最·新·版

金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

苏德矿 李铮 铁军 主编

考研数学 数学二

强化复习全书

- 严格依据大纲精练知识点及常用公式结论
- 常考题型条分缕析，疑难问题重点解读
- 综合拓展拔高训练，精心筛选同步练习
- 旨在打造提高读者逻辑思维能力的参考书

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

考研数学

强化复习全书

数学二

苏德矿 李铮 铁军◎主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学强化复习全书. 数学二/苏德矿，李铮，铁军主编. —北京:北京理工大学出版社，2016.7
ISBN 978－7－5682－2360－7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①苏…②李…③铁… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 113097 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京汇祥印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16
印　　张 / 25.5
字　　数 / 632 千字
版　　次 / 2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 64.80 元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 边心超

前言

硕士研究生招生考试是具有选拔性质的较高水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，而考研数学试题的这种特征尤为明显。每年都有为数不少的考生数学得零分，但每年也都会有考生数学得满分。天壤之别缘由何在？

为此我们要探讨考研数学的得分之道。首先对数学而言，理解比记忆更重要，因为做数学题先要有思路，后才能动手去解答，可以说数学题是先“想”出来，后“做”出来的。数学要记忆，但光靠记忆是远远不够的。记忆所得往往是形式上“死”的知识，不会变通，题目稍有变化就束手无策。数学要理解，对本质的深入理解才能获得活的知识，以灵活应变化才是取胜之道。其次数学试题最富有变化性，从这一点上讲，考研数学试题每年每道题都是新的。故光靠死记硬背会有被拒之门外之忧，那么打开考研数学成功大门的钥匙何在？

如果把历年考研数学试题进行比较，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年（考研）考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗就是课程的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学用微分中值定理证明方程根的存在性、证明适合某种条件下 ξ 的等式、证明不等式；线性代数的解含参数的线性方程组、向量的线性关系、矩阵的对角化等典型题型。如果你不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质 —— 题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

本书将致力于与读者一起共同打造开启考研数学大门的钥匙。本书的每一章都首先列出考研大纲要求，这表明本书是严格按照最新考研大纲编写的。凡大纲要求的本书不但讲到，而且讲深讲透讲明白，使读者掌握。而凡大纲不要求的本书尽量简略介绍或者不涉及。

一、内容编排特点

在内容编排上，充分展现以“强化提高”为主旨的特点：

(1) 知识梳理提纲挈领：首先通过“热身自测”检验考生对本章知识点及解题方法的理解与掌握；“考点概述”梳理知识重点，提高认知层面；针对复习常见疑难问题针对性深入剖析，优化复习效果。

(2) 题型讲解精当到位：对本章所涵盖的题型进行科学、合理分类，针对各类题型集中总结解题思路、方法，并结合典型例题加以示范，辅助理解；更提供综合性、难度较高的题目及考生普遍感到无从下手的实际应用题帮助考生拓展拔高，使解题方法的运用更加灵活自如、游刃有余。

(3) 自我评测巩固提高：提供难度适宜的自测题和答案解析，帮助考生巩固所学，及时查漏补缺。

二、篇章内容编排设置

各章按照“热身自测”“考点概述”“重点题型详解”“疑难问题点拨”“综合拓展提高”“本章同步练习”六大栏目顺次编写。各栏目的内容组织形式如下：

(1) 热身自测：选取涉及本章考点的 3 ～ 4 道试题（多为历年真题，难度逐步深入，形式以选择、填空及计算题为主），并提供试题的答案与简单提示，使考生在解决这几道题目的时间内迅速完成对本章知识点和解题方法的重温与回顾，在逐步加大难度的过程中发现尚存在的问题，带着问题进入本章的强化复习。

(2) 考点概述：用准确、精炼的语言文字阐述本章所包含的概念、性质、定理、准则等重要知识内容，在内容编排上体现知识点之间的层级关系并注意内在关联，使知识讲述清晰、重点突出、条理分明。同时，在补充说明或提醒考生特别注意的地方添加评注。

(3) 重点题型详解：将本章涉及的典型题目根据题型进行分类，分类遵循合理有序、各类题型相对独立的原则。并在近年考试的热门题型标题处添加特殊符号（如 ★）加以突出说明，引起考生格外关注。

