

# 声电传感技术与仪器

## —— 一维波动

沈建国 主编



天津大学出版社  
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

# 声电传感技术与仪器 ——一维波动

沈建国 主编

 天津大学出版社  
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

瞬态声振动和瞬态电信号的测量可以应用于无损检测、地表勘探和工程质量检测等领域,其依据的一维波动传播规律是所有检测类仪器设计的物理基础。声电换能器的原理和等效电路是测量仪器匹配电路设计的关键。本书用一维有限长杆的共振特征描述了频率域波动声学的主要特点,通过多层模型描述了一维波动传播规律以及在时间域和频率域的表现,讨论了共振检测方法;并进一步将这些模型拓展到了变截面振动的描述,结合压电晶片的等效电路给出了振动系统的等效电路描述方法和导纳圆测量方法;用传输线模型讨论了一维波动在电学中的表现;最后讨论了 SH 波及其二维谱。读者可以利用这些规律开展一些声电测量方法研究,获得有用信号的特征,还可以模拟、设计线圈和压电换能器。

本书是电子科学与技术专业高年级的教科书,可供检测、仪表和测量专业高年级学生和研究生参考,也可供地表勘探、建筑质量监测行业和超声医学的工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

声电传感技术与仪器:一维波动 / 沈建国主编. —  
天津:天津大学出版社,2017.1

ISBN 978-7-5618-5746-5

I. ①声… II. ①沈… III. ①传感器 IV. ①TP212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 000470 号

|      |                             |
|------|-----------------------------|
| 出版发行 | 天津大学出版社                     |
| 地 址  | 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072) |
| 电 话  | 发行部:022-27403647            |
| 网 址  | publish.tju.edu.cn          |
| 印 刷  | 天津泰宇印务有限公司                  |
| 经 销  | 全国各地新华书店                    |
| 开 本  | 185mm × 260mm               |
| 印 张  | 13                          |
| 字 数  | 324 千                       |
| 版 次  | 2017 年 1 月第 1 版             |
| 印 次  | 2017 年 1 月第 1 次             |
| 定 价  | 28.00 元                     |

---

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

# 前 言

随着国家对自主知识产权的重视,对原创技术的需求不断提高。从测量原理上进行原始创新,对于新型检测仪器设计越来越重要。同时,创新人才培养需要相应的课程,使学生学会使用基础知识进行原理研究与工程设计,并最终实现仪器的开发。

大学高年级学生的动手能力实际上包括两部分。一是实际的操作,例如使用软件绘制电路板,完成一个简单仪器的所有设计、加工和组装等。这部分的动手能力是一个卓越工程师的基本功,但不是全部。二是将大一、大二期间所学到的高等数学、电工基础和普通物理的基本规律综合应用于一个具体的实验现象或实际问题,即利用这些数学、物理工具进行相应的数值计算,分析计算结果并总结规律,进一步探索这些规律在实际中的应用,为仪器设计和工程建设服务。这方面的能力对卓越工程师来讲也许更重要,本书在这方面进行了一定的尝试。

利用高等数学所建立的函数连续概念研究一维杆中的单元体,在单元体上将微分的概念和质点力学中的牛顿定律、胡克定律综合在一起,获得了单元体的波动方程。该方程的解是两个传播方向相反、传播速度相同的波。这个过程比较抽象,主要培养学生综合应用这些基本概念获得微分方程,并理解微分方程的来历及其反映的物理本质。

解波动方程的分离变量法以及所获得的二阶常微分方程告诉了学生高等数学知识的应用方法。其中,待定系数和独立变量——频率的来源与含义展现了傅里叶级数和傅里叶变换概念的另一面,使得人们对频率本身含义的认识——分离变量法中独立变量——更进了一步。而解的形式则进一步综合了傅里叶级数的一般项,展现了近代科学使用级数的基本思维体系和求解方法。

对于有限长杆来讲,边界的引入和边界条件的满足确定了独立变量——频率的离散值,给出了傅里叶级数中的一般项。该一般项的物理意义则描述了共振的特征和解的特定含义。在实际应用中,有时并不需要获得傅里叶级数的系数,而需要一般项,例如固体零件振动时的固有频率。

激发源的引入获得了傅里叶级数的系数,最终确定了振动的幅度。激发源项可以选择,描述了激发方式对解的重要作用。

有限长杆实验将上述过程综合在一起,告诉人们:由于边界的存在,该杆不

能够有其他频率的振动,只能够在这些离散的频率位置产生振动。不同激发方式代表不同的激发源,每个频率的振动幅度可以有差别,但是频率成分永远不变。傅里叶级数实际上也是这样,一般项确定了函数本身的固有特征,是不能改变的,对于不同的激发源,每项的系数可以不同。杆界面上的反射波和透射波也只能由这些固有频率的反射波和透射波组成,其他频率对反射波和透射波的贡献很小。这是因为杆固有频率的振动不消耗振动能量。当杆的长度趋于无穷大时,这些离散的频率间距趋于无穷小,频谱从离散过渡到连续,函数的表达式从级数过渡到积分。

