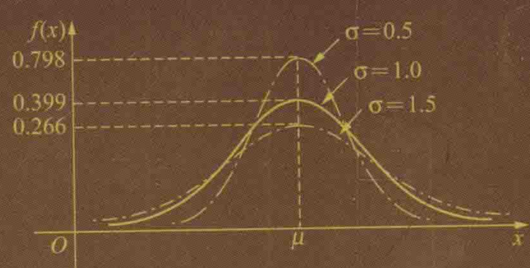
主编 刘坤 陈荣军 钱峰

概率论与数理统计学考指导

GAILVLUN YU SHULI TONGJI XUEKAO ZHIDAO

第二版



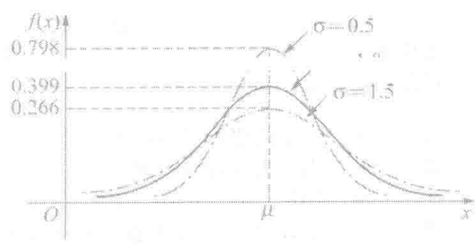
南京大学出版社

◎主编 刘 坤

概率论与数理统计学考指导

GAILVLUN YU SHULI TONGJI XUEKAO ZHIDAO

第二版



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学考指导(第二版) / 刘坤，陈荣军，钱峰主编. — 2 版. — 南京 ：南京大学出版社，2016.6
ISBN 978-7-305-17218-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… ②陈… ③钱… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 140189 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 概率论与数理统计学考指导(第二版)
主　　编 刘　坤　陈荣军　钱　峰
责任编辑 单　宁　　编辑热线 025-83596923
责任校对 张小燕

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京人文印务有限公司
开　　本 787×960　1/16　印张 13.75　字数 203 千
版　　次 2016 年 6 月第 2 版　2016 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-17218-2
定　　价 30.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前　言

概率论与数理统计是理工科、经济管理学科一门重要的基础课，也是工学、经济学、管理学硕士研究生入学考试的一门必考科目．在概率论与数理统计课程的学习过程中，许多初学者深感内容难懂，习题难做．为了满足广大同学课程学习、复习考试及考研复习准备的需要，作者根据多年课程教学与考研辅导讲课的经验，编写了本书．

本书是南京大学出版社出版，刘坤主编的江苏省重点教材《概率论与数理统计》（第三版）的配套教材．每章设计了五方面的内容：

一、本章内容综述；

二、易错概念问题解析；

三、典型问题解析；

四、考研类型真题解析；

五、基础训练题．

其目的是通过以上五个方面的学习和训练，帮助学生消化理解课堂上没有完全理解的内容，正确理解概率论与数理统计课程的基本概念，掌握解题的方法与技巧，提高综合分析问题与解决问题的能力．

全书由刘坤、陈荣军、钱峰编写，由刘坤编写大纲与统稿．

由于水平有限，书中疏漏与不妥之处，恳请广大读者批评指正．

编　者

2016 年 5 月

目 录

第 1 章　随机事件与概率

§1.1　本章内容综述

1.1.1　随机事件的基本概念

1. 随机试验

满足以下条件的试验称为随机试验：

(1) 试验可在相同条件下重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 进行一次试验前无法确定出现哪种结果.

2. 样本空间与样本点

对于随机试验 E 的所有可能结果 e 所构成的集合 $\{e\}$,称为随机试验 E 的样本空间,记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每一个结果 e,称为样本点.

3. 随机事件

(1) 事件　一般地,我们称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件,简称事件. 常用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 当且仅当事件中的一个样本点出现时,就称这一事件发生.

(2) 基本事件　只含一个样本点的事件叫基本事件.

(3) 必然事件　样本空间 S 包含所有的样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件,记为 S.

(4) 不可能事件　空集不包含任何样本点,它也是样本空间 S 的子集,它在每次试验中都不发生,称为不可能事件,记为 $\varnothing$.

4. 事件的关系和运算

(1) 包含关系　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 B 包含 A,或称 A 包含于 B,记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

(2) 相等关系　若 $B\supset A$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(3) 事件的和(并)　A 与 B 至少有一个发生,称为 A 与 B 的和,记为 $A+B$ 或 $A\cup B$.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

(4) 事件的积(交)　A 与 B 同时发生,称为 A 与 B 的积,记为 AB 或 $A\cap B$.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件;称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

(5) 事件的差　B 发生而 A 不发生,称为 B 与 A 的差,记为 $B-A$.

