数学基础知识提要

SHUXUE JI CHU ZHI SHI TI YAO

高中课程补习用书

GAOZHONGKECHENGBUXIYONGSHU

湖南教育出版社

高中课程补习用书

数学基础知识提要

杨道正　任远志　易松涛　易柏林　黄卉清　编

高中课程补习用书
数学基础知识提要
杨道正　任远志　易松涛　黄世清　易柏林编写
责任编辑：华　青
*
湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路3号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷
字数：400,000　印张：19.5　印数：1——108,000
统一书号：7284·785　　定价：2.30元

出 版 说 明

在目前情况下，每年应届高中毕业生升学的，一般只有百分之五左右。大多数同学则必须通过补习，准备再次参加高考或就业考试。为了适应这些同学的迫切需要，我们编辑出版了这套《高中课程补习用书》，即高中各科基础知识提要，包括语文、英语、数学、物理、化学、生物、历史、地理，共计八册。

各科基础知识提要都是严格遵循高中各科教学大纲的要求，紧扣现行统编教材编写的。书中将有关知识进行了归纳，使之条理化、系统化，提出了补习的重点、难点，对一些典型例题进行了简明的阐释。每个部分都有一定数量的、经过精心挑选的练习题。书末还有根据高考要求编制的综合自测题1～4套，并附有答案或提示。因此，既利于自测，又易于检验学习的效果。

这套书的作者，都是在历届高中毕业班教学工作中做出了显著成绩的科任教师。在编写过程中，他们汲取了过去各地出版的高中毕业复习用书的优点，又总结了自己丰富的教学经验，听取了高中毕业班老师和学生的意见，分析了近年来高考的命题方式和试题类型。我们相信，这套书的出版，一定会受到准备参加高考或就业考试的人们——高中毕业生、社会青年和青年职工的欢迎。

一九八六年十月

编者的话

为了帮助具有高中程度的各类读者系统整理和深刻理解所学过的数学知识，我们编写了本书。其内容包括：代数、平面三角、立体几何、解析几何和综合运用，共五个部分。

本书着重揭示知识的内在联系和阐述解题方法。各章、节的内容安排大体可分为三个层次，首先概述内容要点及知识之间的纵横联系；其次是精选例题，分析解题思路，说明知识的灵活运用；最后是小结，归纳常用的解题方法和技巧。学好数学必须通过做题，本书每节都附有一定数量的习题，每章附有一至二套自测题，最后精心编排了三套综合练习题。这些习题是编者在多年的教学实践中逐步积累的，具有典型新颖、知识覆盖面大、解法灵活等特点。认真解答上述习题，读者定能收到巩固所学知识的良好效果。

本书依据现行高中数学教学大纲，紧扣教材，注重基础知识和培养能力、开发智力，也可供高中数学教师作教学参考用书。

本书由杨道正主编。参加本书编写的人员有：易松涛（代数）、杨道正（三角）、黄卉清（立体几何）、任远志（解析几何）、易柏林（综合运用）。任远志老师还参与了全书的修改、定稿工作。

限于水平，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

一九八六年十月

目　录

代 数

一、数 与 式

本章分为两个部分。

第一部分是实数与实数集中式的恒等变形（包括整式、分式、根式、指数式对数式的运算及因式分解），这些知识是进一步学习代数及其他数学学科的基础。因此，学习这一部分内容，应力求达到以下要求：1.概念要清楚。对于绝对值、算术根、式的恒等等重要概念，务必透彻理解，特别要注意式里字母的允许值范围和式的恒等的条件。2.运算要迅速、准确。3.基本技能与基本方法要熟练，如因式分解、对数式变形的技巧，反证法、待定系数法等方法，都要能运用自如。

第二部分是复数，包括三个内容：复数的概念，复数的运算，复数与其他数学知识的联系。复数的概念是研究复数的基础，复数的运算是复数的重点。实数扩充到复数以后，实数的性质和运算法则，有的保持下来了，有的则不能保持。例如，实数可以比较大小，但两个复数（如果不全是实数）则不能比较大小；实数的算术根的性质也不适合于复数；实系数的一元二次方程根的判别式，对于系数不全是实数的一元二次方程也不适合等等。对于这些，要特别留心区别。还要注意在不同的

