

河口海岸科学系列教材

海洋数值计算方法 和数值模式

朱建荣 编著



海洋出版社

河口海岸科学系列教材

海洋数值计算方法 和数值模式

朱建荣 编著

海洋出版社

2003年·北京

内 容 简 介

本书介绍了海洋数值计算方法、数值模式及其应用。第1章给出海洋运动控制方程组,为海洋动力学基础之一、数值离散求解的对象;第2~4章为海洋中的一些数值计算方法,介绍有限差分的基本概念和差分格式的稳定性分析;第5、第6章介绍河口海岸海洋数值模式(ECOM)和有限体积海岸海洋数值模式(FVCOM)以及ECOM模式中一些数值方法的改进;第7、第8章为ECOM和FVCOM模式的应用和模拟结果的动力分析。

本书可作为海洋、自然地理和水利等学科本科生和研究生的教材,也可供从事这些领域工作的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

海洋数值计算方法和数值模式/朱建荣编著. —北京:
海洋出版社, 2003.9

ISBN 7-5027-5929-8

I.海... II.朱... III.①海洋动力学—数值计
算—方法②海洋动力学—数值—模式 IV.P731.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第079240号

责任编辑:陈茂廷

责任印制:刘志恒

海洋出版社 出版发行

<http://www.oceanpress.com.cn>

(100081 北京市海淀区大慧寺路8号)

北京海洋印刷厂印刷 新华书店发行所经销

2003年10月第1版 2003年10月北京第1次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:13

字数:313.3千字 印数:1~1000册

定价:42.00元

海洋版图书印、装错误可随时退换

前 言

随着海洋数值计算方法和数值模式的快速发展, 计算机性能的提高, 数值模式在海洋科学和工程中应用越来越广泛, 海洋数值模式在定量和预测海洋动力过程的研究和应用中已起着不可替代的作用。

本书介绍了海洋数值计算方法、数值模式及其应用。因海洋数值离散和计算的对象是海洋运动控制方程组, 故本书第 1 章介绍了最基础的海洋运动控制方程组的给出。第 2~4 章介绍了有限差分的基本概念、差分格式的稳定性分析和能量一致有限差分格式。第 5 章介绍了 ECOM 模式, 以及其中一些数值方法的改进, 如为了更好地拟合岸线和局部加密, 从原正交曲线坐标系下的模式改进为非正交曲线坐标系下模式, 用预估修正法改善原 ECOM 模式在弱混合情况下的弱不稳定性问题, 用局域概念改进 σ 坐标系下斜压压强梯度力的计算精度, 以及用 Euler-Lagrange 方法改进物质输运方程中平流项的计算。每种计算方法的改进均有计算实例验证。第 6 章介绍 FVCOM, 它是国际上最新发展的海岸海洋数值模式, 具有有限元三角形网格局部加密、拟合岸线和有限差分计算高效直观的优点, 在河口海岸的研究和应用中具有极大的优越性。第 7 章为 ECOM 模式的应用, 包括理想河口环流、盐水入侵和最大浑浊带、渤海黄海东海潮汐和夏季冬季长江口外海区环流的数值模拟和动力分析。第 8 章为 FVCOM 模式在长江河口流场数值模拟中的应用。

本书是作者在河口海岸国家重点实验室给研究生讲授海洋数值计算方法的基础上编写成的，其中 ECOM 模式中一些数值方法的改进和模式的应用是近几年作者及其课题组人员在科研中取得的成果，尤其是朱首贤博士在改进 σ 坐标系下斜压压强梯度力的计算精度和用 Euler-Lagrange 方法改进物质输运方程中平流项的计算中作出了贡献。由于作者水平有限，书中定有不足和错误之处，恳请读者批评指正，作者深表感谢。

