



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材



新世纪土木工程系列教材

# 有限单元法基础 及MATLAB编程

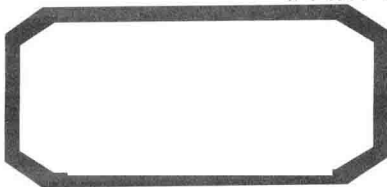
(第3版)

曾 森 王焕定 陈再现 编著

高等教育出版社



“十二



级规划教材



新世纪土木工程系列教材

# 有限单元法基础 及MATLAB编程

YOUXIAN DANYUAN FA JICHU JI MATLAB BIANCHENG

(第3版)

曾 森 王焕定 陈再现 编著

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书是在“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、“新世纪土木工程系列教材”《有限单元法基础》(第2版)基础上,由编者结合近年教学体会,从加强有限单元法的编程技能出发,汲取英国学者 Smith I.M.和 美国学者 Griffiths D.V. 的名著《Programming the finite element method》的丰富资源,修订而成。本书在讲述有限单元法基本原理的同时,利用计算功能强大、图形功能丰富、编程效率高、扩充能力强、语句简单、易学易用的 MATLAB 进行编程,将汉化和调试通过的函数做成开放式的 MATLAB 有限元工具箱(Finite Element Toolbox),以利于学习应用。

全书共分 12 章,包括绪论、MATLAB 预备知识、弹性力学相关预备知识、杆件体系结构有限元分析、杆件体系结构有限元分析的 MATLAB 编程、平面问题有限元分析、平面问题有限元分析的 MATLAB 编程、空间与轴对称问题有限元分析、空间与轴对称问题有限元分析的 MATLAB 编程、板壳结构有限元分析、板壳结构有限元分析的 MATLAB 编程、有限元逐步精细化分析的若干问题。

本书可作为力学、土木、交通、水利、机械、材料、船舶等专业本科高年级教学使用,也可作为研究生和有关工程技术人员学习有限单元法及编程的入门参考书。

## 图书在版编目(CIP)数据

有限单元法基础及 MATLAB 编程 / 曾森,王焕定,陈再现编著. --3 版. --北京:高等教育出版社,2016.8

ISBN 978-7-04-045659-2

I. ①有… II. ①曾… ②王… ③陈… III. ①有限元法-高等学校-教材 ②Matlab 软件-高等学校-教材  
IV. ①O241.82 ②TP317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 139712 号

策划编辑	赵向东	责任编辑	赵向东	封面设计	李小璐	版式设计	童丹
插图绘制	于博	责任校对	陈旭颖	责任印制	赵义民		

---

出版发行	高等教育出版社	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
邮政编码	100120	网上订购	<a href="http://www.hepmall.com.cn">http://www.hepmall.com.cn</a>
印 刷	北京市白帆印务有限公司		<a href="http://www.hepmall.com">http://www.hepmall.com</a>
开 本	787mm×960mm 1/16		<a href="http://www.hepmall.cn">http://www.hepmall.cn</a>
印 张	23.5	版 次	2002 年 1 月第 1 版
字 数	420 千字		2016 年 8 月第 3 版
购书热线	010-58581118	印 次	2016 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	38.60 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 45659-00

# 与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站,请登录网站后开始课程学习。

## 一、网站登录

1. 访问 <http://abook.hep.com.cn/1249901>, 单击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。

2. 课程充值:登录后单击右上方“充值”图标,正确输入教材封底标签上的明码和密码,单击“确定”按钮完成课程充值。

3. 在“我的课程”列表中选择已充值的数字课程,单击“进入课程”即可开始课程学习。

账号自登录之日起一年内有效,过期作废。

使用本账号如有任何问题,请发邮件至: [ecourse@pub.hep.cn](mailto:ecourse@pub.hep.cn)

## 二、资源使用

本书除第1章、第3章、第12章外,每章都附有 MATLAB 程序文件,这些程序文件既以二维码的形式在书中出现,可随时随地扫描查阅;又以源代码文件形式存于数字课程中,可供在线阅读,也可下载后调试运行或继续开发。