数集里解题往往有不同的结果（如因式分解、解方程等）。

复数的多种表达形式和复数运算，生动而深刻地体现了"数"与"形"的紧密结合与相互渗透，这不仅是复数的显著特点，也是它的主要优点。我们要注意复数的代数形象 $a+bi$ 与几何形象点$Z(a,b)$ 或向量$\overrightarrow{OZ}$或 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，解题时要灵活地选择复数的表达形式和随之而来的运算方式，并使其互相转化，达到取长补短、为我所用的目的。复数的独特的多种表达形式，使它同其他数学知识建立了密切的联系。用复数的三角形式可以解决三角函数、反三角函数、三角公式的许多问题；用复数的几何意义及复数运算的几何意义（这是难点，也是有用之处），可以简便地解决不少平面几何、解析几何、物理学中的问题。我们要重视用复数的数形结合的思想来解决实际问题，以便提高自己的解题能力与思维能力。

§1 实　　数

补习要求　牢固掌握非负实数(绝对值、算术根、偶次幂等)的性质及其应用，能熟练地应用一元二次方程根的判别式来解某些求变量取值范围的问题；能在代数证明中熟练地应用反证法。

例1　(1) 求证：如果一个整数m的平方能被3整除，那么这个整数一定能被3整除；

(2) 用(1)的结论证明$\sqrt{3}$是无理数。

证明　(1) 若m不能被3整除，则

$m=3k+1$或$m=3k+2(k\in Z)$。

当　$m=3k+1$时，$m^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$

$=3(3k^2+2k)+1$不能被3整除；

当　$m=3k+2$时，$m^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$

$=3(3k^2+4k+1)+1$也不能被3整除。

两种情形都与已知矛盾，故m能被3整除。

(2) 设$\sqrt{3}$是有理数，那么$\sqrt{3}=\frac{m}{n}$(n，m是互质正整数)。故得 $m^2=3n^2$，因而 m^2能被 3 整除，进而m能被3整除。又设$m=3m_1(m_1\in N)$，代入$m^2=3n^2$得$9m_1^2=3n^2$，从而$n^2=3m_1^2$，n也被3整除。这样，m、n有公约数 3，与“m、n互质”矛盾，故$\sqrt{3}$是无理数。

说明　整数可按被某一整数 p 除所得余数分为 p类：np，$np+1$，$np+2$，……，$np+(p-1)$。整数的分类有广泛的应用。

任何有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$(p，q为互质整数，$q\neq0$) 的形式。

例2　已知实数x、y、z满足

$$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0,$$

求$(z+y)^x$的值。

解　$\because$　$\frac{1}{2}|x-y|\geqslant0,\sqrt{2y+z}\geqslant0,$

$$z^2-z+\frac{1}{4}=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0,$$

$\therefore\quad x-y=2y+z=z-\dfrac{1}{2}=0,$

解得 $\quad x=y=-\dfrac{1}{4},\quad z=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\quad (y+z)^{x}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}.$

说明 算术根、绝对值、偶次幂都是非负数，从若干个非负数的和为零可推出每个非负数为零，这是非负数的重要性质。根据这一性质，等式$\dfrac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^{2}=0$可以化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}|x-y|=0,\\ \sqrt{2y+z}=0,\\ \left(z-\dfrac{1}{2}\right)^{2}=0.\end{cases}$$

例3 若a、$y\in R$，且$\lg(3a-y)=2\lg a+\lg y$，求y的取值范围。

解 由$\lg(3a-y)=2\lg a+\lg y$，

当a、$y\in R^{+}$且$y<3a$时，得

$3a-y=a^{2}y\Longrightarrow ya^{2}-3a+y=0,$

视其为关于a的二次方程，

$\because\quad a$、$y\in R^{+}$，

$$\therefore\quad \begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ a_1+a_2>0\\ a_1\cdot a_2>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}9-4y^{2}\geqslant 0\\ \dfrac{3}{y}>0\\ 1>0\end{cases}\Longrightarrow 0<y\leqslant\dfrac{3}{2}\text{为所求。}$$