本书的编写和出版得到上海市“重中之重”学科建设项目的资助。

作 者

2003 年 7 月 28 日

目 次

第 1 章 海洋运动控制方程组	1
1.1 连续介质假设	1
1.2 描写流体运动的两种方法——拉格朗日(Lagrange)和欧拉(Euler)方法	1
1.3 海洋运动控制方程组	5
1.3.1 运动方程	5
1.3.2 体程连续方程(连续方程)	10
1.3.3 位温和盐度方程	12
1.4 平均流方程(雷诺方程)	12
1.5 尺度分析	15
第 2 章 有限差分基本概念	19
2.1 离散近似	20
2.1.1 解域的离散化与差分网格的建立	20
2.1.2 微分方程的离散化	20
2.2 截断误差与相容性	23
2.3 累积误差与收敛性	24
2.4 舍入误差与稳定性分析	27
2.4.1 矩阵方法	27
2.4.2 冯纽曼(Von Neumann)方法	29
2.4.3 能量方法	30
2.5 Lax 等价定理	30

2.6	离散近似造成的伪物理效应及矫正	30
2.6.1	逆用效应及迎风格式矫正	30
2.6.2	计算耗散和频散	31
2.6.3	非线性不稳定	33
第3章	各种差分格式的稳定性分析	34
3.1	偏心差分能量方法	34
3.2	Lax - Wendroff 格式	35
3.3	欧拉后差格式	37
3.4	二维平流方程蛙跃格式	38
3.5	外重力波方程	40
3.5.1	交叉网格格式	40
3.5.2	压强平均格式	41
3.6	抛物型方程	43
3.6.1	Dufort - Frankel 格式	43
3.6.2	平稳隐式格式 (Crank - Nicholson 格式)	44
3.6.3	一种隐式求解椭圆型方程的方法	46
3.7	半隐、分裂和 ADI 方法	48
3.7.1	半隐方法	48
3.7.2	分裂方法	49
3.7.3	ADI (Alternating Direction Implicit) 格式	51
第4章	能量一致有限差分格式	52
4.1	保持数值稳定的能量守恒方法	52
4.2	涡度方程能量和涡度拟能守恒格式	57
4.3	二次守恒的动量平流格式	63

4.4 动量方程位涡守恒	67
第 5 章 ECOM 介绍及其数值方法的改进	72
5.1 ECOM 模式介绍	74
5.1.1 ECOM 模式中海洋原始控制方程组	75
5.1.2 湍流闭合模型	77
5.1.3 数值计算方法	78
5.1.4 曲线网格的生成	80
5.2 ECOM 模式的改进	81
5.2.1 非正交曲线坐标系下的 ECOM 模式	82
5.2.2 预估修正法对 ECOM 模式在弱混合下弱不稳定性的改进	110
5.2.3 垂向 σ 坐标下斜压压强梯度力的改进	115
5.2.4 采用 Euler-Lagrange 方法改进物质输运方程中平流项的计算	119
第 6 章 三维有限体积海岸海洋模式 FVCOM 介绍	128
6.1 模式方程、三角形网格的设计和数值离散过程	128
6.1.1 原始方程组	129
6.1.2 σ 坐标下的控制方程	129
6.1.3 二维 (垂向平均) 方程组	130
6.1.4 三角形网格的设计	131
6.1.5 数值离散过程 (外模和内模的分裂)	132
6.2 球坐标系下的 FVCOM 模式	140
第 7 章 ECOM 模式的应用	143
7.1 理想河口环流、盐水入侵和最大浑浊带的数值试验	143
7.1.1 悬浮泥沙输运的数值模式	144

7.1.2	数值试验和结果分析	149
7.2	渤海黄海东海潮汐的数值模拟	155
7.2.1	模式设置	156
7.2.2	半日潮的数值模拟	156
7.2.3	全日潮的数值模拟	160
7.3	夏季冬季长江口外海区环流的数值模拟	161
7.3.1	模式设置	163
7.3.2	夏季长江口外海区环流的数值模拟	167
7.3.3	冬季长江口外海区环流的数值模拟	172
第 8 章	FVCOM 模式的应用	180
8.1	长江河口流场的数值模拟	180
8.1.1	模式设置	180
8.1.2	边界条件和初始条件	180
8.1.3	长江河口流场的模拟	183
8.2	渤海黄海东海潮汐和潮致余流的数值模拟	189
8.2.1	模式设置	189
8.2.2	潮汐模拟	190
8.2.3	潮致余流模拟及与 ECOM 模式模拟结果的比较	191
参考文献	194