(6) 互不相容事件(互斥事件)　若 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容(互斥).

(7) 对立事件(互逆事件)　若 A 与 B 互斥,且 A 与 B 的和为 S(样本空间),即 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=S$,则称 A 与 B 是相互对立(互逆)的. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,显然有 $\overline{A}=S-A$.

(8) 事件的运算律　设 A,B,C 为事件,事件的关系与运算满足下列运算律:

① $A\cup\varnothing=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A-\varnothing=A$,$A\cup A=A$,$A\cap A=A$.

② 交换律:$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

③ 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

④ 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

⑤ 差化积:$B-A=B\cap\overline{A}$.

⑥ 吸收律:若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$,$A\cap B=A$.

⑦ 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$（德摩根定律）.

一般地，对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

同时，可以得到：$B-A=B-AB$.

1.1.2　概率及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性　对于任一事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性　对于必然事件 S，有 $P(S)=1$.

(3) 可列可加性　设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,3,\cdots$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

概率 $P(A)$ 是在一次试验中 A 事件发生的可能性大小的一个度量.

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$，$P(S)=1$.

(2)（有限可加性）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是有限个两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) 对于任意事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且 $P(B)\geqslant P(A)$.

(5) 设 A,B 是任意两个事件，则有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

(6) 对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

1.1.3　等可能概型

1. 古典概型及概率计算

具备以下两个条件的试验称为古典概型：

(1) 试验的样本空间仅由有限个样本点组成.

(2) 试验中每个基本事件的发生是等可能的.

古典概型下事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{样本空间所含的基本事件数}}=\frac{m}{n}.$$

2. 几何概型及概率计算

如果试验 E 的可能结果可以几何地表示为某区域 S 中的一个点(区域可以是一维的、二维的、三维的……),并且点落在 S 中的某区域 A 的概率与 A 的测度(长度、面积、体积……)成正比,而与 A 的位置无关,则随机点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{S\text{ 的测度}}=\frac{M(A)}{M(S)}.$$

1.1.4 概率的加法公式

1. 互不相容事件的加法公式

(1) 两个互不相容事件的和的概率,等于它们概率的和. 即若 A 与 B 互不相容,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

2. 任意事件的加法公式

(1) 对于任意事件 A 与 B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(2) 对于任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

(3) 对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+\\&\quad(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

1.1.5 条件概率

1. 条件概率的概念

若 $P(A)>0$,则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在 A 发生的条件下,B 发生的概率;或 $P(B)>0$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在 B 发生的条件下,A 发生的概率.

不难验证,条件概率 $P(\cdot|A)$符合概率定义中的三条公理,即

(1) 非负性 对任意事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$.

(2) 规范性 $P(S|A)=1$.

(3) 可列可加性 若可列个事件 $B_1,B_2,\cdots$两两互不相容,即当 $i\neq j$ 时,$B_iB_j=\varnothing,i,j=1,2,3,\cdots$,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

2. 条件概率的性质

(1) 对于任意事件 A_1,A_2,有

$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

(2) $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$.

(3) $P(\varnothing|B)=0$.

(4) $P(A)=P(A|S)$.

1.1.6 概率的乘法公式

1. 两个事件 A,B 的乘法公式

两个事件 A,B 乘积的概率,等于其中一个事件的概率与另一个事件在前一事件已经发生下的条件概率的乘积,即

$$P(AB)=P(A)P(B|A),P(A)>0$$

或

$$P(AB)=P(B)P(A|B),P(B)>0.$$

2. 三个事件 A,B,C 的乘法公式

设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$,则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

3. n 个事件的乘法公式

设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$ 且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

1.1.7 全概率公式

1. 样本空间的划分

设 S 为试验 E 的样本空间,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 E 的一组事件.若

(1) $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n.$

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S,$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分或完备事件组.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分,那么,对每次试验,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中必有一个且仅有一个发生.

2. 全概率公式

设 S 为试验 E 的样本空间,B 为 E 的事件,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

称为全概率公式.