说明　例3中用判别式确定 y 的范围的方法叫做判别式法。判别式法是确定某些等式中变量的取值范围、求某些函数的值域的重要方法之一。应用判别式法的关键是得到实变元的一元二次方程，并要使有待确定范围的变量 y 处在二次方程里各项系数的地位上。

习题1—1.1

1. 解方程 $|2-x|+|x-9|=7$
2. 方程 $|x-|2x+1||=3$ 的不同的根的个数为
(A) 0个；(B) 1个；(C) 2个；(D) 3个；(E) 4个。
其中正确答案是(　　　)。
3. (1) 已知 $2x^2+2xy+y^2-6x-4y+5=0$，求实数 x 与 y；
(2) 化简　$|2a-1|-\sqrt{4a^2+12a+9}-|2-a|\ \left(a<-\dfrac{3}{2}\right)$。
4. 证明
(1) 若 m、n 是有理数，则二次方程 $2mx^2-(3m-2n)x-3n=0$ 的根是有理数；
(2) 若 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，则以 a、b、c、d 为边的四边形必为菱形；
(3) 不论 x、y 是什么实数，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$ 都不能成立；
(4) 若 $ad-bc=1$，则 $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd\neq 1$。
5. (1) 求函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的值域；
(2) 若 x、$y\in R$，且 $x^2+y^2+2xy+x-y=0$，求证：x 不能超过 $\dfrac{1}{8}$，y 不能小于 $-\dfrac{1}{8}$；
(3) 求函数 $y=\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}$ 的最大值和最小值。

§2 式的恒等变形

补习要求 熟练掌握在不同数集里进行多项式因式分解的多种方法；牢固掌握指数、对数概念，运算法则，对数换底公式及其应用，能迅速地进行指数、对数式的变形；深刻理解恒等的意义并能运用。

例1 若 $f(x)$ 是 x 的整式， $(x-1)(x^2+1)f(x)=x^8+Ax^2+B$ 是x的恒等式，求常数A、B的值。

分析 显见$f(x)$是x的五次式，若用系数比较法则繁，而用数值代入法则简。据恒等的意义我们可以取x为需要的任何值。

解 取$x=1$、$x=i$，代入恒等式得

$$\begin{cases}1+A+B=0,\\1-A+B=0.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}A=0,\\B=-1.\end{cases}$$

例2 分解因式：

(1) $x^5-x^4+x^3-x^2-6x+6$(分别在Q、R、C中分解)；

(2) x^4-26x^2+25；

(3) $x^2-5xy+6y^2-x+y-2$。

解 (1) $x^5-x^4+x^3-x^2-6x+6=(x-1)(x^4+x^2-6)$

$=(x-1)(x^2-2)(x^2+3)$ (在Q中)

$=(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+3)$ (在R中)

$=(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$。(在$C$中)

(2) x^4-26x^2+25

$=(x^4-10x^2+25)-16x^2=(x^2-5)^2-(4x)^2$

$=(x^2+4x-5)(x^2-4x-5)$

$=(x+1)(x-1)(x+5)(x-5)$。

(3) $x^2-5xy+6y^2-x+y-2$（用"双十字相乘法"）

$=x^2-(5y+1)x+(6y^2+y-2)$

$=x^2-(5y+1)x+[-(3y+2)][-(2y-1)]$

$=[x-(3y+2)][x-(2y-1)]$

$=(x-3y-2)(x-2y+1)$。

注意 例2（3）还可以用待定系数法分解，设原式$=(x-3y+m)(x-2y+n)$，再比较两边对应项系数列方程组求得m、n。待定系数法在因式分解、部分分式、坐标变换等单元广泛应用。例2(3)还可以用求根的方法分解，由求根公式得$x^2-(5y+1)x+(6y^2+y-2)$的根$x_1=3y+2$，$x_2=2y-1$，故原式$=(x-3y-2)(x-2y+1)$。