第 1 章 海洋运动控制方程组

1.1 连续介质假设

海洋动力学研究海水的运动，海水为一种流体。把牛顿第二定律应用于流体时，是否如应用于刚体时一样适用？

海洋动力学属流体力学的范畴，流体力学是基于连续介质的基础上建立起来的。流体由大量分子组成，微观结构具有不均匀性、离散性、随机性，宏观结构具有均匀性、连续性、确定性。流体力学研究流体的宏观结构，研究方法有统计物理，即从分子和原子的运动出发，采用统计平均的方法建立宏观物理量满足的方程，并确定流体的性质；以及以连续介质假设为基础，认为流体质点连续地充满了流体所在的整个空间。流体质点所具有的宏观物理量（如质量、速度、压力、温度等）满足一切应遵循的物理定律及物理性质，例如牛顿定律、质量、能量守恒定律、热力学定律、以及扩散、黏性、热传导等输运性质。

连续介质假设的基础是由于宏观问题的特征尺度和特征时间与分子间的距离和碰撞时间相比大得不可比拟，个别分子的行为几乎不影响大量分子统计平均后的宏观物理量，因此在考虑流体的宏观运动时，可不必直接考虑流体的分子结构，而采用连续介质这一近似的理论模型。连续介质假设认为真实流体所占有的空间，可近似地看成是由“流体质点”连续地无空隙地充满着。所谓流体质点指的是微观上充分大，宏观上充分小的分子团。

有了连续介质假设，在研究流体的宏观运动时，就可以把一个本来是大量的离散分子或原子的运动近似为连续充满整个空间的流体质点的运动问题，而且每个空间点和每个时刻都有确定的物理量，它们都是空间坐标和时间的连续函数，从而可以利用强有力的数学工具。正因为这样，连续介质假设是流体力学中第一个带根本性的假设。

介质的密度一般是不均匀的，而压缩性又会使其密度发生变化，这就出现了矛盾：连续的意思是质点间似乎没有空隙，密度能够变化又意味着内部有活动的“余地”，因此连续介质只是一种抽象的概念，提出这种抽象的概念会使我们大大简化流体力学的研究，可把牛顿第二定律应用于流体。

1.2 描写流体运动的两种方法——拉格朗日 (Lagrange) 和欧拉 (Euler) 方法

在不考虑外力作用的前提下研究已发生的流体运动，叙述描写流体运动的方法及其分析表达（运动学）。设流体质点在空间中运动，我们的任务是确定描写流体运动的方法并且将它用数学式子表达出来。

拉格朗日方法：着眼于流体质点，设法描述出每个流体质点自始至终的运动过程，即它们的位置随时间变化的过程。

首先用某种数学方法区别不同的流体质点。通常利用初始时刻流体质点的坐标作为区别不同的流体质点标志。

$$t = t_0 \text{ 时, } \vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t), \quad (1.1)$$

\vec{r} 为流体质点矢径, 在直角坐标系中:

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

变数 a, b, c, t 称为拉格朗日变数, 在式 (1.1) 中, 如果固定 a, b, c , 而令 t 改变, 则得某一流体质点的运动过程。如果固定时间 t 而令 a, b, c 改变, 则得同一时刻不同流体质点的位置分布。应该指出, 在拉格朗日观点中, 矢径函数 \vec{r} 的定义区域不是场, 因为它不是空间坐标的函数, 而是质点标号的函数。

从式 (1.1) 出发求流体质点的速度和加速度。假设式 (1.1) 确定的函数具有二阶连续偏导数。速度和加速度是对于同一质点而言的单位时间内位移变化率和速度变化率,

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\partial \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t}, \\ \dot{\vec{V}} &= \frac{\partial^2 \vec{r}(a, b, c, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

既然对同一质点而言, a, b, c 不变, 因此上式写的是对时间 t 的偏导数。在直角坐标系中, 速度和加速度的表达式:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t}, \\ V &= \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t}, \\ W &= \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.4)$$

及

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2}, \\ \dot{V} &= \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2}, \\ \dot{W} &= \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