冲击使有限长杆产生其自身固有频率的振动,也只能够产生这些频率的振动。声波(或电磁波)在界面上反射和透射时,同样也只能够具有这些固有频率成分,没有其他频率。或者说,只有这些频率的振动构成反射波和透射波,具体表现为:在这些固有频率处,反射和透射系数取极值,其他频率则比较小。当激发的频率与这些固有频率相同时,振动幅度很大,便产生通常所说的共振现象。共振现象在声传播、传感器设计以及日常生活中具有重要意义,伴随着检测仪器设计的每个环节和人们生活的方方面面。本书从应用极广的钢管厚度检测和换能器设计两方面对此展开讨论。

共振在时间域上表现为振动幅度大,振动周期长,灵敏度高,容易测量(只需要记录任意时刻的一段振动即可,不需要起始位置)。在频率域上表现为:频率单一,幅度和振动能量集中,具有频率过滤效应。通过钢管厚度的无损非接触测量,确立了共振现象在厚度测量中的应用方法。该方法可以用于地表勘探和建筑质量检测以及无损检测等多种非接触测量领域。以此为基础可以设计各类以共振特征为基础的检测仪器设备,实现非接触式测量。

超声换能器也按照其自身的固有频率振动,通过对超声换能器振动模式的分析,展现了共振特征在振动能量传递方面的应用。超声振动能够产生极大的加速度,作用于液体分子或者液固混合物时,其能量能够传递给这些液体和固体,改变分子结构或使分子有序排列。这类作用使其成为“工业味精”,应用在工业的各个领域。

压电晶片能将振动转换为电信号,也能将电能量转换为振动。其等效电路给出了波动方程的解和电场之间的等效关系,并提供了用电路方法分析振动模式以及将声电知识和研究方法综合在一起的实例。

与一维杆的传播特征相似,传输线上电磁波的传播也具有固有频率,其反射和透射系数在其固有频率处变化最剧烈,影响最明显。其分析方法与振动完全相同,一般的教科书上用分布参数模型得到波动方程(也称电报方程),用电压和电流以及阻抗进行分析。本书将这些方法罗列出来,并用电缆阻抗测量结

果给出了其固有频率的实验验证。读者可以对声电波动过程的两种描述方法进行类比,深入理解波动过程的描述方法。

现有的教材通常都用几何声学讲解波的传播及其反射、透射特征。几何声学是波长远小于固体几何尺寸条件下的近似结论,主要研究波的传播路径以及在波形上的到达时间。随着应用的深入,在很多实际问题中几何声学的条件(薄层的层厚与波长可比)并不满足,很多现象和测量波形需要用波动声学的方法和结果进行分析。而关于波动声学的理论通常都比较深奥,还没有一部供大学三年级使用的教材,比较系统地介绍波动声学的有关方法和结论。本书从一维介质的振动入手对其进行介绍,作为日益重要的波动声学的入门课程,使学生逐步掌握波动声学的研究方法和主要结论,并能够用书中有程序进行计算,研究一些实际生产中出现的声波波形和频率特征。

任何实际的问题一般都是三维的。维数增加以后,独立变量(一维时为频率)也相应增加。在二维介质中增加了一个新的独立变量——波数,其物理含义与频率相似,描述单位长度上波长的个数。该独立变量的引入使得有限长介质的固有频率从一维杆时的离散值变成了频率—波数域中的一条条连续曲线,这些曲线构成了二维介质声传播二维谱分布的基础。二维介质中声波的所有响应均由这些曲线处的响应构成,即只有固有频率对响应有比较大的贡献,对波形的传播起决定性的作用。