## 第 3 版前言

作为 21 世纪土木、水利、交通、机械、材料工程等的工程技术人员,如果只会使用商用软件做设计,而不懂这些设计软件计算核心的有限单元法知识、有一定的编程能力将难以满足 21 世纪对人才的要求。基于这样的思想,我们想将本书修订成集有限单元法基本理论、方法和程序编制与应用等内容于一书的本科生教材。

长期的教学经验表明,只学有限单元法原理而不涉及程序的实现,多数读者难以切实掌握有限单元法,从而遇到现有软件不能解决的问题时,或者束手无策,或者凭想当然勉强建模并用现有软件进行分析,其结果的科学性、可靠性就很难保证。实践表明,在了解原理的基础上,自行编制和调试一些简单的程序,对切实掌握有限单元法是必不可少的。作为工程与科学计算的计算机高级语言,FORTRAN 无疑是最好的。但是,MATLAB 具有计算功能强大、图形功能丰富、编程效率高、扩充能力强、语句简单、易学易用等突出优点,这为工程与科学的计算提供了极大的方便。相对来说,学习和掌握 FORTRAN 比 MATLAB 要困难,因此本书选用 MATLAB 作为语言工具,讲解有限单元法原理的具体程序实现。基于此,本书主要做了如下两方面修订工作:

(1) 保留 FORTRAN 一些好的编程习惯,例如对变量和矩阵进行显式定义,既有利于理解和阅读程序,也便于程序调试和避免出现因疏忽产生的逻辑错误,对矩阵而言还可使运行更快。除此之外,尽可能体现 MATLAB 矩阵运算的特点。

(2) 对于程序部分,除少量保留书面形式程序段外,将绝大多数改造后的函数、例题初始数据、例题计算结果等利用二维码扫描来呈现,以便于查阅;读者还可以登录与本书配套的数字课程网站自行下载程序源代码 \*.m 文件,以便在 MATLAB 上直接运行,或在源代码基础上进行扩展应用。

从教学需要考虑,要想深入理解和掌握弹性力学及 MATLAB 知识,需要进一步学习相关的书籍、资料。作为有限单元法原理及编程的教材,在第 2、3 章对基本知识做了必要的讲解。此外,本书从杆系结构有限单元法开始是合适的,如果读者没有学过结构力学的矩阵位移法,使用本教材组织教学或自学,不仅可以掌握有限单元法的基本原理,也可以达到结构力学对这部分内容的基本要求。对于已经学过并较好掌握矩阵位移法的读者,可以跳过第 4、5 两章。但由于 MATLAB 程序的前后一致性,建议读者还是阅读一下第 4、5 章

中的相关函数程序为好。

本书由王焕定指导修订,曾森负责统稿。王焕定负责修订第1、2、4、12章和第5章部分内容,曾森负责修订第3、5、6、7、10、11章和第4章部分内容,第8、9章由陈再现修订。本书由华南理工大学魏德敏教授负责主审,魏德敏教授认真、细致的审阅使作者感动,所提出的意见和建议提高了本书质量,对此我们深表感谢。

限于我们的能力和水平,书中不当之处敬请广大读者批评指正。

编者

2015.11

## 第 2 版前言

本书是 21 世纪之初高等教育出版社出版的“新世纪土木工程系列教材”之一,基于当时的认识及出于良好的愿望,认为 21 世纪土木类本科生必须掌握计算力学的基础内容——有限单元法基础。但是近 10 年来本科和研究生教学的实践表明,因高等教育步入大众化发展阶段,当时的认识并不完全适合当前的实际。多次调查表明,除少数一流高校外,各普通高校土木工程专业的培养计划一般都有限单元法列为选修课,而且基本上是任选的选修课。鉴于当前的就业形势和学分制,像弹性力学、有限单元法等课程无疑比结构工程类选修课难学,因此选学这类基础理论选修课的学生非常少。更有甚者,个别学校为提高考研升学率,对必修课结构力学中基本要求规定掌握的矩阵位移法都放松要求甚至不学,当然他们的学生更不会学习有限单元法这样的选修课。

