普通高等教育“十二五”规划教材

高等代数与解析几何

张海燕 华秀英 巩英海 编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等代数与解析几何

张海燕　华秀英　巩英海　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书首先介绍了学习高等代数与解析几何课程所需的一些预备知识，如集合、映射、数域及数学归纳法等.主要内容有空间解析几何、数域上的多项式、行列式、矩阵、向量与线性方程组、线性空间、线性变换及相似矩阵、内积空间、双线性函数与二次型及多项式矩阵等，共10章.每节后配有习题，每章后配有总习题，便于学生对本章节知识的巩固和提高.为使初学者易于掌握内容，作者力求做到层次清晰、结构严谨、深入浅出、循序渐进.

本书可作为普通高等学校数学类各专业及数学相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何/张海燕，华秀英，巩英海编.—北京：科学出版社，2016.6

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-048626-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②华… ③巩… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O15 ②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第126687号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴
责任印制：白 洋 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年6月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016年6月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：433 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

高等代数与解析几何是数学类各专业的一门主要基础课程.随着科学技术的迅速发展,代数学的理论和方法已成为现代科技领域必不可少的工具.诸如数值分析、优化理论、微分方程、控制理论、网络等学科领域都与代数理论有着密切的联系.学习和掌握代数学的基本理论和方法,对于数学类各专业的学生来说是至关重要的.本书是根据普通高等学校数学类各专业高等代数与解析几何课程教学的基本要求,结合编者多年来在教学实践中的心得体会编写而成.主要特点如下:

第一,注重基础理论的渗透.多数院校拥有数学专业硕士点,为本校的数学研究做力量储备是数学系教学的并非主流却不可忽视的一个宗旨.因此,不能完全放弃代数系统理论.同时,这也为有这方面意向的学生快速深入内容提供了通道,为学生未来发展创造更大的空间.

第二,体现时代要求,注重应用背景.一些院校数学系除了基础数学专业,还有信息与计算科学、统计学等专业.因此该课程教学应体现宽口径特点.在注重理论渗透的同时,充分考虑专业的特点,在部分内容、例题习题的处理上注重应用背景.多年的教学实践证明,严谨完整的知识理论教学不易引起学生浓厚的兴趣.只有注重了应用背景,才能充分调动学生的积极性,才能将教学水平提到新的高度.

第三,注重数学专业本科生培养的系统性.该课程的后继课程有计算机图形学、微分方程、矩阵理论等.本书在编写过程中,尽量考虑到后继课程的需要,适当编排某些习题甚至是部分理论内容以便增强学生学习的系统性.

本书首先介绍了学习这门课程所需的一些预备知识,如集合、映射、数域及数学归纳法等.正文部分主要内容有空间解析几何、数域上的多项式、行列式、矩阵、向量与线性方程组、线性空间、线性变换及相似矩阵、内积空间、双线性函数与二次型及多项式矩阵等.每节后配有习题,每章后配有总习题,便于学生对本章节知识的巩固和提高.另外,作者力争编排上的每一节,恰好是两个学时的讲授内容.为使初学者易于掌握内容,作者力求做到层次清晰、结构严谨、深入浅出、循序渐进等特点.

全书共 10 章,全书由张海燕主持编写并负责统稿工作.第三章~第五章主要由华秀英编写,第八章~第十章主要由巩英海编写,其余章节由张海燕编写.在本书的编写过程中同时得到了哈尔滨理工大学教务处、应用科学学院以及应用数学系的大力支持,作者在此深表感谢.

作者诚挚地感谢杨新松教授,他为本书编写提供了宝贵的资料,并详细地审阅

了书稿，提出了不少有益的修改建议.

本书可作为普通高等学校数学类各专业及数学相关专业的教材或教学参考书. 讲完本书需 180～200 学时.

由于编者水平有限，书中的错误和不妥之处在所难免，殷切地希望广大读者批评指正、不吝赐教.

编　者

2016 年 1 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第零章　预 备 知 识

本章所列的知识中有一部分，如复数、集合等概念在中学阶段都曾经提到. 还有一部分，如第二数学归纳法、数域等则是独立于各个章节的知识. 本章中的证明方法(如第二数学归纳法等)的应用不仅限于高等代数. 所有内容都是学习高等代数与解析几何课程必需基础.