在每一分类下，首先集中列举解决此类题目常见的方法步骤，紧接着配合一定量难度适中、具有代表性的题目（考研真题注明具体出处），进行详细的分析解答。首先阐释“解题思路”，然后展现解题的具体推导演算过程。在题目整体解答过程之后，加入“评注”对以下内容进行进一步阐释，使考生通过一道题目获得最大的启发与收获。

(4) 疑难问题点拨：在各章内存在难度系数高、考生普遍觉得难以吃透或者存在疑惑的问题，此栏目逐条列举疑难问题并分别展开进行详细阐释，从最本质最关键的角度切入，对疑难知识点进行透彻的讲述，彻底消除知识理解上的困难和迷惑，并配合代表性的实例加以示范说明，使考生从知识掌握到解题方法全线破解疑难。

(5) 综合拓展提高：将本章涉及的综合性、难度较高以及实际应用类的题目放置在这一栏目中集中进行分析讲解，目的是使考生在对知识点和解题方法具备一定的了解和熟练的基础上进一步拔高，挑战融合多种知识点、考查层面较高的“难题”。这一栏目在题目选取上遵循综合性、难度较“重点题型详解”部分更上一个层次的原则，同时注意摒弃偏题怪题。在题目解析方面，首先阐释“解题思路”，然后展现解题的具体推导演算过程。

(6) 本章同步练习：各章在章末提供适量习题，供考生在复习知识、学习解题方法后进行自我测评。题目在形式上包含单选、填空及解答题，难度方面由易到难参照真题的难度分布合理搭配，目的是使考生通过自己独立完成解题发现自己在知识掌握和解题要领上还存在哪些疑问和漏洞，并及时对照答案解析发现解题的错处和复习的薄弱点，及时查漏补缺。

本书不仅将考研所需的结论全部整理搜集在内容精要中，而且对某些在教材中没有出现的结论，如高等数学的“曲线 $y=f(x)$（连续），x 轴及直线 $x=a, x=b(0\leqslant a<b)$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转所成立体的体积公式 $V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x$”“由连续曲线 $y=f(x)$，x 轴及直线 $x=a, x=b$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的侧面面积 $S_x=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$”；线性代数的“若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times t}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解向量，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$”，给出相应例题以帮助考生记忆并理解。事实上这些结论已不止一次地出现在考研真题的解答过程中。为加深读者印象本书对部分结论给出了证明，其目的在于使读者理解这些结论的由来，从而有助于读者掌握，进而在解题中能灵活地运用。书看懂，自我检测题做会是首要的，也是基本的，至此可能只是进入到比较呆板偏重于形式上掌握的第一层次。只有从中悟出道理来，才能达到对问题本质的理解，才能步入知识灵活运用的较高层次，才能获得高分。有读者会认为悟道太抽象，当然可以用较具体的总结规律来代替。但总结规律只是悟道的具体手段之一，而不是其全部，悟道的含义更广。

在内容上，我们力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂，并注意数学思维与数学方法的论述，通过典型错误的分析，加深对数学概念、定理的理解。虽然解数学问题没有什么万能的模式，但它们仍然有着某些规律、方法和技巧，通过我们所给解题方法的归纳，可以使读者抓住重点，较充分地理解数学内容，掌握解题的“钥匙”，大大加快解题速度。本书主要不是用猜题来帮助读者考研，而是着重于帮助读者提高自身的数学能力来通过数学考试。

数学知识要积累，对数学的理解更要有一个循序渐进的过程，对立志考研的读者要说三个字：早，勤，韧。只有尝试才有希望，只有努力才会成功，有志者事竟成！

编著者长期执教数学公共课，参与考研数学阅卷，本书以历年考研辅导班的讲稿为蓝本，经反复修改，多次讲用，日积月累而成。然而限于水平，撰写中常有绠短汲深之感，殷切希望读者不吝赐教，多多指正。

编　者
2016 年 3 月
于浙江杭州

目 录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

考研大纲要求

了解　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数及隐函数的概念，初等函数的概念，连续函数的性质和初等函数的连续性.

会　建立应用问题的函数关系，利用极限存在的两个准则求极限，用等价无穷小量求极限，判别函数间断点的类型，应用闭区间上连续函数的性质.