描写流体运动的另一种观点和方法, 为欧拉方法。和拉格朗日方法不同, 欧拉方法的着眼点不是流体质点, 而是空间点。设法在空间中的每一点上描述出流体运动随时间的变化状况。如果每一点的流体运动都已知道, 则整个流体的运动情况也就清楚了。那么应该用什么物理量来表现空间点上流体运动的变化情况呢? 因为不同时刻将有不同流体质点经过空间某固定点, 所以站在固定点上就无法观测和记录掠过的流体质点以前和以后的详细历史。就是说我们无法像拉格朗日方法那样直接测量出每个质点的位置随时间的变化情况。虽然如此, 不同时刻经过固定点的流体质点的速度是可以测出的。这样采用速度矢量

来描写固定点上流体运动的变化状况就是什么自然的了,而不管经过该固定点的质点从哪里来到哪里去,

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t). \quad (1.6)$$

在直角坐标系中:

$$\begin{aligned} U &= U(x, y, z, t), \\ V &= V(x, y, z, t), \\ W &= W(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

要完全描写流体的运动状况,还需要给定状态函数、压力、密度、温度、盐度等,

$$P = P(x, y, z, t), \rho = \rho(x, y, z, t), T = \tau(x, y, z, t), S = S(x, y, z, t).$$

变数 x, y, z, t 称为欧拉变数,当 (x, y, z) 固定, t 改变时,式 (1.7) 中的函数表示空间中某固定点上速度随时间的变化规律。应该指出,由式 (1.7) 确定的速度函数是定义在空间点上,它们是空间点的坐标 x, y, z 的函数,所以我们研究的是场,如速度场、压力场、密度场等。因此当我们用欧拉观点描述运动时,就可以广泛地采用场论知识。若场内函数不依赖于时间 t ,称为定常场;反之,称不定常场。

在气象观测中,广泛使用欧拉方法(气象站位资料)。在海洋观测中,多船定点同步观测,采用的是欧拉方法;卫星跟踪漂流浮标,采用的是拉格朗日方法。

假设速度函数 (1.6) 具有一阶连续偏导数,现从式 (1.6) 出发求质点的加速度 $\frac{d\vec{V}}{dt}$ 。

设某质点在场内运动,在 t 时刻,该质点位于 M 点,速度 $\vec{V}(M, t)$,过了 Δt 时刻后,该质点运动至 M' 点,速度为 $\vec{V}(M', t + \Delta t)$ 。加速度系对某一质点而言,亦即观测某确定质点在运动过程中其本身速度随着时间的变化率。所以 $\frac{d\vec{V}}{dt}$ 是“跟着”流体质点的微分,称为随体导数或实质微商。任何物理量的实质微商都是指“跟着”某个确定流体质点观测出来的该物理量的变化率。

根据定义,加速度的表达式为

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(M', t + \Delta t) - \vec{V}(M, t)}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

从式 (1.8) 可以看出,速度的变化亦即加速度的获得主要是下面两个原因引起的。一方面,当质点由 M 点运动至 M' 点时,时间过去了 Δt ,由于场的不定常性速度将发生变化;另一方面与此同时 M 点在场内沿迹线移动了 MM' 距离,由于场的不均匀性,亦将引起速度的变化。流体质点在 M 点 t 时刻的速度 $\vec{V}(M, t)$,就是在 M 点 t 时刻的欧拉场速度。 $\vec{V}(M, t)$ 是 t, M 的函数,所以 t 变化时, \vec{V} 变化,非定常; M 变化,非均匀。根据这样考虑,式 (1.8) 右边分成两部分:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(M', t + \Delta t) - \vec{V}(M', t)}{\Delta t} (\text{同一点不同时刻,非定常性}) \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(M', t) - \vec{V}(M, t)}{\Delta t} (\text{同一时刻不同点,不均匀性}) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(M', t + \Delta t) - \vec{V}(M', t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(M', t) - \vec{V}(M, t)}{MM'}, \end{aligned}$$