第一节　集合与映射

集合是数学中的一个基本概念. 在不同的教材、不同阶段的学习中，集合的概念会逐渐完善. 目前可以这样认为：所谓**集合**(简称为**集**)就是具有某种特定属性的事物的总体，组成这个集合的每个事物都称为该集合的**元素**(简称**元**). 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$来表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$来表示元素，并分别用 $a\in A$，$b\notin A$表示元素 a 在集合 A 中，元素 b 不在集合 A 中.

集合的确定实际上就是确定其中的所有元素. 一般用两种方法表示集合：列举法和描述法. 列举法是把集合中的元素一一列出. 例如，本班的学生组成一个集合就可以使用列举法表示. 描述法是把集合中元素的共同属性准确地描述出来. 例如，$\{x\,|\,x>1,x^2-5=0\}$是描述法，$\{\sqrt{5}\}$是列举法，它们表示的是同一个单元素集合. 刚刚提到的是只含有限多元素的集合，这样的集合称为**有限集**，不是有限集的集合称为**无限集**. 没有元素的集合称为**空集**.

在数学中，自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集、空集通常用对应的固定符号$\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\varnothing$来表示. 有时，用数集在右上角加一个＋的方法表示该集合中的所有正数组成的集合，如 $\mathbb{Z}^+$，$\mathbb{R}^+$表示正整数集、正实数集等. 也有时用右上角加一个 $*$ 的方法表示该集合中去掉元素 0 以后的集合，如$\mathbb{C}^*$表示非零复数集等.

如果集合 A 的每个元素都在集合 B 中，则称集合 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$. 我们都知道，$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. 在数学中规定，对于任何集合 A 均有$\varnothing\subset A$，也就是说，空集是任何集合的子集. 如果两个集合 M,G 同时满足 $M\subset G,G\subset M$，则称这两个集合相等，记为 $M=G$.

集合的基本运算有三种：交、并、差.

设 A,B 是两个集合. 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称为**交**)，记为 $A\cap B$. 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称为**并**)，记为 $A\cup B$. 由所有属于 A 而且不属于 B 的元素组

成的集合称为 A 与 B 的**差集**(简称为**差**),记为 $A\backslash B$. 请注意,差集并不要求 B 一定是 A 的子集,例如,本校女生集合减去本班学生集合结果是本校非本班女生集合.

如果在研究某一问题时,存在一个集合 Σ(通常称为全集),使得所讨论的所有集合都是它的子集. 那么,全集 Σ 与某个集合 M 的差也称为 M 在 Σ 中的补集或余集,记为 $\overline{M}$. 例如,无理数集可以记为 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 或者 $\overline{\mathbb{Q}}$.

集合的交、并、差满足以下算律.

定理 0.1.1 设 A,B,C 是三个集合,那么有

(1) **交换律** $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$;

(2) **结合律** $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(3) **分配律** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) **对偶律** $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

(5) **吸收律** $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$.

证明 任取 $x\in A\cap B$,则有 $x\in A, x\in B$. 也就是说 $x\in B, x\in A$,因此 $x\in B\cap A$. 可见,$A\cap B\subset B\cap A$. 同理又有 $B\cap A\subset A\cap B$. 因此可得 $A\cap B=B\cap A$.

其他的证明留给读者. 完成这些证明对于熟悉集合语言有很大的帮助.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 m 个集合,称集合 $A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)\mid x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,m\}$ 为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的积集合(笛卡儿积),记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_m$. 积集合中的元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 称为一个有序 m 元组或 m 元有序组. 特别地,当 $A_1=A_2=\cdots=A_m=A$ 时,笛卡儿积也记为 A^m. 例如,$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ 表示直角坐标平面上全体点的集合.

研究集合与集合之间关系的最有利工具就是映射. 它是中学函数概念的推广.

设 D,M 是两个集合,σ 是一个法则,通过法则 σ,对于集合 D 中的每个元素 a 都有 M 中唯一确定的元素 a^* 与之对应,那么,就称 σ 是集合 D 到集合 M 的一个**映射**. 记为

$$\sigma: D\rightarrow M, \quad a\mapsto a^* \quad (\text{或者 } \sigma(a)=a^*).$$

此时也称 a^* 为元素 a 在映射 σ 下的**像**,a 称为 a^* 在映射 σ 下的**原像**. 下面是几个例子.

例 0.1.2 对于集合 $\mathbb{Z}$,定义

$$\sigma(a)=2a, \quad a\in\mathbb{Z},$$

那么 σ 就是一个 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的映射.

例 0.1.3 对于笛卡儿积 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$,定义

$$\sigma(x,y)=x,$$

这是一个 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射.