而另一方面,近年研究生的招生规模和数量增加很快,还新增设了工程应用型硕士生的招生和培养设置。土木、交通、水利工程专业的硕士研究生,一般都有限单元法列为学位课。考虑到上述本科教育的具体情况,本书原来就不要弹性力学甚至矩阵位移法知识基础这一出发点还是可取的。为了满足本科生和不同层次硕士研究生的使用要求,本次修订着力于以下几点工作:

(1) 在确保理论科学严谨的前提下,尽可能通俗易懂地提供本书所必需的知识,增加部分必要的说明,以期消除学习本教材的困难。

(2) 目前大型商用有限元分析软件的应用已经非常广泛,但是普遍反映对如何建模、如何判断结果和利用结果感到困惑,为此在有限篇幅下尽可能结合一些实例增加这方面的说明。

(3) 为了适应土木、交通、水利工程各专业研究生的教学要求,在第 7 章增加了 T9 型非完全协调单元、考虑剪切变形影响的 Mindlin 板单元、广义协调元基本思想、考虑剪切变形影响的曲面壳体单元和工程分析的若干问题(此部分内容本科生也适用)。

原书的参编者因各种原因,均未参加本次修订,承蒙本书编著者之一焦兆平的委托,这次修订工作由哈尔滨工业大学单独完成,全书主要由王焕定进行修订,张春巍承担第 7 章新增内容和结合实例讲述建模、判断和利用结果等方

面的工作,全书由王焕定最后定稿。

本书的出版得到高等教育出版社的全力帮助和支持,也得到哈尔滨工业大学土木工程学院领导和国家级力学教学团队的支持,特此深表感谢!

限于我们的能力和水平,书中的不当之处,敬请读者和教师们批评指正。

编者

2010. 2. 14



# 第 1 版前言

20 世纪 80 年代以来,我国高等学校纷纷在土木、水利、交通工程和应用理论等专业的本科教育计划中,将有限单元法列为选修课。近 20 年计算机飞速发展,20 世纪 80 年代一台 286 的计算机要卖一万元,而今一台奔腾 III、IV 主频达到 1G 以上的台式计算机只有几千元钱,这就为计算机的普及提供了物质基础。另一方面,20 世纪 80 年代虽开始有一些工程设计部门用计算机出图,但是普及程度很低。现在无论是单位还是个人,很少用图板出施工图。因此,作为 21 世纪土木、水利、交通工程等的工程技术人员,只会使用上市的商用软件作设计,而不懂作为这些计算设计软件核心的有限单元法知识,是不能满足 21 世纪对人才的要求的。基于这样的思想,我们编写了一本集基本理论、原理、方法和程序应用等内容于一书的本科生教材。

本书内容分为七章,包括绪论、变形体虚位移原理、杆系结构单元分析、杆系结构整体分析、弹性力学平面问题有限元、空间问题与轴对称问题以及弹性板壳有限元分析初步。

教育部“高等教育面向 21 世纪的课程体系、教学内容改革的研究和实践”的研究项目,从课程体系、教学内容改革的角度考虑,结构力学课程中包含有矩阵位移法这一要求用计算机计算的必修内容,虽然这一安排有作为传统位移法的直接延拓、学生易于接受的优点,但是当开设有限单元法课程时,直接从弹性力学平面问题有限元分析入手,有限元精华的分片插值思想学生接受就不那么容易了。加之课程安排上的间隙,部分内容的遗忘,就更不利于更好地掌握有限单元法。为进一步改革课程体系和教学内容,同时考虑不同学校、不同教学计划安排都能使用本教材,从本书包含的各章内容可见,在介绍必要基础知识之后,完全按有限单元法的思想、方法安排了杆系结构单元和整体分析的内容。由于杆系结构本身就是由杆件连接而成的,将结构离散成杆件单元集合体是非常自然的。但是,为了建立单元的特性方程,还必须插值构造位移场,而对杆系单元来说,这种位移场又可用多种已掌握的知识得到。因此,通过简单、易理解的杆系问题来掌握有限单元法基本知识是有利的。但是,考虑到如果读者没有在结构力学课程中学习过矩阵位移法,使用本教材组织教学也必须达到结构力学对这部分内容的基本要求,以便对要报考研究生的读者,在不需自学矩阵位移法的情况下也能完成矩阵位移法试题。对于已经开设过矩阵位移法的学校,从更好理解和掌握有限单元法思想的角度,是