上式右边第一项为 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $M' \rightarrow M$, 因此是 $\frac{\partial \vec{V}(M, t)}{\partial t}$, 这一项代表由于场的不定常性引起的速度变化, 称为局部导数 (微商) 或就地导数。右边第二项为 $V \frac{\partial \vec{V}(M, t)}{\partial s}$, 它代表由于场的不均匀性引起的速度变化, 称为对流导数 (微商) 或位变导数, 其中 $\frac{\partial \vec{V}}{\partial s}$ 代表沿 s 方向移动单位长度引起的速度变化, 现在在单位时间内移动了 V 的距离, 因此 s 方向上的速度变化是 $V \frac{\partial \vec{V}(M, t)}{\partial s}$ 。这样总的速度变化即加速度 (实质微商, 随体导数) 就是局地微商与对流微商之和:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V \frac{\partial \vec{V}}{\partial s}.$$

从场论中知:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = (s_0 \cdot \nabla) \vec{V},$$

其中 \vec{s}_0 是曲线 L 上的单位切向矢量。考虑到 $V \vec{s}_0 = \vec{V}$, 得:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}. \quad (1.9)$$

这是矢量形式的加速度的表达式。

在直角坐标系中,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.10)$$

也可经过函数微分, 直接得到:

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = \vec{V}(x(t), y(t), z(t), t).$$

考虑到:

$$U = \frac{dx}{dt}, \quad V = \frac{dy}{dt}, \quad W = \frac{dz}{dt}.$$

于是得:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + W \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}. \end{aligned}$$

对矢量 \vec{a} 和标量 φ 均成立:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{a}, \quad (1.11)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\varphi. \quad (1.12)$$

采用欧拉方法描写流体运动常常比拉格朗日方法优越。主要体现在：广泛利用场论；一阶导数 $\frac{dV}{dt}$ 比二阶导数 $\frac{d^2r}{dt^2}$ 易处理。在实际海洋的观测中，若用船跟着流体质点跑，因流体质点随潮流作周期性的运动，故很难做到。但可用多船同步观测，在欧拉场中得出实质微商。

$$\begin{array}{ccccc} \text{固定点} & + & \text{同步} & \rightarrow & \frac{d\vec{V}}{dt} \\ \text{局部微商} & & \text{对流微商} & & \text{实质微商} \end{array}$$

1.3 海洋运动控制方程组

海洋运动可以通过求解一组数学方程来描写。这些方程包括：(1) 运动方程，(2) 连续方程以及(3) 热量和盐量守恒方程。为更好地了解这些方程的物理意义，下面利用质量守恒定律和牛顿第二定律导出这些方程。

1.3.1 运动方程

海洋运动遵循牛顿第二定律。按照这个定律，一个物体运动速度的改变（加速度）正比于作用于这个物体上的合力，方向沿着合力的方向，就是

$$mass \times acceleration = force, \quad (1.13)$$

运用这个定律到流体微团，我们重写方程(1.13)为

$$acceleration = force/mass. \quad (1.14)$$

出于方便，考虑“单位体积”受力作用力下的运动（如图1-1）。一个流体微团定义为

$$mass = density \times volume = \rho dx dy dz,$$

对单位体积质量， $mass = \rho$ ，因此对作用以单位体积流体微团方程(1.14)等于

$$acceleration = \frac{1}{\rho} \times force. \quad (1.15)$$

方程(1.15)说明海洋运动方程可以在一个给定的合力情况下导出。这里“合力”的意思是也许不止一个力同时作用，运动是由一些力的合成驱动的，即净力。

海洋中有二类力：初级力和次级力。在这里初级力定义为直接引起运动的力，次级力定义为由运动产生的力。在海洋中，初级力包括：(1) 重力，(2) 风应力和(3) 压力。次级力包括：(1) 科氏力，(2) 摩擦力。为得出运动方程，我们有必要先了解这些力。