1.1.8 贝叶斯(Bayes)公式

设 S 为试验 E 的样本空间,B 为 E 的事件,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B)>0,P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)},i=1,2,\cdots,n$$

称为贝叶斯公式.

1.1.9　事件的独立性

1. 两个事件的独立性

设 A,B 是两事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立，简称 A,B 独立.

2. 三个事件的独立性

设 A,B,C 是三个事件，如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

3. n 个事件的独立性

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 是 n 个事件，如果对于其中任意 2 个，任意 3 个，……，任意 n 个事件的积的概率，都等于各个事件概率之积，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

4. 相互独立的相关定理

(1) 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 各对事件也相互独立.

(2) 任意事件 A 与 S，$\varnothing$ 是相互独立的.

(3) 若事件 A 与 B 相互独立，则加法公式为

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

(4) 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也相互独立.

(5) 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

(6) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

(7) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,有 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$.

1.1.10 伯努利概型

1. n 重伯努利概型

如果试验 E 的可能结果只有两个:A 与 $\overline{A}$,且记 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p=q$,称之为伯努利(Bernoulli)试验.若将试验 E 重复进行 n 次,且每次试验结果互不影响(独立的),则称为 n 重伯努利试验,相应的数学模型称为 n 重伯努利概型.

2. 二项概率公式

设事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$,不发生的概率为 $q(q=1-p)$,则在 n 重伯努利试验中,事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

§1.2 易错概念问题解析

1. 什么是统计规律性?什么是随机现象?

答 在一定条件下发生的现象,其结果是多样的.而在发生前不能预知确切结果的不确定现象,其结果在大量重复试验中却能呈现出一种规律性.由于这种规律是根据统计数据分析出来的,因而称为统计规律性.

在一次试验或观察中结果不能预先确定,而在大量重复试验中结果具有统计规律性的现象称为随机现象.随机现象是概率论与数理统计的主要研究对象.

2. 如何理解互逆事件与互斥事件?

答 如果两个事件 A 与 B 必有一个发生,且至多有一个发生,则 A,B 为互逆事件,即 $B=\overline{A}$.

如果两个事件 A 与 B 不能同时发生,则 A,B 为互斥事件.

如考试及格与不及格是互逆也是互斥的,但考试 70 分和 80 分互斥却不互逆.

区别互逆与互斥的关键是，当样本空间只有两个事件时，两事件才可能互逆. 而互斥适用于多个事件的情形. 互斥事件的特征是，在一次试验中两者可以都不发生，而互逆事件必发生一个且至多发生一个.

3. 如何用已知事件来表达与其有关的其他事件?

答　首先要了解所讨论试验中事件的构成，所需表达事件与已知事件的关系，然后运用这些关系与运算法则将事件表达出来.

例如，设 S 为事件 $0\leqslant x\leqslant 5$，A 为事件 $1\leqslant x\leqslant 2$，B 为事件 $0\leqslant x\leqslant 2$，则：

$0\leqslant x\leqslant 2$ 为事件 B 或 $A\cup B$；

$1\leqslant x\leqslant 2$ 为事件 A 或 BA；

$2<x\leqslant 5$ 为事件 $S-B$ 或$\overline{B}$；

$0\leqslant x<1$ 为 $B-A$.

4. 区别确定性现象、样本空间与必然事件.

答　在一定条件下一定发生的现象，称为确定性现象. 如，在标准状态下水在100 ℃时就沸腾. 样本空间是随机试验 E 的所有可能结果的集合，而必然事件是指随机试验中一定会出现的结果. 虽然在一次试验中只有样本空间的一个元素发生，但当把样本空间视为一个整体时，我们说它在每次试验中都发生了. 因此，可以说样本空间是必然事件. 必然事件属于随机现象的范畴，它很明显不同于确定性现象，不要因为在每一次试验中均发生就将它与确定性现象混淆.

5. 在什么情况下，随机事件 A 的频率可以作为它的概率的近似值?

答　随机事件 A 的频率 $f_n(A)$反映事件 A 在多次重复试验中发生的频繁程度. 当 n 增大时，频率在概率 $P(A)$附近摆动. 因此，每一个从独立重复试验中测得的频率，都可以作为概率 $P(A)$的近似值. 而且，一般 n 越大，近似程度越好.