例 0.1.4 在$\mathbb{R}$上定义

$$\sigma(x)=\begin{cases}0, & x\notin\mathbb{Q},\\1, & x\in\mathbb{Q},\end{cases}$$

这就是一个$\mathbb{R}$到$\mathbb{Q}$的映射.

例 0.1.5 设$a\in M$是一个固定的元素,D是一个非空集合. 定义

$$\sigma(x)=a,\quad x\in D,$$

这是一个D到M的映射,称为**常映射**.

例 0.1.6 设D是一个非空集合. 定义

$$\sigma(x)=x,\quad x\in D,$$

这是一个D到D的映射,称为**恒等映射**(或称**单位映射**). 记为1_D. 在不至于引起混淆的情况下也可以简记为1或id,有时也记为ε.

例 0.1.7 设D是本校在籍学生集合,定义

$$\sigma(x)=\begin{cases}\text{士}, & x\text{ 为男性},\\\text{氏}, & x\text{ 为女性},\end{cases}$$

这是一个从D到汉字集合的映射.

例 0.1.8 设D是本校在籍学生集合,定义

$$\sigma(x)=\begin{cases}\text{猛}, & x\text{ 为高个子},\\\text{萌}, & x\text{ 为矮个子},\end{cases}$$

这就不是一个从D到汉字集合的映射. 因为对于每个元素,无法断定他是高还是矮,所以也无法确定唯一的元素与之对应.

假设σ是一个映射,如果不同元素的像一定不同,那么就称σ是**单射**. 证明一个映射是单射的方法就是证明不同元素的像不同,或者证明像相同的元素彼此相等. 例 0.1.2 和例 0.1.6 都是单射.

假设σ是集合D到集合M的一个映射,则称

$$\sigma(D)=\{x\in M\mid\text{存在 }a\in D,\text{使得 }\sigma(a)=x\}$$

为σ的像. 可以这样理解,所谓映射的像就是所有元素像所组成的集合. 请注意映射的像和元素在映射下的像的区别. 显然$\sigma(D)\subset M$. 如果$\sigma(D)=M$,则称σ是**满射**. 要证明一个映射是满射,就是要证明每个元素都有原像.

如果一个映射既是单射,又是满射,那么就称其为**双射**. 对于有限集而言,两个集合存在双射的充要条件是它们所含元素个数相同. 对于无限集合情况就不一样了.

最后来介绍映射的乘积运算.

如果τ,σ均为集合D到集合M的映射,而且对于任意的$x\in D$,均有$\sigma(x)=\tau(x)$,那么就称这两个映射相等. 记为$\sigma=\tau$. 请注意,存在元素使得此元素的像相同,与映射相等是有区别的.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

如果 σ 为集合 D 到集合 M 的映射，τ 为 M 到 N 映射，则称映射 $(\tau\sigma)(x)=\tau(\sigma(x))$ 为 τ,σ 的**积**. 这是中学复合函数概念的推广. 对于映射的乘积，有如下定理.

定理 0.1.9 设 σ 为集合 D 到集合 M 的映射，τ 为 M 到 N 映射，ψ 是 N 到 A 的映射，那么

(1) $1_N\tau=\tau 1_M=\tau$；

(2) $\psi(\tau\sigma)=(\psi\tau)\sigma$.

证明 (1) 对于任意的 $x\in M$，必有

$$(1_N\tau)(x)=1_N(\tau(x))=\tau(x);\quad (\tau 1_M)(x)=\tau(1_M(x))=\tau(x).$$

因此 $1_N\tau=\tau 1_M=\tau$.

(2) 对于任意的 $a\in D$，有

$$(\psi(\tau\sigma))(a)=\psi((\tau\sigma)(a))=\psi(\tau(\sigma(a)));\quad ((\psi\tau)\sigma)(a)=(\psi\tau)(\sigma(a))=\psi(\tau(\sigma(a))).$$

因此 $\psi(\tau\sigma)=(\psi\tau)\sigma$.

如果 σ 为集合 D 到集合 D 的映射，则称 σ 是集合 D 的一个**变换**，类似地也有单射变换、满射变换、双射变换.

习 题 0-1

1. 证明定理 0.1.1.

2. 分析生活中有哪些集合名词并不是真正的集合.

3. 举出两个单射不是满射的例子.

4. 举出两个满射不是单射的例子.

5. 举出两个非单位映射的双射例子.

6. 定义两个 $\mathbb{Z}$ 上的映射 τ,σ 使得 $\tau\sigma=1_{\mathbb{Z}}\neq\sigma\tau$.

