角 $\angle ACB = 2\theta$ 的等腰三角形(图1(b)). 现在，通过 A，B 和 F 的圆的圆心是 AB 中垂线上的点，AB 对该点所张的角是其对此圆上的点 F 所张的角 θ 的两倍. 则显然这个圆心一定是 M，这是因为由 M 平分弧 ACB 知它在 AB 的中垂线上，且由 $\angle AMB$ 和 $\angle ACB(= 2\theta)$在已知圆中的同一弓形内知它们相等. 因此，在第二个圆中，MD 是圆心到弦 [1]

AF 的垂线，故 D 是 AF 的中点，我们有

$$AD = DF = DC + CF = DC + CB,$$

证毕. ■

这个证明非常类似于阿基米德本人所给出的证明.(与 Car Boye 的 *History of Mathematics* 中 150 页上的证明进行比较. 另外一个由 Gregg Patruno 给出的巧妙证明，在我的 *More Mathematical Morsels*, Vol. 10, Dolciani Series 的 31 页中给出.)

根据阿基米德定理，如果点 C' 是 AB 的中点，那么 $C'D$ 在每一侧都具有 $\triangle ABC$ 的一半周长. 沿袭 Dov Avishalom 的著作 [1]，让我们把像 $C'D$ 这样的，由一边的中点所引出的周长等分线称为中分线(cleaver).

在下面的(c)部分中，我们将证明如下值得注意的事实：

三角形的三条中分线始终共点于"分心(cleavance-center)".

这个事实的一个美妙证明基于一个有趣的性质，即每条中分线都平行于三角形的一条角平分线，这个结果作为我们关于阿基米德定理证明的一个直接推论得出.

(b) **推论** 中分线 $C'D$ 平行于 $\angle ACB$ 的平分线.

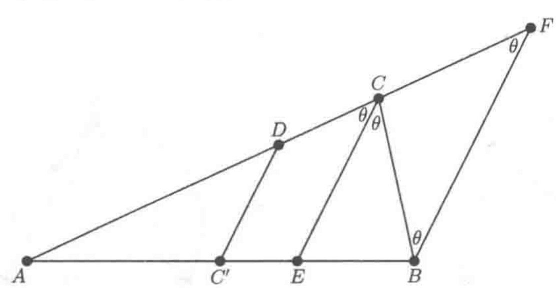


图2

$C'D$ 联结 $\triangle ABF$ 的两条边的中点，因此平行于第三条边 BF.但是 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB(=2\theta)$ 的平分线显然在 C 和 F 处确定出相等的对应角，所以 CE 也平行于 BF，因而平行于 $C'D$. ■

(我们注意这顺便也给出了中分线的一个漂亮的作图法.)

(c) **中点三角形** 由 $\triangle ABC$ 的中线足，即各边中点所确定的 $\triangle A'B'C'$，称为 $\triangle ABC$ 的中点三角形(medial triangle)，显然其边平行于已知 $\triangle ABC$ 的相应边. 因此，在平行四边形 $CB'C'A'$ 中(图3)，对角 $\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$

[2] 相等，且中分线 $C'D$ 平行于 $\angle ACB$ 的平分线 CE，因此就是中点三角形中

$\angle A'C'B'$ 的平分线(CE 和 $C'D$ 都与方向相同的 CA' 和 $B'C'$ 成相等的倾斜角). 类似的，另外两条中分线也是中点三角形的角平分线，因而：

分心只不过是中点三角形的内心 S.

(回想一下三角形的内心是内切圆的圆心，因此就是三条内角平分线的交点.)

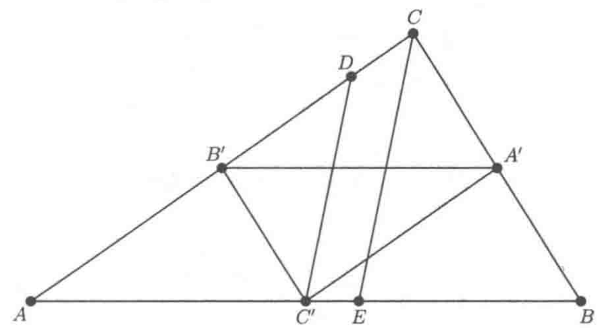


图 3

或许将此叙述为如下的形式更加吸引人：

$\triangle ABC$ 的中点三角形的内角平分线平分 $\triangle ABC$ 的周长(图 4).