本书是作者多年研究工作的总结和对这些问题所进行的一些思考。在表述和讨论时难免有错,欢迎批评指正。

# 目 录

## 第一部分 一维波动与测量仪器

|                                |      |
|--------------------------------|------|
| 第一章 一维有限长杆振动的固有频率 .....        | (1)  |
| 第一节 一维杆振动 .....                | (1)  |
| 第二节 一维波动方程的解 .....             | (3)  |
| 第三节 系数 $\omega$ 的确定 .....      | (4)  |
| 第四节 物理意义讨论 .....               | (7)  |
| 第五节 系数 $G$ 、 $H$ 的计算 .....     | (9)  |
| 第六节 二节杆的振动 .....               | (11) |
| 第七节 应用 .....                   | (11) |
| 思考题 .....                      | (17) |
| 附录 一节杆的振动位移和应力分布计算程序 .....     | (18) |
| 参考文献 .....                     | (18) |
| 第二章 有限长杆固有频率的应用之一:反射与透射波 ..... | (19) |
| 第一节 物理模型 .....                 | (19) |
| 第二节 计算方法 .....                 | (20) |
| 第三节 固有频率处的反射、透射系数 .....        | (21) |
| 第四节 实际探头激发的波形及其频谱 .....        | (22) |
| 第五节 探头频谱与固有频率——最佳隔振厚度 .....    | (26) |
| 第六节 薄层透声原理 .....               | (29) |
| 思考题 .....                      | (31) |
| 附录 广义反射系数、透射系数计算程序 .....       | (32) |
| 第三章 有限长杆固有频率的应用之二:厚度共振波 .....  | (34) |
| 第一节 厚度共振对频谱的影响 .....           | (34) |
| 第二节 厚度共振对波形形状的影响 .....         | (40) |
| 第三节 厚度共振实验验证 .....             | (46) |
| 第四节 厚度共振的应用 .....              | (49) |
| 第五节 几何声学与波动声学 .....            | (50) |
| 思考题 .....                      | (50) |
| 第四章 薄层的反射波和透射波 .....           | (51) |
| 第一节 薄层的频谱与波形 .....             | (51) |
| 第二节 薄层厚度的影响 .....              | (53) |

|                               |              |
|-------------------------------|--------------|
| 第三节 薄层的厚度 .....               | (53)         |
| 第四节 薄层信息 .....                | (58)         |
| 思考题 .....                     | (59)         |
| 专题讨论 .....                    | (59)         |
| <b>第五章 多层介质模型的传递矩阵 .....</b>  | <b>(61)</b>  |
| 第一节 传递矩阵 .....                | (61)         |
| 第二节 矩阵传递 .....                | (62)         |
| 第三节 声源与系数 .....               | (64)         |
| 第四节 波形的计算 .....               | (65)         |
| 第五节 多层模型的频谱 .....             | (66)         |
| 第六节 固体与固体之间的反射系数 .....        | (71)         |
| 第七节 共振波的形成 .....              | (71)         |
| 第八节 薄水层对波形的影响( I 界面胶结差) ..... | (72)         |
| 第九节 理论模型与测量系统设计 .....         | (75)         |
| 思考题 .....                     | (76)         |
| <b>第六章 宽带发射、接收换能器设计 .....</b> | <b>(77)</b>  |
| 第一节 压电晶片振动的测量 .....           | (77)         |
| 第二节 宽带换能器设计 .....             | (79)         |
| 第三节 固有频率与声传播 .....            | (83)         |
| 第四节 压电晶片导纳圆测量实验 .....         | (84)         |
| 思考题 .....                     | (85)         |
| <b>第七章 变截面变幅杆和工具头设计 .....</b> | <b>(86)</b>  |
| 第一节 变截面模型和实物 .....            | (86)         |
| 第二节 变截面振动的计算方法 .....          | (88)         |
| 第三节 固有频率计算方法 .....            | (97)         |
| 第四节 取定固有频率后各层的系数 .....        | (100)        |
| 第五节 取定频率后各层的位移和应力 .....       | (101)        |
| 第六节 计算结果 .....                | (103)        |
| 思考题 .....                     | (105)        |
| <b>第八章 变截面压电振子的设计 .....</b>   | <b>(106)</b> |
| 第一节 变截面压电振子的结构 .....          | (106)        |
| 第二节 单个压电晶片的等效电路 .....         | (107)        |
| 第三节 晶堆的处理 .....               | (113)        |
| 第四节 起始位移的处理 .....             | (114)        |
| 第五节 固有频率计算程序 .....            | (114)        |
| 第六节 位移和应力计算程序 .....           | (117)        |
| 思考题 .....                     | (121)        |