7. 设 σ 为集合 D 到集合 M 的双射. 任取 M 中元素 a 由满射定义知必有 $b\in D$，使得 $\sigma(b)=a$，再由单射定义知，对于每个 a 必有唯一的 $b\in D$ 与之对应. 定义

$$\sigma^{-1}(a)=b\Leftrightarrow\sigma(b)=a,$$

这个映射称为双射 σ 的逆映射. 求证

(1) σ^{-1} 也是双射；

(2) $\sigma\sigma^{-1}=1_M,\sigma^{-1}\sigma=1_D$.

8*. 设有限集合 D 与 M 的笛卡儿积为 N. 如果 D 与 M 的元素个数分别是 m,n，那么 N 的元素个数应为多少？

9*. 设 D 是集合，则 D 的所有子集形成的集合称为 D 的**幂集**. 记为 2^D. 如果 D 的元素个数是 m，那么 2^D 中元素个数是多少？

10*. 设集合 D 与 M 的笛卡儿积为 N，σ 为集合 D 到集合 M 的映射. 求证 $\{(x,y)\mid\sigma(x)=y\}$ 是 N 的子集.

11*. 设有限集合 D 与 M 的笛卡儿积为 N. 如果 D 与 M 的元素个数分别是 m,n，那么集合 D 到集合 M 最多能有多少个映射？

第二节　数学归纳法

中学的时候已经学习过第一数学归纳法了.

定理 0.2.1　设 $P(m)$ 是关于自然数的命题. 如果 $P(k_0)$ 正确，并且在假设 $P(k)$ 正确的条件下必能推导出 $P(k+1)$ 正确，那么，对于所有不小于 k_0 的自然数 m，$P(m)$ 均正确.

定理 0.2.1 的证明基础是自然数的完全归纳原理，读者可以在数论入门教材中看到. 这里暂时放弃证明，来看定理的应用.

例 0.2.2　求证：$1+4+9+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明　当 $n=1$ 时，左边和右边相等，命题成立.

假设当 $n=k$ 时命题成立，也就是说 $1+4+9+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$，则当$n=k+1$时左边为 $1+4+9+\cdots+k^2+(k+1)^2$. 利用假设可得

$$\begin{aligned}
&1+4+9+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
=&\frac{1}{6}[k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2]\\
=&\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6)\\
=&\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\\
=&\frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1).
\end{aligned}$$

命题成立.

综上可知，原命题正确.

在刚刚的命题陈述中遇到了连加的式子，我们来介绍一个连加的简记符号，即 $\sum$.

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是 s 个数，那么可以简记 $a_1+a_2+\cdots+a_s=\sum\limits_{m=1}^{s}a_m$. 显然，$\sum\limits_{k=1}^{s}a_k=\sum\limits_{m=1}^{s}a_m$，$\sum\limits_{m=1}^{s}a_m=\sum\limits_{m=0}^{s-1}a_{s-m}$. 连加号的记录方法并不是一成不变的，使用时只要表达准确可以灵活选择表示形式，如 $\sum\limits_{m\leqslant k\leqslant n}a_k=\sum\limits_{s=m}^{n}a_s$.

假设有 m 行，n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{matrix}$$

则第一行，第二行，…，第 m 行的和分别为 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}$，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j}$，…，$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{m,j}$. 于是数表中所有数的和就是 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{2,j}+\cdots+\sum\limits_{j=1}^{n} a_{m,j}=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$. 如果先对每一列求和，然后再把每列的和加起来，那么可以得到数表中所有数字的和为 $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$，因此可得 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$.

例 0.2.3 计算 $\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{k(k+1)}$.

解 $\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{m+1}$.

与连加号类似，有一个连乘简记符号，就是 $\prod$.

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是 s 个数，那么可以简记 $a_1a_2\cdots a_s=\prod\limits_{m=1}^{s} a_m$. 显然，$\prod\limits_{k=1}^{s} a_k=\prod\limits_{m=1}^{s} a_m$. 连乘号的记录方法也不是一成不变的，使用时只要表达准确可以灵活选择表示形式，例如，$\prod\limits_{m\leqslant k\leqslant n} a_k=\prod\limits_{s=m}^{n} a_s$.

例 0.2.4 设有 s 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_s$，试用连乘号表示所有不同数字之差之积.

解 如果考虑所有减去 a_1 的因子，则有 $\prod\limits_{i=2}^{s}(a_i-a_1)$，再考虑一般的情况，$\prod\limits_{i=t+1}^{s}(a_i-a_t)$. 因此，所求为 $\left[\prod\limits_{t=1}^{s}\prod\limits_{i=t+1}^{s}(a_i-a_t)\right]^2$. 通常写为 $\left[\prod\limits_{1\leqslant t<i\leqslant s}(a_i-a_t)\right]^2$.