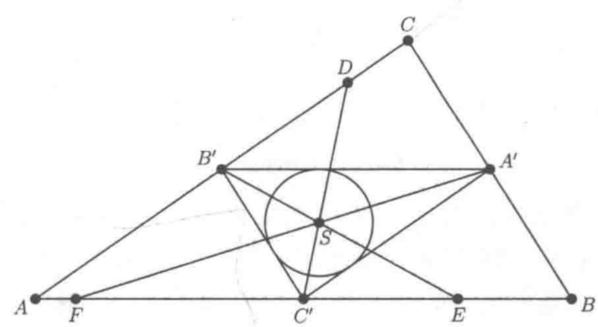


图 4

(d) **斯俾克圆** 为了纪念 19 世纪的德国几何学家特奥多尔・斯俾克(Theodor Spieker)，将中点三角形的内切圆称为已知三角形的*斯俾克圆* (Spieker circle). 则我们刚刚已经证明了，$\triangle ABC$ 的分心是斯俾克圆的圆心 S. [3]

由于每条中分线平分 $\triangle ABC$ 的周长且经过分心 S，这可能让你得知"*点 S 是成 $\triangle ABC$ 形状的匀质线框的重心*"时不会感到完全出乎意料. 然而，这并非是显然的，它有如下一个漂亮的证明.

显然这个线框由三段长度为 a，b，c 的线组成. 因为一段匀质线的中点就是它的重心，因此这个线框等价于分别在中点三角形的顶点 A'，B'，C' 处，

悬挂上数量为 a，b，c 的质量的质点组. 现在在中点三角形中，$\angle A'C'B'$ 的平分线分对边 $B'A'$ 为包含 $\angle A'C'B'$ 的两边之比

$$\frac{B'F}{FA'}=\frac{B'C'}{C'A'}=\frac{a'}{b'}.$$

而中点三角形的各边不但平行于 $\triangle ABC$ 的相应边，且是其长度的一半. 因此

$$\frac{B'F}{FA'}=\frac{a'}{b'}=\frac{a/2}{b/2}=\frac{a}{b},$$

故对于某个实数 x，有

$$B'F=ax \text{ 以及 } FA'=bx.$$

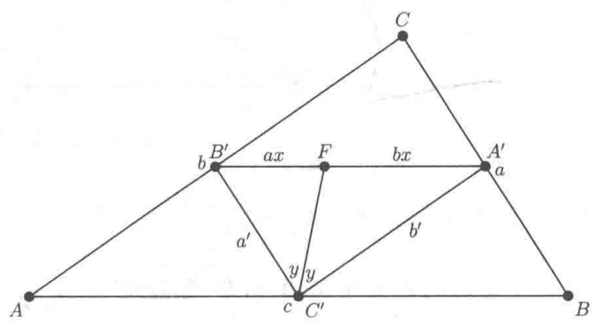


图5

因此，B' 和 A' 处的质量关于 F 的力矩相等

$$b(ax)=a(bx),$$

我们推断出整个系统等价于在 F 处有质量 $(b+a)$ 和在 C' 处有质量 c. 所以它的重心，一定在中分线 $C'F$ 上的某处. 类似的也在另外两条中分线的每一
[4] 条上，所以这个系统的重心的确就是 $\triangle ABC$ 的分心 S. ■

2. 中界线

我们已经把经过一边中点的周长等分线段称为中分线，让我们把从一个顶点所引出的这样的一条线段称为**中界线**(splitter). 因而 $\triangle ABC$ 也有三条中界线，且正如预期的那样，它们相交于称为**界心**(splitting-center) 的点 M.

如果与点 A 相对的旁切圆与 $\triangle ABC$ 的边切于点 D，E 和 F(图6)，则显然有

$$BE=BD \text{ 以及 } DC=CF,$$

这表明 $\triangle ABC$ 的周界可以在点 D 被切断并拉直为切线 AE 和 AF. 但是这

两条切线相等，因此有

$$AE = AB + BD = \triangle ABC \text{ 的半周长 } s,$$

从而 AD 是一条中界线. 因此中界线的共点性等价于要求这样的三条线段共点，其每一条都是自一个顶点至对应的旁切圆在对边上的切点. 但这个公共点 M 很久以前就是已知的了，称为三角形的奈格尔点(Nagel point).