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| <b>第九章 厚度振动压电换能器等效电路</b>  | (122) |
| 第一节 带负载一维杆的机械阻抗           | (122) |
| 第二节 压电换能器的等效电路            | (124) |
| 第三节 压电换能器的三个谐振            | (125) |
| 第四节 压电接收换能器               | (127) |
| 第五节 压电振子设计                | (129) |
| 附录 有关公式的推导                | (132) |
| <b>第十章 一维传输线的阻抗</b>       | (137) |
| 第一节 单位长度上的电感和电容           | (137) |
| 第二节 平行导线                  | (139) |
| 第三节 铠装电缆                  | (139) |
| 第四节 特征阻抗的作用               | (141) |
| 第五节 特征阻抗与反射系数             | (142) |
| 第六节 传输电缆上的能量和传输的能量        | (143) |
| 第七节 失配传输电缆上的输入阻抗          | (143) |
| 第八节 负载阻抗有虚部时传输电缆的输入阻抗     | (151) |
| 第九节 匹配电感对传输电缆输入阻抗的影响      | (153) |
| 第十节 有损耗情况                 | (154) |
| 第十一节 四分之一波长阻抗匹配           | (156) |
| 第十二节 电缆实验                 | (159) |
| 思考题                       | (161) |
| <b>第十一章 压电换能器动态参数测量仪器</b> | (162) |
| 第一节 压电换能器等效电路及其导纳圆        | (162) |
| 第二节 压电换能器等效电路参数计算         | (164) |
| 第三节 导纳圆测量原理               | (165) |
| 第四节 相位差计算的数字信号处理方法        | (167) |
| 第五节 导纳圆拟合                 | (172) |
| 第六节 导纳圆的测量精度              | (174) |
| 第七节 数字导纳圆的实际测量结果          | (177) |
| 第八节 与 4294A 测量结果的对比       | (182) |
| 思考题                       | (183) |

## 第二部分 SH 波与二维谱

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| <b>第十二章 SH 波满足的波动方程</b> | (184) |
| <b>第十三章 二维波动方程的解</b>    | (187) |
| <b>后记</b>               | (196) |

# 第一部分

## 一维波动与测量仪器

本部分研究一维波动问题,以频率域为研究对象,以固有频率在声传播、能量传递等方面的作用为主要研究内容,结合有关理论探讨测量仪器的设计,最终给出复电阻率的测量方法和仪器设计。

### 第一章 一维有限长杆振动的固有频率

各种声学传感器均是一个由质量块、耦合材料和压电晶片构成的振动系统,发射和接收振动时,传感器通常工作在其系统的固有频率处,每个固有频率对应一个振动模式。有限长杆和有限厚度的板振动时,如果两端的介质与其差别明显,也以其自身的固有频率振动或者固有频率的振动构成其振动的主要成分,则声电传感器(将振动转换为电信号)只能将这些振动的信号转换为电信号,或者说将其自身的固有频率(谐振频率)为主的信号转换为电信号。这些固有频率的振动对应于相应的振动模式。

为了解声学传感器振动系统的固有频率和振动模式,通常用一维杆模型进行研究。

#### 第一节 一维杆振动

**一维杆模型:**不考虑杆的粗细,只考虑其长度(对应于实际应用中的细杆,半径远小于长度,或者板的厚度)。设长度方向为 $x$ ,则杆振动时的位移、应变、应力等均是 $x$ 的函数,位移、应力和应变的正方向规定为 $x$ 方向。在 $x$ 的任意位置,这些函数均连续。

当杆中任意一点有扰动,其质点离开平衡位置后,便产生胡克力作用于相邻的质点,相邻的质点也离开平衡位置,反作用于原来的质点。每个质点在胡克力的作用下,开始加速运动,其速度开始改变。在杆的任意位置 $x$ ,取一个长度为微分 $dx$ 的单元体,其两端的位移分别为 $u(x)$ 、 $u(x+dx)$ ,位移大于0时的位移方向为 $x$ 的正方向。由于位移是 $x$ 的连续函数,可以用泰勒级数展开,忽略高次项后得到单元体的变形:

$$u(x+dx) - u(x) = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1-1)$$

定义单元体的形变 $\varepsilon$ 为单位长度上的变形:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-2)$$

则该形变产生的胡克力为:

$$F = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-3)$$

其中,  $E$  是杨氏模量, 应变方向与力的方向相反。上述是单元体外部介质对单元体的作用力。

胡克力  $F$  在  $x$  轴上也是连续的, 这样, 在单元体两端力的变化量为:

$$F(x+dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (1-4)$$

将式(1-3)代入式(1-4)得到单元体所受的力:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (1-5)$$

该力作用到单元体上以后, 导致单元体产生加速运动。假设一维杆的线密度为  $\rho$ , 则单元体在胡克力作用下产生的加速度为  $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$ 。其中  $t$  是时间, 忽略单元体所受到的重力和各种与体积有关的力, 单元体内胡克力与牛顿力相等:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

微分  $dx \neq 0$ , 同除以  $dx$  得到等式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-6)$$