例3 (1) 不查表计算$\lg2\lg50+\lg5\lg20-\lg100\lg5\lg2$；

(2) 已知$\log_{18}9=a$，$\log_{18}5=b$，求$\log_{36}45$的值。

解 (1) 原式$=\lg2(\lg5+1)+\lg5(\lg2+1)-2\lg5\lg2$

$=\lg2\lg5+\lg2+\lg5\lg2+\lg5-2\lg5\lg2$

$=\lg2+\lg5=\lg10=1$。

(2) $\because\log_{18}9=a$，$\log_{18}5=b$，

$$\therefore\ \log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}18+\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log_{18}2},$$

而 $\log_{18}2=\log_{18}\frac{18}{9}=\log_{18}18-\log_{18}9=1-a$，

$$\therefore \quad \log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}.$$

或者　选取5为底数换底。

$$由\begin{cases}\log_{18}9=\dfrac{2\log_5 3}{\log_5 2+2\log_5 3}=a\\[2ex]\log_{18}5=\dfrac{1}{\log_5 2+2\log_5 3}=b\end{cases}\qquad 解得$$

$$\log_5 3=\frac{a}{2b},\ \log_5 2=\frac{1-a}{b},$$

$$\therefore \quad \log_{36}45=\frac{1+2\log_5 3}{2(\log_5 2+\log_5 3)}=\frac{a+b}{2-a}.$$

小结　因式分解一般在有理数范围内进行，基本方法考虑顺序是“提公因式→套公式→十字相乘法→分组分解法→其他方法”.应用换底公式求对数式的值，应象例3(2)中那样选择底数:一是向条件“靠拢”,选18为底；二是考察底及真数18、9、5、36、45，它们的最小素因数分别是2、3、5、2、3,其中最大的是5，就取5为底。

习题1—1.2

1．求出下列每题中两式恒等的条件：

(1) $\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2}}$与1；　　(2) $\lg x^2$与$2\lg x$；

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$与$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　　(4) $\sin x$与$\cos x\cdot \operatorname{tg}x$；

(5) $\cos x$与$\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}$；　　(6) $\arccos(\cos x)$与x；

(7) $\log_a\sqrt{(1-a)^2}$与$\log_a(|a|-1)$。

2. 分解因式：

(1) x^3+3x^2-4；　　(2) x^4-23x^2+1；

(3) $a^2b^2-a^2-b^2-4ab+1$；

(4) $2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2$；

(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-24$。

3. 化简：

(1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$；

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}+\dfrac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}+\dfrac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$。

4. 化分式为部分分式：

(1) $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$；　　(2) $\dfrac{6x+1}{(2x+1)(3x-1)}$。

5. (1) 计算$\sqrt[5]{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}}$；

(2) 已知$\log_2 3=a$，$\log_3 11=b$，将$\log_{66}44$用a、b表示；

(3) 已知$x^2+x+1=0$，求$x^{1985}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1985}$的值；

(4) 已知$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$ $(x>0,\ y>0)$，

求$\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$的值。

6. 证明：

(1) 三个连续整数的立方和是9的倍数；

(2) 若$2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，则$\dfrac{x}{y}=4$；

(3) $\dfrac{1}{\log_2 11}+\dfrac{1}{\log_3 11}+\dfrac{1}{\log_4 11}+\dfrac{1}{\log_5 11}<2$。

§3　代数恒等式的证明

补习要求　能迅速、正确地证明恒等式。要系统地复习各

种证题法，并注意总结证题规律，灵活运用各种方法证题。

例1 证明 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$。

证法一 左化为右，右化为左，或左右化同均可。

证法二 $\because (a^2+b^2)(x^2+y^2)-[(ax+by)^2+(ay-bx)^2]$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2-a^2y^2$

$+2abxy-b^2x^2=0$,

$\therefore\quad (a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$。

证法三 欲原等式成立，只须

$a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2$，又只须

$a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$，

此等式显然成立，故原等式成立。

证法四 由证法三逆推即得。

例2 已知$x+y+z=0$，试证：

$x^3+y^3+z^3=3xyz$。

分析 从条件直接推出结论较难，可用求差法，将$x^3+y^3+z^3-3xyz$ 分解因式，以便造成利用条件的机会。

证明 $\because\quad x+y+z=0$,

$\therefore\quad x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)[(x+y)^2-(x+y)z+z^2]-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)=0$。

即 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$,