事实上，当 n 增大时，频率大量集中于包含 $P(A)$的一个小区间. 任选区间中一值作为概率的近似值，称为统计概率. 在解题时，当 n 较大时，可取统计概率为 $P(A)\approx\frac{n_A}{n}$.

6. 概率是否可以看做频率的极限?

答　这样理解是不恰当的.因为如上题所述,当 $n\to\infty$ 时,$f_n(A)$ 在 $P(A)$ 附近摆动,与高等数学中极限的 $\varepsilon-N$ 概念是不同的.由于概率是随机现象的可能性的赋值,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在偶然的因素,可能找不到 $N(\varepsilon)$,从而得不到 $|f_n(A)-P(A)|<\varepsilon$.

7. 怎样理解古典概型的等可能假设?

答　等可能性是古典概型的两大假设之一,有了这两个假设,给直接计算概率带来了很大的方便.但在事实上,判断所讨论问题是否符合等可能假设,一般不是通过实际验证,而往往是根据人们长期形成的"对称性经验"作出的.例如,骰子是正六面形,当质量均匀分布时,投掷一次,每面朝上的可能性都相等;装在袋中的小球,颜色可以不同,只要大小和形状相同,摸出其中任一个的可能性都相等.因此,等可能假设不是人为的,而是人们根据对事物的认识——对称性特征而确认的.

8. 概率为 0 的事件是否为不可能事件? 概率为 1 的事件是否为必然事件?

答　有关概念:不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$,但其逆不真;同样,必然事件 Ω 的概率 $P(\Omega)=1$,但其逆也不真.

反例:

例 1　设 A 表示事件:向边长为 a 的正方形区域 G 任意投掷一点,此点落在区域 g(g 为该正方形中的一条对角线),则

$$P(A)=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\frac{0}{a^2}=0,$$

但 A 却并非为不可能事件.

例 2　以 B 表示事件:向边长为 a 的正方形区域 G 任意投掷一点,此点落在区域 g(g 为该正方形去掉一条对角线后所剩下的区域),则

$$P(B)=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\frac{a^2}{a^2}=1,$$

但 B 并非为必然事件.

9. 在求解古典概率问题时样本空间的选取不是唯一的.

答　例　同时掷两颗骰子,掷一次,求出现的点数和为偶数 A 的概率.

解法 1　取样本空间 $S=\{(奇,奇),(奇,偶),(偶,奇),(偶,偶)\}$,则

$$A=\{(奇,奇),(偶,偶)\},P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

解法 2　取样本空间 $S=\{(点数和为奇),(点数和为偶)\}$,则

$$A=\{(点数和为偶)\},P(A)=\frac{1}{2}.$$

10. 一次取 n 个球与 n 个球分 $m(m\leqslant n)$ 次取(不放回抽样)概率是否相等?

答　一次取 n 个球与 n 个球分 $m(m\leqslant n)$ 次取(不放回抽样),这两种取球方式效果一致,即概率是相等的.

例如,袋中有 3 只白球,5 只黑球,分别用以下三种不同方式取出 3 球,求所取 3 球都是黑球的概率.

(1) 从袋子中一次取出 3 球;

(2) 做不放回抽样,从袋子中取球 3 次,每次 1 只;

(3) 做不放回抽样,先从袋子中取出 2 球,再从袋子中取出 1 球.

解　设事件 A 为“取到的 3 只球都是白球”,则

(1) $P(A)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{28}$;

(2) $P(A)=\dfrac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_8^1C_7^1C_6^1}=\dfrac{5}{28}$;

(3) $P(A)=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^2C_6^1}=\dfrac{5}{28}$.

11. 抽签的结果与抽签的先后次序无关.

答　例　袋子中有 m 只黑球,n 只白球,现将球一个个依次摸出,求第 k 次摸出黑球的概率.

解　设 A 为“第 k 次摸出黑球”. 给 $m+n$ 个球编号,将其依次排在 $m+n$ 个位置上,样本空间基本事件总数为 $(m+n)!$,事件 A 基本事件数为 $m(m+n-1)!$,故

$$P(A)=\frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{m}{m+n}.$$