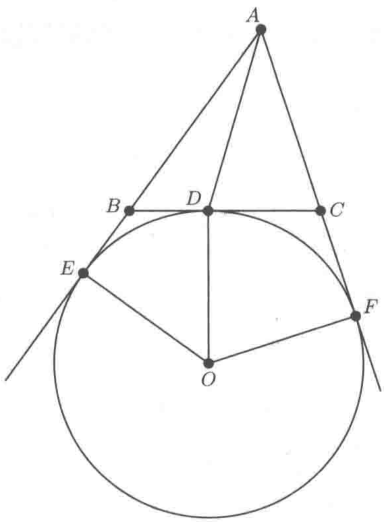


图6

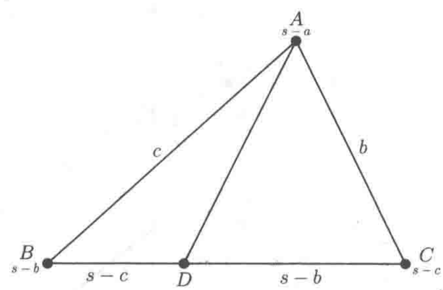


图7

(a) **奈格尔点** 奈格尔点的存在可以非常容易地从考虑分别在顶点 A，B 和 C 处悬挂有数量为 $s-a$，$s-b$ 和 $s-c$ 的质量的质点组中得出(图7). 相应地，设 D 是与 A 相对的旁切圆在 BC 边上的切点. 则如以上所看到的，AD [5] 是一条中界线，半周长 s 由

$$s = AB + BD = c + BD$$

给出，因此我们有

$$BD = s - c.$$

类似的，$DC = s - b$，而点 B 和 C 处的质量关于点 D 的力矩相等，即

$$(s-b)(s-c) = (s-c) = (s-b).$$

所以点 D 是点 B 和 C 处两个质量的重心，而整个系统的重心一定位于 AD 上的某处. 类似的，M 在另外两条经过一个顶点到相应的旁切圆在对边上的切点的线段中的每一条上，于是我们得出这三条线段实际上共点于这个重心. 这样奈格尔点 M 得到了确定，因此也确定了各中界线的共点. ■

3. 九点圆

发现中点三角形的外接圆不仅通过三条边的中点，还通过 $\triangle ABC$ 的其他六个著名的点，是近代综合几何学的一项辉煌成果. 众所周知三角形的高线共点于垂心 H（参见17页给出的证明），并按照惯例将联结 H 与各顶点的线段的中点称为三角形的欧拉点(Euler points, 图8). 值得注意的是，对于每个三角形，都存在一个通过三边的中点，三个高线足以及三个欧拉点的九点圆. 关于这个著名的圆有大量的内容被记录下来，我们将顺便摘记下的只是其性质中的少数几个.

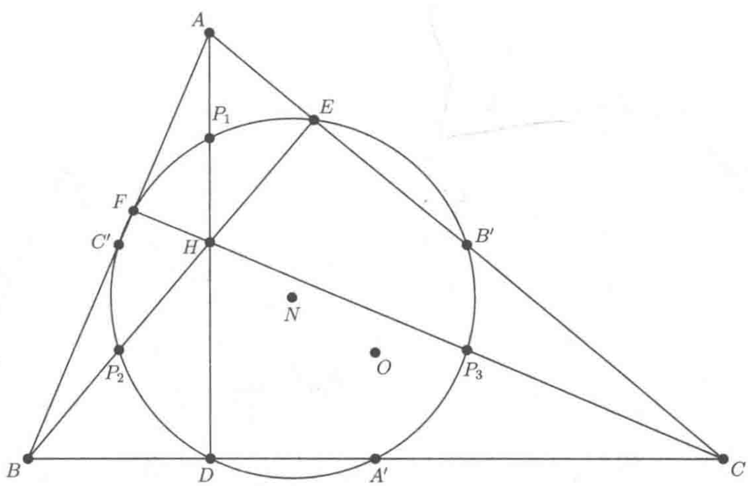


图8

[6]

通常使用字母 H，G，O，I 和 N 分别表示垂心，重心，外心，内心和九点圆的圆心(图8). 记得：

- 垂心 H 是三条高线的交点；
- 重心 G 是三条中线的交点；
- 外心 O 是通过各顶点的圆的圆心，因此就是三边中垂线的交点.