理解　函数的概念，复合函数及分段函数的概念，极限的概念，函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系，无穷小量、无穷大量的概念，无穷小的比较函数连续性的概念(含左连续与右连续)，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

掌握　函数的表示法，基本初等函数的性质及其图形，极限的性质及四则运算法则，极限存在的两个准则，利用两个重要极限求极限的方法，无穷小量的比较方法，用洛必达法则求未定式极限的方法.

热身自测

1. 当 $x \to 0^+$ 时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$　　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=$(　　).

(A)0　　(B)1　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；　(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

考点概述

(一) 基本概念

1. 函数的概念

函数与函数表达式的区别：函数表达式指的是解析式，是表示函数的主要形式；而函数除了用表达式表示外，还可以用表格法、图形法等形式来表示. 注意不要把函数与函数表达式等同起来.

2. 反函数的概念

(1) 由函数、反函数的定义可知，反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域.

(2) 在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形相同(因为满足 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 的集合与满足 $x=f^{-1}(y)$ 的点 (x,y) 的集合完全相同；而函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称).

(3) 若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$，则 $y=f[f^{-1}(y)]$，　$x=f^{-1}[f(x)]$.

3. 复合函数的概念

(1) 实际判断两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 能否构成复合函数时，只要看 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是否为空集，若不为空集，则能构成复合函数；否则不能构成复合函数.

(2) 在求复合函数时，只需指出哪个是内函数，哪个是外函数即可. 例如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，若 $y=f(x)$ 作为外函数，$y=g(x)$ 作为内函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$；若 $y=g(x)$ 作为外函数，$y=f(x)$ 作为内函数，则复合函数为 $y=g[f(x)]$.

(3) 考生要学会分析复合函数的复合结构，既要会把几个函数复合成一个函数，又要会把一个复合函数拆分成几个函数的复合形式.

4. 初等函数的概念

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为初等函数.

5. 具有某些特性的函数

(1) 奇(偶) 函数：

1) 定义域关于原点对称是函数为奇(偶) 函数的必要条件；

2) 若 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；

3) 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称；奇函数 $f(x)$ 的图形关于原点对称；

4) 奇偶函数的运算性质：奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶数个奇(偶) 函数之积为偶函数；奇数个奇函数之积为奇函数；一奇一偶函数的乘积为奇函数；两个奇函数的复合仍为奇函数；一奇一偶函数的复合为偶函数；两个偶函数的复合仍为偶函数.

(2) 周期函数：

1) 若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 kT $(k\in \mathbf{Z},k\neq 0)$ 也是 $f(x)$ 的周期. 若周期函数 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期. 一般地，函数的周期是指基本周期；

2) 必须指出的是：不是所有的周期函数都有最小正周期，例如 $f(x)=c$ (c 为常数)，因为对任意的正实常数 T，都有 $f(x+T)=f(x)=c$，所以 $f(x)=c$ 是周期函数，但在正实数里没有最小正常数，所以，周期函数 $f(x)=c$ 没有最小正周期.

(3) 单调函数：递增和递减函数统称为单调函数，严格递增和严格递减函数统称为严格单调函数.

(4) 分段函数：如果一个函数在其定义域内，对应于 x 的不同取值范围有着不同的表达形式，则称该函数为分段函数. 注意：分段函数不是几个函数，而是一个函数，解题时经常构造分段函数来作为反例.

(5) 有界函数与无界函数：若存在常数 $M>0$，使得对每一个 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数；若对每一个正常数 M(无论 M 多么大)，都存在 $x_0\in D$，使 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$ 为 D 上的无界函数.

6. 函数极限(数列极限) 的概念

(1) 考研大纲不要求考生用极限定义证明极限存在，但在选择题中会出现用到对定义的理解的题目. 考生要了解极限的定义，为高等数学的复习奠定坚实的基础.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(常数) 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 的区别：前者表明函数极限存在，后者指函数极限不存在，

但还是有趋于无穷大的趋势.因此,后者用上述记号表示,但还是属于极限不存在之列.下面说函数极限存在,指的是函数的极限值为常数.