(a) 重力

重力为作用于整个水体质量上的体力，这个力等于引力和离心力之和。

引力 牛顿万有引力指出宇宙中任意两个物体相互吸引，其吸引力正比于它们的质量

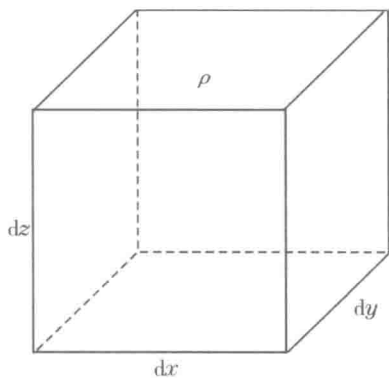


图 1-1 流体微团体积

量，反比例于它们间距离的平方。假设两个物体质量为 M 和 m ，相距 $r = |\vec{r}|$ （矢量 \vec{r} 指向 m ，如图 1-2 所示， r 表示矢量 \vec{r} 的绝对值），由于引力，质量 M 作用于质量 m 的力为

$$F_g = -\frac{GMm}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right),$$

其中 G 为宇宙常数，称之为引力常数。假设地球质量为 M ，海洋质量为 m ，那么由于地球引力吸引，作用于海洋上单位质量力为

$$g^* = \frac{F_g}{m} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (1.16)$$

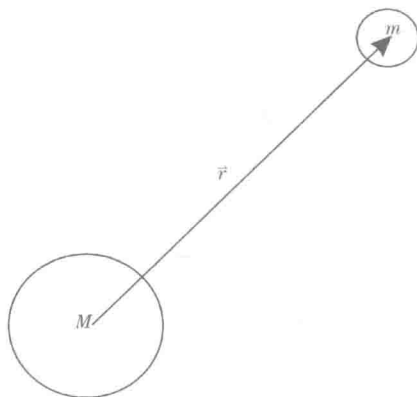


图 1-2 两个球形物体，质量为 M ， m ，球形中心相距 r

离心力 考虑系于细绳上质量为 m 的球，以恒定的角速度 ω 作以半径为 r 的圆旋转。从一个观测者来看，球的速度是恒定的，但前进的方向不停地变换，因此流矢是变化的。细绳的作用如同一个力，把球拉向旋转轴的方向。这个力对球产生了一个加速度。为计算加速度，如图 1-3 所示，在时间间距 Δt 内，球转动角度变化 $\Delta\theta$ ，流矢变化 $\Delta\vec{V}$ 。流矢 $\Delta\vec{V}$ 量值为 $|\Delta\vec{V}| = |\vec{V}|\Delta\theta$ 。如果我们把它除 Δt ，考虑在极限 $\Delta t \rightarrow 0$ ， $\Delta\vec{V}$ 指向旋转轴，我们得到

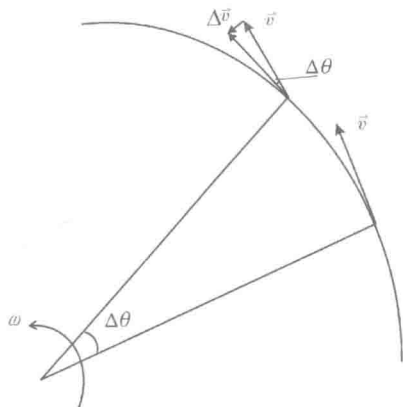


图 1-3 离心加速度

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = |\vec{V}| \frac{d\theta}{dt} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (1.17)$$

因为 $|\vec{V}| = \omega r$ 以及 $d\theta/dt = \omega$ ，因此，

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\omega^2 \vec{r}. \quad (1.18)$$

从固定坐标系看，运动为一个指向旋转轴的具有均匀加速度的运动，等于角速度的平方乘以离旋转轴的距离。这个加速度叫向心加速度，是拉于球上的细绳的力引起的。

现在，假设我们是在随球旋转的坐标系中观测运动。在旋转系统中球是静止的，但仍有一个力作用于球上，就是细绳的拉力。因此，为了应用牛顿第二定律描述相对于旋转坐标系的运动，我们必须引入一个额外的表观力，名为“离心力”，它恰好平衡细绳作用于球上的力。因此，离心力等于系于细绳上的球的惯性反应，与向心加速度量值相等，方向相反，即