这是一个一维波动方程, 是在单元体上胡克力等于牛顿力的情况下得到的, 描述一维杆中声波的传播。即杆中的任意一点离开平衡位置以后, 相邻的点与其有胡克力(弹性力)的作用(该作用通过位移、应变和力的连续来刻画), 该作用使得扰动能够在杆中传播。在推导过程中, 反复使用了位移、应变和力连续的条件: 位移连续导出了形变, 形变导出了胡克力。这些胡克力是单元体相邻部分对单元体的作用力, 该作用力是介质连续、位移等变量连续的必然产物。

杆中声波的传播是这样一个过程: 当杆中任意一点受到扰动离开平衡位置产生位移时, 由于介质连续, 相邻点也会在该点的带动下离开平衡位置, 但是相邻点离开平衡位置的位移比该点小。因为有不同的位移, 单元体便产生变形, 导致胡克力出现。根据牛顿第三定律, 胡克力从单元体作用于其相邻点时, 相邻点同样也作用于单元体, 该胡克力导致单元体加速, 由牛顿第二定律刻画其运动速度的变化(针对单元体, 将质点力学的结论应用到了单元体上)。这样, 由杆中任意点(单元体)的胡克力与牛顿力相等导出了一维杆满足的波动方程。

令  $v = \sqrt{E/\rho}$ , 则  $v$  是杆内声波的传播速度, 只与介质的性质  $E$  和  $\rho$  有关。单元体内胡克力与牛顿力相等的等式描述了声波的传播, 将牛顿定律的应用从质点延伸到了—维杆, 从质点的运动变成了杆中波的传播。

## 第二节 一维波动方程的解

在一维波动方程中,位移是时间  $t$  和位置  $x$  的函数。固定位置  $x$ ,位移随时间  $t$  变化,描述位置  $x$  的质点离开平衡位置以后的振动状态和方式。固定时间  $t$ ,位移是位置  $x$  的函数,描述声波传播过程中扰动在  $x$  的分布位置。行波法给出了波动方程的解:

$$u = \psi(x \pm vt) \quad (1-7)$$

将式(1-7)代入式(1-6)可证明: $\psi$  满足波动方程,其中  $\psi$  是任意函数。描述初始扰动的振动方式,是时间的函数。

还可以用分离变量法求解波动方程(1-6)。设  $U$  是满足波动方程(1-6)的解。

令  $U(x, t) = X(x)T(t)$ , (这个假设很特别,对于级数的一般项成立,对于普通的二元函数并不成立,由此可以看出级数描述一般函数的优势)代入到式(1-6)得到:

$$v^2 \frac{d^2 XT}{dx^2} = \frac{d^2 TX}{dt^2}$$

由于  $T$  仅仅是时间  $t$  的函数,  $X$  是  $x$  的函数,所以有:

$$v^2 T \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}$$

两端同除以  $U(XT)$  得到:

$$v^2 \frac{d^2 X}{X dx^2} = \frac{d^2 T}{T dt^2}$$

等式左边是  $x$  的函数,右边是  $t$  的函数,这两个函数相等,故只能够等于常数,不能随  $t$  和  $x$  变化,令其为  $-\omega^2$  得到:

$$v^2 \frac{d^2 X}{X dx^2} = \frac{d^2 T}{T dt^2} = -\omega^2$$

这样,便得到两个二阶微分方程:

$$v^2 \frac{d^2 X}{X dx^2} = -\omega^2 \quad (1-8)$$

$$\frac{d^2 T}{T dt^2} = -\omega^2 \quad (1-9)$$

整理得到:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} X = 0 \quad (1-10)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (1-11)$$

这是两个常系数微分方程,其通解分别为:

$$X(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$T(t) = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t}$$

其中:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (1-12)$$

将两个通解相乘以后,通常在时间的响应函数中只取一项  $e^{i\omega t}$  或者取  $e^{-i\omega t}$ 。取  $e^{i\omega t}$  时得到的最终通解为:

$$U(x, t) = X(x)T(t) = ACe^{i(kx + \omega t)} + BCE^{i(-kx + \omega t)} \quad (1-13)$$

由于  $A, B, C$  是待定系数,可以将上述公式中的系数合并  $G = AC, H = BC$ ,则最终有:

$$U(x, t) = Ge^{i(kx + \omega t)} + He^{i(-kx + \omega t)} \quad (1-14)$$

由式(1-7)知道,上式的第一项代表沿  $x$  轴反方向传播的声波,  $G$  是其相应的系数,描述该声波的幅度和初始相位;第二项代表沿  $x$  轴正方向传播的声波,  $H$  是其相应的系数,描述该声波的幅度和初始相位。初始相位往往决定了扰动在  $x$  轴上的到达时间。