下面来看第二数学归纳法.

定理 0.2.5 设 $P(m)$ 是关于自然数的命题. 如果 $P(k_0)$ 正确，并且在"假设对于所有满足 $k_0\leqslant t<k$ 的自然数 t，$P(t)$ 正确"的条件下必能推导出 $P(k)$ 正确，那么，对于所有不小于 k_0 的自然数 m，$P(m)$ 均正确.

定理 0.2.5 的证明基础与第一数学归纳法是不同的，感兴趣的读者可以查找相关资料. 同第一数学归纳法一样，我们略去证明来看应用.

例 0.2.6 已知 a,b 是已知实数，$a^2+4b>0$. 求证满足条件

$$a_1=a,\quad a_2=a^2+b,\quad a_m=aa_{m-1}+ba_{m-2},\quad m\geqslant 3$$

的数列$\{a_n\}$通项为

$$a_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

其中,α,β是方程$x^2-ax-b=0$的根.

证明 由于$a^2+4b>0$,所以方程$x^2-ax-b=0$的根α,β是两个不相等的实数.直接验算有

$$a_1=a=\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta};$$

$$a_2=a^2+b=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}.$$

假设对于不大于k的自然数t,均有$a_t=\dfrac{\alpha^{t+1}-\beta^{t+1}}{\alpha-\beta}$,则

$$\begin{aligned}a_k&=aa_{k-1}+ba_{k-2}\\&=a\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}+b\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\\&=-(\alpha+\beta)\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}+\alpha\beta\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}.\end{aligned}$$

公式成立.于是公式对于所有正整数成立.

通过例题可以看出,使用第二数学归纳法时,一般验算至少两项后再作假设.另外,例0.2.6可以作为定理使用.

习 题 0-2

1. 用数学归纳法证明下列等式.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{n}aq^{k-1}=\dfrac{a-aq^{n+1}}{1-q}$; (3) $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)=n^2$.

2. 计算$\sum\limits_{\substack{i+j=k\\0\leqslant i,j\leqslant n}}a_ib_j-2\sum\limits_{s=0}^{n}a_sb_{k-s}+\sum\limits_{m=0}^{n}a_{k-m}b_m$.

3. 假设有m行,n列的数表

$$\begin{matrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,n}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m,1}&a_{m,2}&\cdots&a_{m,n}\end{matrix}$$

试用连乘号表示主对角线(含主对角线)以上各元素的乘积.

4. 满足$a_1=1,a_2=2,a_m=a_{m-1}+a_{m-2},m\geqslant3$的数列称为斐波那契数列.求证斐波那契数

列的通项为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

5. 求证斐波那契数列满足 $\sum\limits_{k=3}^{m}a_{k-2}=a_{m+2}-2$.

6. 记组合数 $C_n^r=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$. 求证

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i=2^n$；　　(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}C_{m+i}^i=C_{m+n+1}^n$.

7. 证明有限集的子集也是有限集.

第三节　数　　域

中学已经学习了加、减、乘、除四则运算，也了解到有些数集中某一运算的结果未必仍在该集合内. 例如，在自然数集中减法的结果，在整数中除法的结果等. 为了描述这一现象，我们引入一个术语. 值得强调的是本节中提到的数集都是复数集的子集.

设 P 是一个数集，$*$ 是一个运算. 如果在 P 进行的 $*$ 运算(不符合运算定义的除外)结果都在 P 中，那么就称数集对于运算 $*$ **封闭**. 例如，自然数集对加法运算封闭、整数集对乘法运算封闭等. 当然，自然数集对减法运算不封闭，整数集对除法运算也不封闭. 有理数集对于四则运算都封闭. 这里要再次强调，虽然 0 不能作分母，但这是除法定义以外的，因此不影响封闭.

例 0.3.1　令 $P=\mathbb{Q}^*$，求证 P 对乘法、除法封闭，对加法和减法不封闭.

证明　任取非零有理数 $a,b\in\mathbb{Q}^*$，显然 $ab,a\div b$ 仍在 $\mathbb{Q}^*$ 中. 因此 $\mathbb{Q}^*$ 对乘法、除法封闭. 取 $\mathbb{Q}^*$ 中的 3，则 $3-3=0$ 不在 $\mathbb{Q}^*$ 中，可见 $\mathbb{Q}^*$ 对于减法不封闭. 同理可证它对加法也不封闭.