$$\vec{F}_{cf} = \Omega^2 \vec{R}, \quad (1.19)$$

其中， Ω 为地球转动的角速度； \vec{R} 为从旋转轴指向物体的正矢量。

现在我们来找出重力表达式。在随地球旋转的相对坐标系内观测，在地球表面静止的单位质量物体，受到离心力作用。作用于物体上重力应等于引力和离心力之和，即

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R} \quad (1.20)$$

引力指向地心,而离心力背离旋转轴。因而,除了在极地和赤道,重力不指向地心。这可以从图 1-4 中清楚地看出。如果地球为一个纯粹球体,重力将有一个平行于表面的指向赤道的分量。假设地球为在赤道处凸出的形状大致为一个椭球体,则地球已作了调整来补偿这个指向赤道的力的分量,因而任意地点重力垂向地表面。因此,地球赤道半径比极地半径约大 21 km。请记住局地垂向,取为平行于重力方向,除了赤道和极地并不穿越地心。

(b) 科氏力

正如我们前面讨论的,为使牛顿第二运动定律应用于相对旋转坐标系静止的物体,我们需引入一个表观力:离心力。如果物体相对于旋转坐标系运动,另外一个表观力,叫科氏力,必须引入以使牛顿第二定律仍然有效。

为更好地理解表观力,让我们观测一个随旋转坐标系运动的物体。假设物体初始处于以角速度 Ω 旋转的圆平面上,假设物体相对这个平面处于静止状态,那它只受离心力的作用。当物体开始作离开旋转轴的直线运动,在平面上的观测者将发现相应的路径是弯曲的,原因是受到了一个与平面旋转方面相反的表观力作用,这个偏转力叫科氏力。从平面上看,这个相对运动为一个科氏力和离心力作用下加速运动。科氏力与流矢方向垂直,仅改变运动的方向。然后,离心力辐射向外,在运动方向具有一个分量,当物体以螺旋线向外运动时相对于旋转坐标系能增加物体的速度。在图 1-5 中,从平面上看物体的弯曲路径包括了科氏力和离心力的共同作用。

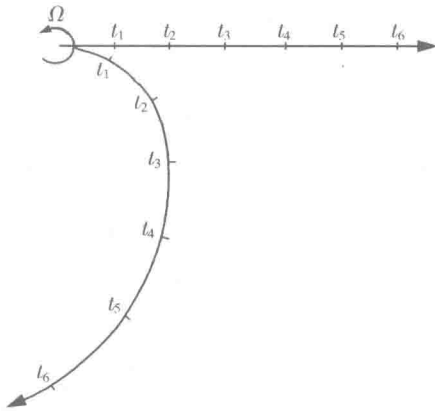


图 1-4 引力、离心力、重力和地球形状关系

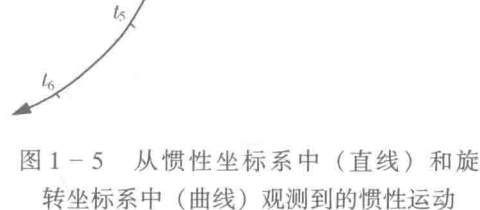


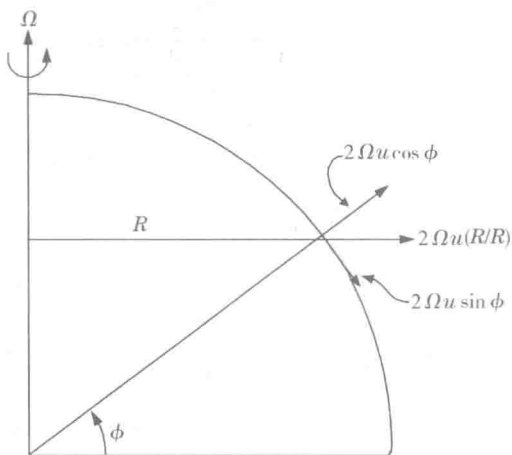
图 1-5 从惯性坐标系中(直线)和旋转坐标系中(曲线)观测到的惯性运动

上面给出的例子仅仅是为了考虑表观力的一个简单方法。对在旋转坐标系中的运动,两个事情是重要的。一个是在旋转坐标系中的任何物体不管是否运动都受到离心力的作用。在旋转坐标系中,离心力包括在重力中。第二个是物体在旋转坐标系中运动科氏力才存在。科氏力仅改变运动的方向,而离心力能加速沿运动方向的运动。