### 第三节 系数 $\omega$ 的确定

上述通解式(1-14)中有三个系数:一个是常数  $\omega$  (不随  $x$  和  $t$  改变),另外两个是待定系数  $G$  和  $H$  (随常数  $\omega$  改变),  $\omega$  通常是实数(也可以为复数),  $G$  和  $H$  则为复数。式(1-14)只是满足波动方程的通解,还不是要求的最终解。求最终解,必须获得所有的  $\omega$  值以及每个  $\omega$  所对应的待定系数  $G, H$ ,从而得到式(1-14)所示的一般解,并把它们相加起来(级数形式的解)。

对于一段有限长的一维杆来讲,常数  $\omega$  并不是连续的,而是一些离散的值。

设杆的长度为  $l$ ,两端自由(应力为0)。将式(1-14)代入式(1-3)得:

$$F = E \frac{\partial u}{\partial x} = E(Hik)e^{i(kx + \omega t)} + EG(-ik)e^{i(-kx + \omega t)} \quad (1-15)$$

将两端自由的边界条件  $F|_{x=0} = 0, F|_{x=l} = 0$  代入式(1-15)得到:

$$Eik(H - G)e^{i\omega t} = 0$$

$$Eik(He^{ikl} - Ge^{-ikl})e^{i\omega t} = 0$$

在上述两个式子中,  $Eik$  是不为0的常数,  $e^{i\omega t}$  不全为0,若要保证上面等式恒成立,必须使上述两式中括号的部分为0,即

$$H - G = 0$$

$$He^{ikl} - Ge^{-ikl} = 0$$

写成矩阵形式有:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{ikl} & -e^{-ikl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-16)$$

要保证系数不全为0(杆上有振动的前提条件),需要系数行列式为0。

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{ikl} & -e^{-ikl} \end{vmatrix} = -e^{-ikl} + e^{ikl} = -\cos(-kl) - i\sin(-kl) + \cos(kl) + i\sin(kl) = 2i\sin(kl) = 0$$

这样便得到  $\sin(kl) = 0$ ,解得

$$k = \frac{n\pi}{l} (n = 1, 2, \dots)$$

由式(1-12)知道:

$$\omega = kv = \frac{v\pi}{l}n \quad (n=1, 2, \dots)$$

将  $\omega = 2\pi f$  代入上式可得:

$$f_n = \frac{v}{2l}n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1-17)$$

其中,  $f_n$  是该有限长杆振动时的固有频率。

系数  $\omega$  是在分离变量法中确定的, 相对于时间  $t$  和坐标  $x$  来讲为常数, 不随这两个参数改变。它不能在分离变量法中得到, 只能从边界条件中得到(两端自由)。因此, 分离变量法只给出了满足波动方程的解的表达式, 即函数形式。函数中的系数  $\omega$  描述了其振动时的固有频率, 只有当边界(边界条件)定下了以后才能够确定。边界条件包括: 杆的长度  $l$  和杆两端的状态。杆两端自由, 应力为 0; 两端夹紧, 位移为 0。

用杆两端应力为 0 的边界条件得到了一系列固有频率  $f_n$ , 每个固有频率对应于杆的一个振动模式(应力和位移在杆中有固定分布, 只有固有频率的振动能够满足)。以这个模式振动时, 杆内各点位移和应力的分布满足边界应力为 0 的条件。其他振动方式因为不满足该条件, 不能够在杆中形成或存在。

为了便于分析杆的振动模式, 可用三角函数推导。由于已经选择了具体的杆, 有具体的边界和长度, 其振动位移是确定的, 为了区别于前面的一般位移  $u$  和满足波动方程的位移  $U$ , 这里我们设位移为  $\xi$ , 则:

$$\xi = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]e^{i\omega t}$$

其中,  $k$  是角波数,  $k = 2\pi k_1$ ,  $k_1$  是波数, 其单位  $\text{m}^{-1}$ , 物理意义是单位长度上有几个波长;  $\omega$  是角频率,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  的单位是 Hz, 刻画单位时间内有几个振动周期。由两端自由的边界条件可以推导出等式:(注意, 应力由杨氏模量和位移对  $x$  的导数相乘得到, 在应力为 0 的边界条件中, 杨氏模量  $E$  不等于 0, 指数函数  $e^{i\omega t}$  不恒等于 0 均被约去)

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

以下推导过程中, 因为每一项均有因子  $e^{i\omega t}$ , 其不恒等于 0, 最终被除掉, 为了简略, 所以推导过程中省略了该因子, 故

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kA\sin(kx) + kB\cos(kx)$$

### 1. 直接求解

直接将  $x=0$  处的应力表达式代入上式得到

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = -kA\sin(k \cdot 0) + kB\cos(k \cdot 0) = kB = 0$$