7. 无穷小量阶的比较、等价量

若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=c$(常数)$\neq 0$ ($k>0$ 为常数),则称当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 是 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小量.

等价量在求极限过程中起着非常重要的作用,因此,若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则记作 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$,当 $x\to x_0$ 时,如果 $f(x)$,$g(x)$ 均是无穷小量,称为等价无穷小量;如果 $f(x)$,$g(x)$ 均是无穷大量,称为等价无穷大量;如果 $f(x)$,$g(x)$ 既不是无穷小量也不是无穷大量,称为等价量.

例如,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(常数)$\neq 0$,则 $f(x)\sim A$ $(x\to x_0)$.注意:A 不能为零.若 $A=0$,$f(x)$ 不可能和 0 等价.

8. 函数连续的概念

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(二) 重要性质、定理及公式

1. 无穷小量的性质

有限个无穷小量之和(或积,或有界函数与无穷小量之积)是无穷小量.

2. 无穷大量的性质

有限个无穷大量之积或有界函数与无穷大量之和仍是无穷大量.

3. 函数极限的性质

下述六种类型的函数极限:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$;(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$;(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$;(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$;(5) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$;(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 具有与数列极限相似的一些性质.

下面以$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 为例讲解,其他类型极限的相应性质的叙述只要做适当修改即可.

性质 1**(唯一性)** 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则它只有一个极限.

性质 2**(局部有界性)** 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则存在 x_0 的某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$,使 $f(x)$ 在$\mathring{U}(x_0)$ 内有界.

注意:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,只能得出 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界,得不出 $f(x)$ 在其定义域内有界.

性质 3**(保不等式性)** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $A<B$,则存在 x_0 的某空心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_0)$,使对任意 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$,都有 $f(x)<g(x)$.

性质 4**(局部保号性)** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或$<0$),则对任何常数 $0<\eta<A$(或 $A<\eta<0$),存在 x_0 的某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$,使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0)$,都有 $f(x)>\eta>0$(或 $f(x)<\eta<0$) 成立.

性质 5**(不等式性质)** 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且存在 x_0 的某空心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta_0)$,使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$,都有 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $A\leqslant B$.

评注 1. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$(常数)$\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$.

2. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$(常数)$\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在.

3. 若存在两个数列$\{x'_n\}$,$\{x''_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$,$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=x_0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=B$.当 $A\neq B$,或存在$\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)$ 不存在.这是判断函数极限不存在的一个重要方法.

4. 函数连续的性质

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处既是左连续又是右连续.

5. 闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理、根的存在定理、介值定理.

6. 重要的函数极限与重要的等价量

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ ($a>0,a\neq 1$ 为常数)；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^b-1}{x}=b$ (b 为常数，$b\neq 0$)；　(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$；　(9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0$ ($k>0$ 为常数)；

(10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$ ($a>1$ 为常数，k 为常数)；

(11) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$($a,b$ 均为常数)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b$.

考生不仅要记住这些公式的标准形式，更要理解一般形式. 即上述式(1) 中的 x 可换成 $f(x)$，只要 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$，结论仍然成立.

利用上述重要极限，可以得到下列对应的重要的等价无穷小量，它们在解题中会经常用到.

当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$，　$\ln(1+x)\sim x$，　$\mathrm{e}^x-1\sim x$，　$a^x-1\sim x\ln a$ ($a>0,a\neq 1$ 为常数).

$(1+x)^b-1\sim bx$ ($b\neq 0$ 为常数)，　$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

评注　上式中的 x 可换成 $f(x)$，只要 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$，则结论仍然成立. 例如，$\sin f(x)\sim f(x)$ (若 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to 0$).

7. 等价量替换定理

若(1) $f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，$h(x)\sim h_1(x)$ ($x\to x_0$)；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}=A$ (或 ∞ 或不存在)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)g_1(x)}{h_1(x)}=A$ (或 ∞ 或不存在).

评注　这个定理说明，在求函数极限时，分子、分母中的因式可用它们的简单等价量来替换，以便化简，简化计算. 需要注意的是，分子、分母中加减的项不能直接替换，应先分解因式再用因式替换，包括等价无穷小量、等价无穷大量或一般的等价量的替换.

8. 洛必达(L'Hospital) 法则

设(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

(2) 存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞).