否介绍这部分内容,教师可以自行取舍。

本教材配书光盘既有提供学有余力读者选学的内容,也有供读者结合原理、方法学习参考的教学源程序,还有供读者在学习和工程应用中都可使用的计算程序,集原理、应用和部分扩展知识于一体,应该是便于读者学习的。

本书尽力考虑了面向大多数读者,尽可能深入浅出,力求做到概念清晰,层次分明,便于学习,便于教学。全部内容都配有供学生用程序分析部分习题和做工程计算的教学程序,读者按一般 Windows 应用软件进行安装后,即可学会使用。软件也提供了在线帮助和少量例题(注意:在线帮助的内容光盘上都有相应的 HTML 格式文件,读者用 Word for Windows 打开阅读要比在软件帮助和用浏览器观看来的清楚)。读者也可利用它们掌握程序的应用。近 20 年的教学实践经验表明,只学不练是学不好有限单元法的,阅读程序(最好自行编写或修改程序)、上机应用程序解算问题是十分必要的。

本书由哈尔滨工业大学王焕定教授、广州大学焦兆平教授主编。王焕定负责编写第二章,焦兆平负责编写第一章并提供部分应用程序,其他章节具体分工为:吴应华,第三、四章;王荣辉,第五章前半部分内容和第七章;孙作玉,第六章和第五章后半部分内容及光盘上的选学部分内容。本书由东南大学单建教授主审,单建教授审阅得认真、细致使作者感动,所提出的十分宝贵的意见和建议,对提高本书质量帮助极大,对此我们深表感谢。

本书得到了哈尔滨工业大学土木工程学院和广州大学的大力支持。在此,对两校的领导深表谢意。

限于作者的能力和水平,书中不当之处敬请读者和教师批评指正。

编著者

2001.7

# 目 录

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
§ 1-1 引言 .....	1
§ 1-2 有限单元法基本思路 .....	3
§ 1-3 有限单元法发展概况 .....	4
§ 1-4 学习指导 .....	6
<b>第 2 章 MATLAB 预备知识</b> .....	9
§ 2-1 MATLAB 基础知识 .....	9
§ 2-2 MATLAB 编程基础 .....	26
§ 2-3 MATLAB 符号运算简介 .....	43
§ 2-4 MATLAB 图形绘制简介 .....	51
§ 2-5 小结 .....	61
<b>第 3 章 弹性力学相关预备知识</b> .....	63
§ 3-1 弹性力学基本概念 .....	63
§ 3-2 变形体虚位移原理 .....	70
§ 3-3 最小势能原理及里茨法 .....	73
§ 3-4 加权余量法 .....	78
§ 3-5 有限单元法的分析过程 .....	80
§ 3-6 结论与讨论 .....	83
习题 .....	85
<b>第 4 章 杆件体系结构有限元分析</b> .....	86
§ 4-1 引言 .....	86
§ 4-2 等截面直杆细长单元的分析 .....	93
§ 4-3 杆件体系结构整体分析 .....	118
§ 4-4 约束条件的处理 .....	136
§ 4-5 结论与讨论 .....	140
习题 .....	143
<b>第 5 章 杆件体系结构有限元分析的 MATLAB 编程</b> .....	147
§ 5-1 桁架结构分析程序 .....	147
§ 5-2 刚架结构分析程序 .....	152
习题 .....	158