由该式得到系数  $B=0$ 。

直接将  $x=l$  处的应力为 0 的边界条件代入得到

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = -kA\sin(kl) + kB\cos(kl) = 0$$

由该式得到:  $kA\sin(kl) = 0$ , 即  $\sin(kl) = 0$ , 解得  $kl = n\pi$ , 由此得到  $k = \frac{n\pi}{l}$ 。由  $\frac{n\pi}{l} = 2\pi \frac{1}{\lambda}$  得  $l$

$= \frac{\lambda}{2}n$ , 即当杆的长度是半个波长的整数倍时, 满足两端应力为 0 的边界条件。

## 2. 矩阵方法

同样, 还可以用矩阵的行列式得到相同的结果。将杆两端应力为 0 的边界条件同时代入, 得到两个等式:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = -kA \sin(k \cdot 0) + kB \cos(k \cdot 0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = -kA \sin(kl) + kB \cos(kl) = 0$$

将这两个代数方程写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} -k \sin(k \cdot 0) & k \cos(k \cdot 0) \\ -k \sin(kl) & k \cos(kl) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于杆的振动来讲,  $A$  和  $B$  不能同时为 0, 要使上述等式成立, 只有行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} 0 & k \\ -k \sin(kl) & k \cos(kl) \end{vmatrix} = 0$$

故  $k^2 \sin(kl) = 0$ 。因为  $k$  不恒等于 0, 所以有  $\sin(kl) = 0$ , 即  $kl = n\pi$ , 故

$$k = \frac{n\pi}{l} (n = 1, 2, \dots)$$

其中,  $k$  是一系列离散的值。

由波数  $k$  与频率  $f$  的关系知道, 与这些离散的  $k$  值相对应, 频率也是一系列离散的值。

由关系  $k = \frac{\omega}{v}$  以及  $\omega = 2\pi f$  得到  $k = \frac{2\pi f}{v}$ , 由此解出频率  $f = \frac{vk}{2\pi}$ , 将离散的  $k$  代入有  $f = \frac{v}{2l}n$ , 再

将  $T = \frac{1}{f}$  代入  $k$  的表达式有  $k = 2\pi \frac{1}{Tv} = 2\pi \frac{1}{\lambda}$ , 这样便得到

$$l = \frac{\lambda}{2}n (n = 1, 2, \dots)$$

$l = \frac{\lambda}{2}n$  是杆长度与波长之间的关系, 固有频率对应于半个波长的整倍数。

## 3. 振动模式

由位移表达式知道, 对于两端自由的边界, 位移表达式必须采用余弦函数描述其振动

位移  $\xi[\xi = A \cos(kx) e^{i\omega t}]$ , 将所得到的  $k$  代入位移表达式得到  $\xi = A \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{i\omega t}$ , 应力  $F =$

$E \frac{\partial \xi}{\partial x} = -EkA \sin(kx) = -\frac{n\pi}{l} EA \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$  是正弦函数。图 1-1 中实线是杆长度为 0.2 m,  $n$

$= 1$  时振动位移的分布。在杆的两个端点, 振动位移有极大值, 但是符号相反, 即振动方向相反; 在杆的中心位置, 振动位移为 0, 该点不振动(可以用于安装杆的固定架)。图 1-1 除了振动位移外, 还绘制了杆中的应力分布: 在杆的两端, 应力为 0, 在杆的中点, 振动的应力最大。考虑了时间因子  $e^{i\omega t}$  之后, 其实际的情况是: 杆内各点以该幅度作简谐振动。其中, 边界应力为 0 的条件导致杆两端的振动幅度最大, 离开平衡位置的位移最大, 杆中点的振动

幅度最小(为0),质点离开平衡位置的位移最小。

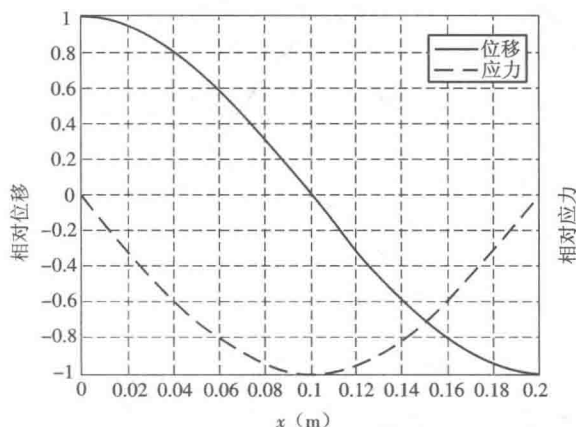


图 1-1 相对位移和应力随  $x$  的变化曲线 ( $l=0.2\text{ m}, n=1$ )