下面我们导出在地球系统中科氏力数学表达式。考虑在旋转无摩擦地球表面单位质量物体自由运动。假如物体相对于地球初始状态是静止的,由于地球转动作用于物体上的力仅为引力和表观离心力。正如我们前面讨论的,这两个力的合力为重力,它与局地水平面垂直。现在假设物体受脉冲力作用开始朝东运动,因为现在物体旋转得比地球快,与角速度的平方成正比的物体离心力将增加。设 Ω 为地球角速度的量值, \vec{R} 为从旋转坐标轴指向物体的正矢量, u 为物体相对于地表面的向东速度,那么,

$$\text{总离心力} = \left(\Omega + \frac{u}{R} \right)^2 \vec{R}, \quad (1.21)$$

其中 u/R 为物体相对于地球的角速度(图 1-6), 它是从角速度的定义导出的。假设物体在时间间隔 Δt 内移动距离 Δs , 此间角速度变化 $\Delta\theta$ 等于 $\Delta s/R$, 因此 $\Delta\theta/\Delta t = (\Delta s/\Delta t)/R$, 取 $\Delta t \rightarrow 0$, 我们有 $d\theta/dt = (ds/dt)/R = u/R$.



总的离心力可被写为

$$\left(\Omega + \frac{u}{R} \right)^2 \vec{R} = \Omega^2 \vec{R} + \frac{2\Omega u \vec{R}}{R} + \frac{u^2 \vec{R}}{R^2}, \quad (1.22)$$

右边第一项正是由于地球旋转产生的离心力, 它当然包含在重力中。其他两项代表偏向力, 沿矢量 \vec{R} 方向向外。通过计算比较第二和第三项的大小, 即

图 1-6 由于沿纬圈相对运动产生科氏力分量

$$\frac{2\Omega u \vec{R}/R}{u^2 \vec{R}/R^2} = \frac{2\Omega R}{u} \geq 1.$$

因为 $\Omega R \gg u$, 所以在一级近似内可以忽略掉右边的第三项。第二项叫科氏力, 源于平行于纬圈的相对运动。科氏力可被分为垂向方向和经向(南北向)两个分量。设 ϕ 为纬度, $(F_c)_y$ 和 $(F_c)_z$ 为南北向和垂向科氏力分量, 则有

$$(F_c)_y = -2\Omega u \sin\phi \quad (1.23)$$

和

$$(F_c)_z = 2\Omega u \cos\phi, \quad (1.24)$$

其中 u 为向东方向速度分量。如果流动向东, 则 u 为正, 向西为负。在垂直方向科氏力分量远比重力小, 因而对运动只有微小的影响, 一般这一项可被忽略。从方程 (1.23) 可以看到在北半球物体在水平面内向东运动, 受科氏力作用向南偏转, 而向西运动的物体向北偏转。在每种情况偏转向运动方向的右边(北半球)。我们也可得出平行于经圈作相对运动的科氏力。在这种情况下 x 方向的科氏力为

$$(F_c)_x = 2\Omega v \sin\phi. \quad (1.25)$$

因此, 如果流体微团向南运动, 即 $v < 0$, 则科氏力在北半球向西偏向。一般情况下, 作用于以速度 \vec{V} 运动的物体的科氏力等于

$$(F_c)_x = -2\Omega v \sin\phi; \quad (F_c)_y = -2\Omega u \sin\phi.$$

在海洋中, 我们通常定义 $f = 2\Omega \sin\phi$ 作为科氏参数, 因此

$$(F_c)_x = vf, \quad (1.26)$$

$$(F_c)_y = -uf. \quad (1.27)$$

(c) 压强梯度力

考虑具有体积 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 的流体微元(见图 1-7), 作用于 A 面上的压力为 $-P_A \Delta y \Delta z$; 作用于 B 面上的压力为 $P_B \Delta y \Delta z$; 在 A 面和 B 面上的压力差为