<b>第 6 章 平面问题有限元分析</b> .....	161
§ 6-1 引言 .....	161
§ 6-2 常应变三角形单元 .....	162
§ 6-3 双线性矩形单元 .....	173
§ 6-4 平面等参数单元 .....	178
*§ 6-5 Wilson 非协调元 .....	194
§ 6-6 结论与讨论 .....	197
习题 .....	198
<b>第 7 章 平面问题有限元分析的 MATLAB 编程</b> .....	200
§ 7-1 平面问题子程序简介 .....	200
§ 7-2 平面问题主体程序框图及介绍 .....	204
§ 7-3 平面问题程序应用例题 .....	206
习题 .....	209
* <b>第 8 章 空间与轴对称问题有限元分析</b> .....	212
§ 8-1 空间问题 .....	213
§ 8-2 轴对称问题 .....	227
§ 8-3 结论与讨论 .....	235
习题 .....	237
<b>第 9 章 空间与轴对称问题有限元分析的 MATLAB 编程</b> .....	238
§ 9-1 弹性轴对称问题程序应用 .....	238
§ 9-2 轴对称弹性实体的非轴对称荷载程序 .....	239
§ 9-3 三维实体单元的程序及应用举例 .....	241
§ 9-4 考虑自重的平面、轴对称及空间问题的程序分析 .....	245
习题 .....	250
<b>第 10 章 板壳结构有限元分析</b> .....	252
§ 10-1 弹性薄板基本理论 .....	252
§ 10-2 矩形(12 自由度, R12)薄板单元分析 .....	255
§ 10-3 柱壳分析的矩形平面壳体单元 .....	268
*§ 10-4 考虑横向剪切变形的薄板弯曲单元 .....	273
*§ 10-5 其他板壳单元 .....	280
§ 10-6 结论与讨论 .....	299
习题 .....	300
<b>第 11 章 板壳结构有限元分析的 MATLAB 编程</b> .....	302
§ 11-1 R12 板元分析薄板结构程序 .....	302

§ 11-2	R16 板元分析薄板结构程序 .....	305
§ 11-3	平面壳元分析柱壳结构程序 .....	310
§ 11-4	中厚度板分析的 MATLAB 程序 .....	313
	习题 .....	316
<b>第 12 章</b>	<b>有限元逐步精细化分析的若干问题 .....</b>	<b>318</b>
§ 12-1	实际结构逐步精细化分析的简要说明 .....	318
§ 12-2	结构静力分析的逐步精细化举例 .....	320
§ 12-3	实际结构分析中的若干问题 .....	330
§ 12-4	结论与讨论 .....	338
	习题 .....	338
<b>附录 1</b>	<b>程序参量说明 .....</b>	<b>340</b>
<b>附录 2</b>	<b>函数与程序功能说明 .....</b>	<b>345</b>
	<b>参考文献 .....</b>	<b>360</b>

## § 1-1 引言

有限单元法最初作为结构力学位移法的拓展,它的基本思路是将复杂的结构或物体看成由有限数目的单元体彼此仅在结点处相联系而构成的集合体。首先,对每一个单元分析其特性,建立相关物理量之间的相互联系;然后,依据单元之间在结点处的联系,再将各单元组装成整体,从而获得整体特性方程;最后,应用与所得方程相应的解法,即可完成整个问题的分析。这种先“化整为零”,然后再“集零为整”和“化未知为已知”的研究方法,是有普遍意义的,是科学研究的基本方法之一。

有限单元法作为一种近似的(除杆件体系结构静力分析外)数值分析方法,它借助于矩阵等数学工具,尽管计算工作量很大,但是分析流程是一致的,有很强的规律性和统一的模式,因此特别适合于编制计算机程序来处理。一般来说,一定前提条件下分析的近似性,随着离散化单元网格的不断细化,计算精度将随之提高。随着计算机软硬件技术的飞速发展,有限单元分析技术得到了越来越多的应用,五十多年来的发展几乎涉及了各类科学、工程领域中的问题。从应用的深度和广度来看,有限单元法的研究和应用正继续不断地向前探索和推进。

学习有限单元法当然首先要掌握其基本原理,但更重要的是要学会应用。这就必须掌握如下几方面的知识:如何建模;如何判断计算结果正确与否;如何利用计算成果。

随着科学技术的不断发展,对计算精度的要求越来越高,对可能影响计算结果的方方面面考虑得越来越多、越来越细,原来受到计算条件限制所建立的简化计算简图必须重新审视其适用性,为了满足“精细化分析”的要求,无疑首先应该更合理地确定所求解对象的计算模型——建模。严格地说科学合理的建模是一个反问题,它应该根据实际测试所获得“响应”结果来确定,这是目前科学与工程领域热门的研究课题之一。