一般地，要证明不封闭，往往采用寻找特殊例子的方法.

例 0.3.2　集合 $\{0\}$ 对于四则运算都封闭.

请注意，在这个例子中，除法实际上是不能进行的. 这不影响运算的封闭. 除了这个例子，还有对四则运算都封闭的例子. 我们把这样的数集称为数域.

所谓**数域**，是指对于四则运算都封闭的非单元数集. 请注意，例 0.3.2 中的集合不是数域，因为它是单元集合. 容易验证，$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是数域，$\mathbb{Z},\mathbb{N}$ 不是数域.

例 0.3.3　求证对于四则运算封闭的数集 P 是数域的充要条件是 P 中至少有一个非零数.

证明　如果 P 是一个数域，则 P 中至少含有两个不同的数，因此 P 中至少有一个非零数.

反之，假设 P 中至少有一个非零数. 记此非零数为 a，则由 P 对减法封闭可得

$0=a-a$ 在 P 中. 因此 P 不是单元集,可见 P 是一个数域.

数域并非只有以上提到的三个.

例 0.3.4　令 $P=\{a+b\sqrt{11}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$,求证 P 是数域.

证明　取 $a=0,b=0$ 可得 $0\in P$. 同理,$1\in P$. 可见 P 不是单元集.

任取 P 中两个数字 $a+b\sqrt{11}$,$c+d\sqrt{11}$. 由于有理数域对于四则运算封闭,因此

$$(a+b\sqrt{11})\pm(c+d\sqrt{11})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{11}\in P;$$

$$(a+b\sqrt{11})(c+d\sqrt{11})=(ac+11bd)+(cb+ad)\sqrt{11}\in P.$$

当 $c+d\sqrt{11}\neq 0$ 时,显然有 $c-d\sqrt{11}\neq 0$ $\left(否则\sqrt{11}=\dfrac{c}{d}\in\mathbb{Q}矛盾\right)$. 因此,

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{11})\div(c+d\sqrt{11})&=\frac{a+b\sqrt{11}}{c+d\sqrt{11}}\\&=\frac{(c-d\sqrt{11})(a+b\sqrt{11})}{(c-d\sqrt{11})(c+d\sqrt{11})}\\&=\frac{(ac-11bd)}{c^2-11d^2}+\frac{(cb-ad)}{c^2-11d^2}\sqrt{11}\in P.\end{aligned}$$

综上可知 P 是数域.

请注意,在例 0.3.4 中,如果把有理数域换成整数集,或者将开平方运算换成开立方,则 P 不再是数域. 这是因为 $(3+0\sqrt{11})\div(5+0\sqrt{11})$,或者 $(0+\sqrt[3]{11})(0+2\sqrt[3]{11})=2\sqrt[3]{121}$ 不在 P 中. 而 $P=\{a+b\sqrt[3]{11}+c\sqrt[3]{121}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ 仍然是数域. 这类练习留作习题.

例 0.3.5　设 P 是一个数域. 求证 $\mathbb{Q}\subset P$.

证明　由例 0.3.3 可知 P 中至少有一个非零数 a. 再由数域 P 对减法、除法运算封闭知

$$0=a-a\in P,\quad 1=a\div a\in P.$$

利用数域对加法运算封闭,对于任意自然数 n,由 $1\in P$ 得 $n=1+1+\cdots+1\in P$,即 $\mathbb{N}\subset P$. 再利用 P 对减法封闭可得 $\mathbb{Z}\subset P$. 最后,由每个有理数必然能表示为两个整数的商以及 P 对除法封闭可得 $\mathbb{Q}\subset P$.

例 0.3.5 实际上证明了一个定理.

定理 0.3.6　有理数域是最小数域.

本书中所提到的最大数域就是复数域了. 对于复数,我们来复习一下.

定义 -1 的算数平方根为虚数单位,记为 i. 我们称这样的数 $a+b\mathrm{i}$,$a,b\in\mathbb{R}$ 为复数. 当 $b\neq 0$ 时称为虚数. 当 $b\neq 0$ 时,$b\mathrm{i}$ 称为纯虚数. 复数的运算可以按照多项式运算进行. 例如,$\alpha=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$,$\beta=3-\sqrt{5}\mathrm{i}$,那么 $\alpha+\beta=4+(\sqrt{2}-\sqrt{5})\mathrm{i}$,$\alpha\beta=3+\sqrt{10}+$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com