现在，巧合的是 H，G 和 O 始终共线，由它们所确定的直线称为欧拉线(Euler line，图9). 除此之外，点 G 三等分线段 HO 使得 $HG = 2 \cdot GO$. 现在把 N 放进图中，则 N 不仅也在欧拉线上，而且确切地说是 HO 的中点. 则由此可得

$$OG = \frac{1}{3}HO,\ \ ON = \frac{1}{2}HO \ \ 及 \ \ NG = \frac{1}{6}HO.$$

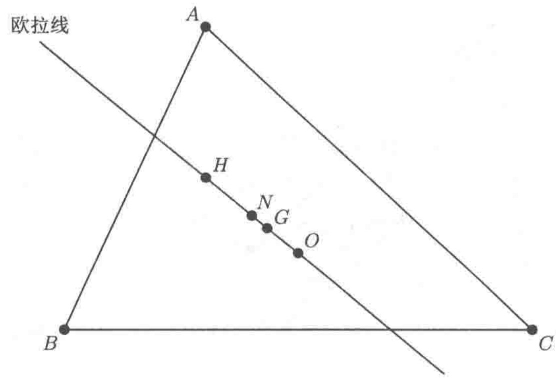


图 9

4. 奈格尔点 M 和斯俾克圆

如上，用 S 表示斯俾克圆的圆心. 引人注目的是，我们可以得出以下几个类似的结论：

- I，G 和 M 始终共线；
- G 三等分IM 使得 $GM = 2 \cdot IG$；
- S 是 IM 的中点(图 10). [7]

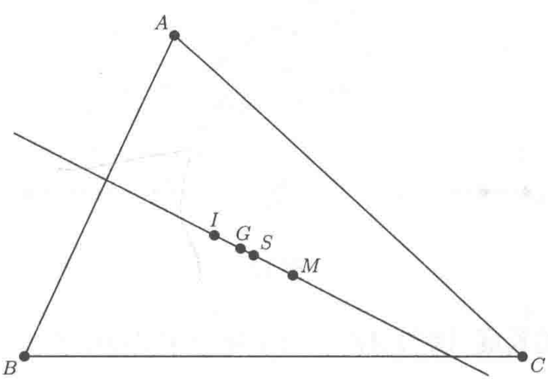


图 10

(a) **证明点 G 三等分 IM** 重心 G 分中线 AA' 为 $2:1$ (图 11) 的两段. 现在将 IG 延长两倍长度至点 L，使得 $GL = 2IG$，这使得 $\triangle AGL$ 与 $\triangle A'GI$ 相似(与点 G 处等角相关的边成比例). 因此 $\angle GA'I$ 与 $\angle GAL$ 相等，我们推出 AL 平行于 $A'I$. 我们将通过证明 AL，BL 和 CL 是 $\triangle ABC$ 的中界线来证实 L 就是奈格尔点. 我们仅需考虑 AL 这一代表情形.

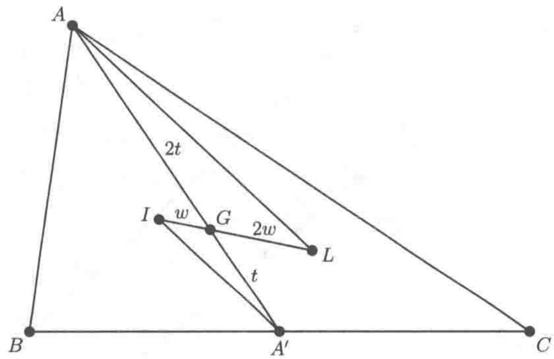


图11

为此，延长 AL 交 BC 于 E，并作出 BC 的垂线 AD 和 IF（图12）. 我们需要证明 $AB+BE=$ 半周长 s，即

$$BE = s - AB = s - c.$$

[8] 据此，让我们来计算出 BD 和 DE 的长度并证明它们的和 BE 确实为 $s-c$.

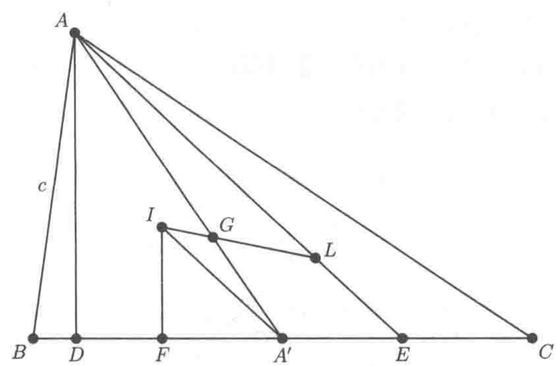


图12

（i）***DE* 的长度** 因为 $AE /\!/ IA'$，所以 $\triangle ADE$ 和 $\triangle IFA'$ 相似，因此有

$$\frac{DE}{FA'} = \frac{AD}{IF}.$$

现在，IF 恰好是 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径，AD 是一条高，而熟知 $\triangle ABC$ 的面积 Δ 由下面的每一个公式给出

$$\Delta = rs \text{ 和 } \Delta = \frac{1}{2}a(AD).$$

因此