现在各学校、单位都已购买诸如 ANSYS、NASTRAN、SAP、ABAQUS、ADINA 等大型有限单元法商用软件之一或者多个。这些商用软件经过不断发展,功能都非常强大,使用手册也越来越厚。因为这些软件都是根据“有限元”(这里是指广义的有限元,包括近年发展起来的各种数值求解技

术)原理来实现的,虽然可以将原理及其程序实现当“黑盒子”看待来应用它们,而且这对一些直接可以按手册依葫芦画瓢的问题来说,正确应用的可能性还是很大的。但是,对于要进行“精细化分析”的问题和对于一些并不能直接依葫芦画瓢的问题来说(手册不可能考虑到所有可能遇到的情况,更不可能提前为有待研究的问题提供求解程序),不深入掌握有限单元法原理及具体的程序实现技术,错误或不当应用商用软件的可能性同样也是很大的。为了更好地正确掌握这些大型商用软件的应用,我们越来越意识到在了解有限单元法基本原理的基础上,掌握一些根据有限元基本原理用计算机高级语言编制程序的初步知识是十分必要的。此外,对一些小问题,也大可不必用大型商用软件来解决,可以自行编制程序来计算。这不仅可以进一步提高自己的能力,使知识掌握得更扎实,也更易驾驭计算结果直至合理应用计算成果。

英国学者 Smith I. M. 和美国学者 Griffiths D. V. 合著的《Programming the finite element method》于 2004 年修订出版了第 4 版,所有程序改用 FORTRAN 95 编写。由于该书深入浅出、内容丰富,故被翻译成多国语言。该书的 Source 资料中给出了各章的例题及计算结果,三个源代码库(Geom、Main 和 Parallel)包含全书内容所有调试通过的源代码,是学习和自行组合建立专用有限单元法程序很好的参考资料。因此,我们结合《有限单元法基础》(第 2 版,王焕定、焦兆平编著,高等教育出版社,2010)的教学内容,将本书所涉及的 Geom 和 Main 库中的 FORTRAN 源代码,转换成了 MATLAB 函数并在 MATLAB R2010b 下通过调试、验证(必须注意,由于一些语法的规定与 MATLAB 低版本不同,因此有的程序在低版本下可能无法运行)和进行了汉化处理,这些源代码都作为开源的内容提供给读者。今后还将进一步扩充源代码库,将其做成一个“有限单元法工具箱”,以便读者应用和补充,使其成为一个开放式代码库。

基于上述想法,我们在《有限单元法基础》一书的基础上,应用 MATLAB 语言,补充介绍如何根据有限单元法原理来实现有限元的具体计算,编写了本书内容以供初学者学习参考。

最后需要说明的是,对初次接触有限单元法的读者来说,绪论中的一些内容难以理解是正常的。因此读者学习本章以下内容时,只要了解本课程主要内容是什么、学习中应注意什么就够了,不必过于考虑其中一些暂时难以理解的概念。

## § 1-2 有限单元法基本思路

基础工程学科中的各种力学问题,最终归结为求解数学物理方程边值或初值问题。而传统的研究成果只能对较简单、规则的问题进行解析求解,大量的实际科学、工程计算问题,由于数学上的困难无法得到解析的解答。

从有限单元法正式提出至今已经历了半个多世纪的发展,用有限单元法来解决问题,从理论上讲,无论是简单的一维杆件体系结构,还是承受复杂荷载和不规则边界情况的二维平面、轴对称问题、三维空间块体等问题的静力、动力和稳定性分析,考虑材料具有非线性力学行为和有限变形的分析,温度场、电磁场,流体、液-固、结构与土壤相互作用等工程复杂问题的分析,都可以得到满意的解决。作为教材,本书将只介绍应用最广泛的、以结点位移作为基本未知量的“位移型有限元”,简称“位移元”,讨论范围仅限于最基本的线弹性问题。