评注　1. 在用洛必达法则求极限之前，应尽可能把函数化简，或把较复杂的因式用简单等价的因式来替换，以达到简化的目的，再利用洛必达法则.

2. 利用洛必达法则求极限时，可在计算的过程中论证是否满足洛必达法则的条件，若满足即可直接使用洛必达法则求出结果；若不满足，说明不能使用洛必达法则，则需用其他方法求极限. 此外，可重复使用洛必达法则，但只能用有限次.

9. 夹逼定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$，使得对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta')$，都有 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

> **评注**　数列极限的夹逼定理适合数列的项有多项相加或相乘时 $n\to\infty$ 的情形，即有无穷项相加或相乘，且不能化简，不能利用极限的四则运算时，可尝试用夹逼定理. 夹逼定理不仅能证明数列极限存在，还可求出极限的值.

10. 单调有界定理

若数列 $\{a_n\}$ 递增(递减)有上界(下界)，则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

> **评注**　单调有界定理适用于由递推关系式确定数列的项的数列. 单调有界定理仅能证明数列极限存在，至于数列的极限值是多少，只能通过别的方法求解.

11. 收敛数列的性质

唯一性、有界性、保号性、保不等式性. 改变数列的有限项，不改变数列的收敛性与极限值.

12. 重要数列极限公式

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ ($k>0$ 为常数)；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ ($|q|<1$ 为常数)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ ($a>0$ 为常数)；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ (a 为常数)；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}=0$ ($k>0$ 为常数)；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ ($a>1,a,k$ 为常数)；

(9) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\cdots+b_{k-1}n+b_k}=\begin{cases}0, & m<k,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=k,\\ \infty, & m>k.\end{cases}$$

(其中 $a_0,a_1,\cdots,a_m,b_0,b_1,\cdots,b_k$ 均为常数且 $a_0\neq0,b_0\neq0$)

重点题型详解

题型一　函数相关问题

> 解题策略
>
> 一般地，求函数的定义域需注意以下几点：
>
> 1. 若函数是一个抽象的数学表达式，则其定义域应是使该表达式有意义的一切实数组成的集合，且满足
>
> (1) 分式的分母不能为零；
>
> (2) 偶次根号下应大于或等于零；
>
> (3) 对数式的真数应大于零且底数大于零不为 1；
>
> (4) $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$，其中 $|\varphi(x)|\leqslant1$；
>
> (5) $\tan\varphi(x)$，其中 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\varphi(x)<k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$；
>
> $\cot\varphi(x)$，其中 $k\pi<\varphi(x)<k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(6) 若函数的表达式由几项组成,则它的定义域是各项定义域的交集;

(7) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

2.若函数涉及实际问题,定义域为除了使数学式子有意义之外还应当确保实际有意义的自变量取值全体组成的集合.

3.对于抽象函数的定义域问题,要依据函数定义及题设条件.

【例 1】 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$,求 $f(x)$ 的定义域.

【思路】 分式的分母不能为零.

【解】 要使函数式有意义,必须满足 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2}\neq 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq 2,\end{cases}$ 故所给函数的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1, x\neq 2\}$.

评注 如果把 $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$ 化简为 $\dfrac{x(x-2)}{x-1}$,那么函数的定义域为 $x\neq 1$ 的一切实数,因此,避免出错,求函数的定义域应在变形之前.

【例 2】 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【思路】 利用复合函数求 $\varphi(x)$ 的表达式.

【解】 由 $\exp\{[\varphi(x)]^2\}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,得 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$,所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\leqslant 0$.

【例 3】 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$;　(2) $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & x>4.\end{cases}$

(1)【思路】 将式子两边立方,利用 $\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=y$ 代入,解 x.

【解】 由 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$,两边立方得

$$y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})^2(x-\sqrt{1+x^2})}+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})^2}+x-\sqrt{1+x^2},$$

即

$$y^3=2x-3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}-3\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=2x-3y,$$

解之 $x=\dfrac{1}{2}(3y+y^3)$. 所以反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(3x+x^3)$, $x\in\mathbf{R}$.

评注 直接解不出 x,需要观察,变换.

(2)【思路】 分段写出表达式,解出 x.