虽然有限单元法能解答各种各样的复杂工程问题,但其求解的思路和过程是基本相同的,大致分为以下 4 个步骤:

(1) **结构离散化及数据化**。用一些假想的线或面对连续的结构进行分割,使其成为由结点连接起来的有限数量的**单元体**(注意单元体和材料力学中的微元体是根本不同的,它的尺度是有限值而不是微量)集合体,用这个单元集合体代替原来要分析的物体。再通过某种编码格式,将单元集合体的所有相关信息编码成为数据,以供计算机分析。

(2) **单元分析**。这一步工作将对结构中的任一典型单元进行分析。以平面静力问题为例,单元分析的目的是将单元内任一点的位移、应变、应力都表示为单元结点位移的函数,并最终建立结点力与结点位移之间的关系方程,即**单元刚度方程**。

(3) **整体分析**。有了单元特性分析的结果,像结构力学中解超静定结构的位移法一样,可以建立起表示整个结构(实质上,更确切地说是单元集合体)结点平衡的方程组,即**整体刚度方程**。本步骤计算的细节取决于所求解的问题和所编制计算机程序的处理方法,对于一些问题将存在坐标(局部与整体)转换问题、位移边界条件的引入等。

(4) **解方程组和输出计算结果**。对线弹性问题,整体刚度方程一般是一组高阶的线性代数方程组。由于**整体刚度矩阵具有带状、稀疏和对称**等特性,在有限单元法发展过程中,人们通过研究,建立了许多不同的存储方式和计算方法,目的是节省计算机的存储空间和提高计算效率。利用相应的计算方法,



即可求出全部未知的结点位移。求出结构全部结点位移后,利用分析过程中已建立的一些关系,即可进一步计算单元中的应力或内力,并以数表或图形的方式输出计算结果。

### §1-3 有限单元法发展概况

从经典结构力学派生的结构矩阵分析方法,早就用于建筑工程的复杂刚架等结构的分析。但这些结构本身都是明显地由杆件所组成,杆件的特性可通过经典的位移法分析来建立。虽然矩阵位移法整个分析方法和步骤都与有限单元法相似,也是用矩阵来表达、用计算机来求解,但是它与目前广泛应用的有限单元法是有本质区别的。前者只能用以分析具有已知单元结点力-单元结点位移关系的杆件体系结构,而不能分析非杆件体系的连续体结构。因为对离散所得的非杆件连续体单元,无法像矩阵位移法那样用传统方法建立起单元结点力和单元结点位移之间的关系。

有限单元法基本思想的提出,可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作。他第一次假设翘曲函数在一个人人为划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数,求得了圣维南(St. Venant)扭转问题的近似解。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因也都涉足过有限单元法的概念。但由于当时计算技术的制约,不能用以解决工程实际问题,因而也就没有引起科学界及工程界的重视。到了 20 世纪 60 年代以后,电子计算机硬软件技术迅速发展,促进了有限单元法的飞速发展。

现代有限单元法的第一个成功尝试,是 Turner 和 Clough 等人于 1956 年在分析飞机结构时进行的。他们将矩阵位移法的方法、原理推广应用于弹性力学平面问题,将一个弹性连续体假想地划分为一系列三角形的所谓单元,不再像里茨法那样在整个求解域内构造约束所允许的位移试函数,而是以三角形单元三个角顶结点的位移作为优先解决的基本未知量,在满足一定条件下对整个求解域构造分片连续的位移场,这就使原来建立位移场的困难得到了解决。继之又解决了单元结点力和结点位移之间的单元特性关系(单元刚度方程),从而用三角形单元求得了平面应力问题的近似解答。他们的这些研究工作开创了利用计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年 Clough 进一步处理了平面弹性问题,并第一次正式提出了“有限单元法”的名称。

早期的有限单元法是建立在虚位移原理或最小势能原理的基础上的,这对人们清楚地理解有限单元法的物理概念是很有帮助的,但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963—1964 年, Besseling、Melosh、Jones、卜学璜等人