【解】 由 $x=\begin{cases}y, & y<1,\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, & y>16,\end{cases}$ 则反函数为 $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$

评注 求反函数的定义域即是求原函数的值域.

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

【思路】 根据外函数定义的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析.

【解】 由 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时,即 $\varphi(x)=x+2<1$,当 $x<0$,即 $\begin{cases}x<0,\\ x<-1,\end{cases}$ 有 $x<-1$;

当 $x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1<1$,即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{cases}$,有 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时,即 $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,当 $x<0$,即 $\begin{cases}x<0,\\ x\geqslant -1,\end{cases}$ 有 $-1\leqslant x<0$;

当 $x\geqslant 0$,$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\leqslant -\sqrt{2}\text{ 或 }x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$,有 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综上可得 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

评注 1. 代入法:一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代,这种构成复合函数的方法,称为代入法;该方法用于初等函数的复合,关键搞清哪个是内函数,哪个是外函数;

2. 分析法:根据外函数定义的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,从而得到复合函数的方法,称为分析法;该方法用于初等函数与分段函数或分段函数与分段函数的复合.

【例 5】 判断 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

【解】 $f(x)$ 的定义域为 $x\in(-1,1)$,关于原点对称,又由 $f(x)+f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\ln\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1+x}{1-x}=\ln 1=0$,知 $f(x)$ 为奇函数.

评注 1. 用定义;

2. 若 $f(x)+f(-x)=0$,则 $f(x)$ 为奇函数,这种方法适用于定义判断奇偶性有困难的题目.

题型二　函数极限

求函数极限的方法:

1. 极限的四则运算; 2. 等价量替换; 3. 变量代换; 4. 洛必达法则;
5. 重要极限; 6. 初等函数的连续性; 7. 导数的定义;
8. 利用带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式; 9. 夹逼定理;
10. 利用带有拉格朗日型余项的泰勒公式; 11. 拉格朗日中值定理;
12. 无穷小量乘以有界量仍是无穷小量等.

★ 题型 2.1　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，求 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

解题策略

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{A}{B}, & A \text{ 为常数}, B(\text{常数}) \neq 0, \\ 0, & A = 0, B = \infty, \\ \infty, & A(\text{常数}) \neq 0, B = 0, \\ \dfrac{0}{0}, & A = 0, B = 0, \\ \dfrac{\infty}{\infty}, & A = \infty, B = \infty. \end{cases}$$

对于未定式的极限，先用等价量替换(或变量替换，或极限的四则运算)化简，再利用洛必达法则求极限. 很多情况下，常常综合运用几种方法.

【例 6】 (2008[2]) $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(xf(x))}{(e^{x^2} - 1) f(x)} = 1$，则 $f(0) =$ ________.

【思路】 用无穷小量等价代换及一般形式.

【解】 因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1) f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{[xf(x)]^2}{2}}{x^2 f(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{2} = \dfrac{1}{2} f(0) = 1$，所以 $f(0) = 2$.

评注　由 $\dfrac{0}{0}$ 型极限值反求其中函数值，一般利用无穷小量等价代换以及洛必达法则和两个重要极限. 一些考生将 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$ 直接写入极限式，如下：

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(xf(x))}{(e^{x^2} - 1) f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(xa)}{(e^{x^2} - 1) a} = \cdots,$$

这样做是不对的，因为如果 $f(0) = a = 0$，这时 $\dfrac{1 - \cos(xa)}{(e^{x^2} - 1) a}$ 的分母为零，式子无意义.

【例 7】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

【思路】 化简，利用重要极限的一般形式求解.

【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} e^{\sin x} \dfrac{e^{x - \sin x} - 1}{x - \sin x} = 1 \times 1 = 1$.

评注　如果用洛必达法则，需要用三次，花的时间多且易出错.

【例 8】 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos^x x - 2}{x \ln \cos x}$.

【解】 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos^x x - 2}{x \ln \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(e^{x \ln \cos x} - 1)}{x \ln \cos x} \xlongequal{\text{令 } t = x \ln \cos x} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2(e^t - 1)}{t} = 2$.

【例 9】 (1992[3]) 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$.

【思路】 遇到根式，共轭因式极限不是零的情形就有理化，然后用等价量替换求解.

【解】

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1 + x) - x](\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x},$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{2x[\ln(1+x)-x]} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{-x} = -\frac{1}{2}.$$

评注　当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\sim 2$，$\cos x\sim 1$.

注意这里 $\cos x$ 用的是等价量替换换成了1，不是求 $\cos x$ 的极限.

【例 10】　$\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}=-\dfrac{100}{2}=-50$.

评注　当 $x<0$ 时，$x=-\sqrt{x^2}$.

【例 11】　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

【思路】　利用极限的乘积运算法则与洛必达法则或利用变量代换与等价量替换求解.

【解】　方法一　由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{-1}=\dfrac{1}{n}$，故

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

方法二　原式 $\xlongequal{t=1-x}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{1-t})(1-\sqrt[3]{1-t})\cdots(1-\sqrt[n]{1-t})}{t^{n-1}}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{t}{n}}{t^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

评注　这里的 $(1-\sqrt[n]{1-t})=-\{[1+(-t)]^{\frac{1}{n}}-1\}\sim-\frac{1}{n}(-t)=\frac{t}{n}(t\to 0)$，如果不进行观察、分析，直接用洛必达法则计算会很复杂.

【例 12】　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

【思路】　利用等价量替换与洛必达法则或利用洛必达法则、极限的乘积运算法则求解.

【解】　方法一　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}}{x}=-e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1}{x}$，

且当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2\ln(1+x)}{x}-2\to 0$，故 $e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1\sim\dfrac{2\ln(1+x)}{x}-2$，得

$$原式=-e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}=-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2\lim_{x\to0}\frac{-x}{x(1+x)}=e^2\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}=e^2.$$

方法二　原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2-e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}\cdot2\dfrac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-2e^2\lim_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=e^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=e^2.$$

评注　由本题看到有时用等价量替换比直接用洛必达法则要简便得多.

【例 13】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

【思路】　利用和差化积公式、极限的乘积运算法则、等价量替换、洛必达法则求解.

【解】　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}$.

由 $x\to0$ 时,$\sin\dfrac{\sin x+x}{2}\sim\dfrac{\sin x+x}{2}$,$\sin\dfrac{\sin x-x}{2}\sim\dfrac{\sin x-x}{2}$ 得

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{-2\cdot\frac{\sin x+x}{2}\cdot\frac{\sin x-x}{2}}{x^4}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x}{x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

评注　考生如果不知道和差化积公式,用洛必达法则求解则很麻烦.

【例 14】　(2009[2]) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解】　方法一　原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4x}$(令 $\sin x=t$)

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o(t^3)\right)}{t^3}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

方法二　因为　$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$　,则　$\sin(\sin x)=\sin x-\dfrac{1}{6}\sin^3x+o(\sin^3x)$,

所以　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin^4x}{6x^4}+\dfrac{o(\sin^4x)}{x^4}\right]=\dfrac{1}{6}$.

评注　一般都使用简单的无穷小量替代复杂的无穷小量,而方法一反其道而行之,再结合变量代换化难为易.

【例 15】 (2009[2]) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

【解】 方法一 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x(1+\tan x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4(1+\tan x)}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{x}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{x}\right)=\frac{1}{4}.$$

方法二 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x(1+\tan x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-2\sec^2 x\tan x}{4}=\frac{1}{4}.$$

【例 16】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

【思路】 利用变量代换与洛必达法则求解.

【解】 原式$\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\text{用 50 次}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$.

评注 如果直接使用洛必达法则,越用越复杂.灵活运用变量代换就会使解题运算更简便.

【例 17】 设 $f(u)$ 在 $u=0$ 的某邻域内连续,且$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=A$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d}{dx}\int_0^1 f(xt)dt$.

【思路】 利用定积分变量代换、变上限求导与洛必达法则求解.

【解】 令 $xt=u,dt=\dfrac{1}{x}du$,得$\int_0^1 f(xt)dt=\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}$,又

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(xt)dt=\frac{d}{dx}\left[\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\right]=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2},$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$,故原式$=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}$.

评注 看到积分被积表达式中除积分变量外还有其他的变量时,要想办法把这个变量分离到积分式的外面,然后用变上下限函数求导去解决问题.