## 第四节 物理意义讨论

### 1. 共振的本质

上述理论推导所得到的结论是:不论用什么方式激发、冲击产生振动,有限长杆只能够以其固有频率振动,且固有频率只与杆的长度和声速有关,是确定的值,与声源和激发方式无关。

选择其中的一个固有频率进行分析。固有频率的振动形成以后,各点的振动幅度被完全确定,每一点的振动位移随时间的变化规律均是简谐波  $e^{i\omega t}$  (三角函数——正弦或者余弦函数),并且每一点都以相同的三角函数规律变化。在随时间变化的过程中,杆内相邻两点的位移之间有差别,便出现相互作用。位移的幅度随离开界面的距离改变,距离越大,位移越小,应力越大。在中点位移为0,应力最大,这是因为此位置的位移变化最快,两侧位移的相位相差  $180^\circ$ 。其结果是:应力从边界处的0(自由界面,没有反作用力,其应力为0)开始逐渐增加。由于应力和位移均是连续函数,所以杆两端的应力均从0开始逐渐增加,最后导致中间的应力最大。杆共振是杆(介质)连续,位移、应力连续和边界条件共同作用以后最终形成的结果。共振使得杆中的位移和应力形成固定的分布,虽然随位置改变,但是它们在  $x$  轴上是连续的,即连续渐进变化。

这种位移分布和应力分布并不消耗振动能量,在用于振动能量传递时,该频率能够传递出最大的能量,或者说,以这个频率、这种模式振动时,振动能量能够全部通过该有限的杆,从一端传递到另外一端。

共振是边界条件被满足时有限长杆自身的振动,是沿  $x$  正、反两个方向传播的声波相互叠加的结果,其频率是杆的固有频率波形特点是振动幅度随时间衰减慢,余振长(振动周期多),振动容易激发。

谐振的结果:杆中间点的振动位移为0,应力最大,分析认为是位移的斜率最大所致,并指出中点两端的位移符号相反。在中间点取单元体,单元体两边的位移相位相反,振动时,

随时间的变化规律均是按照相同的正弦函数增加,即随着时间的增加,当位移增加时,两边的位移均按照相同的幅度值增加,方向相反,位移差为0,这样便使该点的应力也按照相同的规律随时间增加。由于该单元体两端应力方向相反,所受的合力是两个力相加,因此应力最大。图1-2是中心点处单元体两侧的位移随时间的变化规律。在每个时刻,振动位移的方向相反,幅度相同。

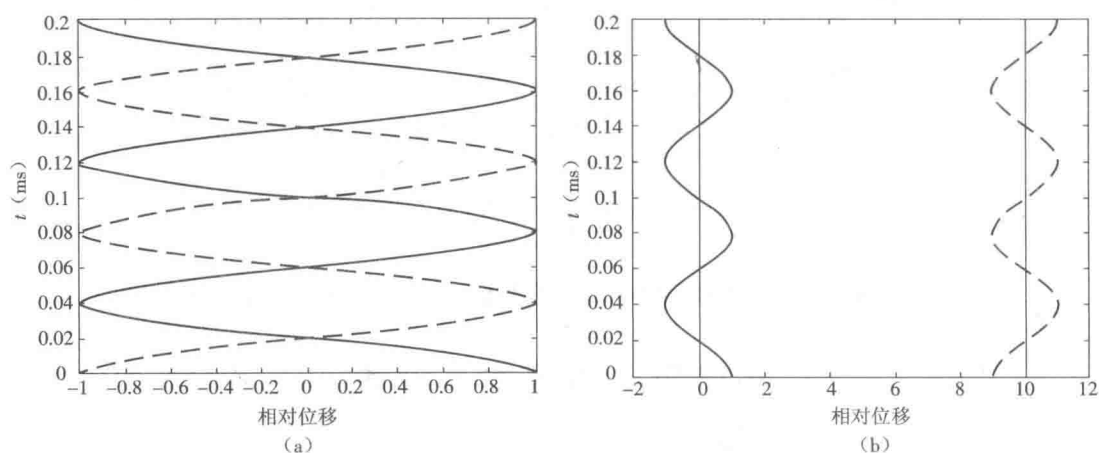


图1-2 杆的中心位置单元体两端的振动位移

(a) 位移重叠 (b) 位移分布

除了中心位置,其他位置的单元体两端的位移是同相位的。两端振动时的幅度不同,因此,位移相减以后,应力不是最大,并且随着位置靠近杆的两端,振动位移的幅度增大,单元体两端的位移差减小,应力减小,最后,到达边界时,位移最大,位移差为0,应力为0。图1-3是非中心点处单元体两端的振动位移随时间的变化规律。

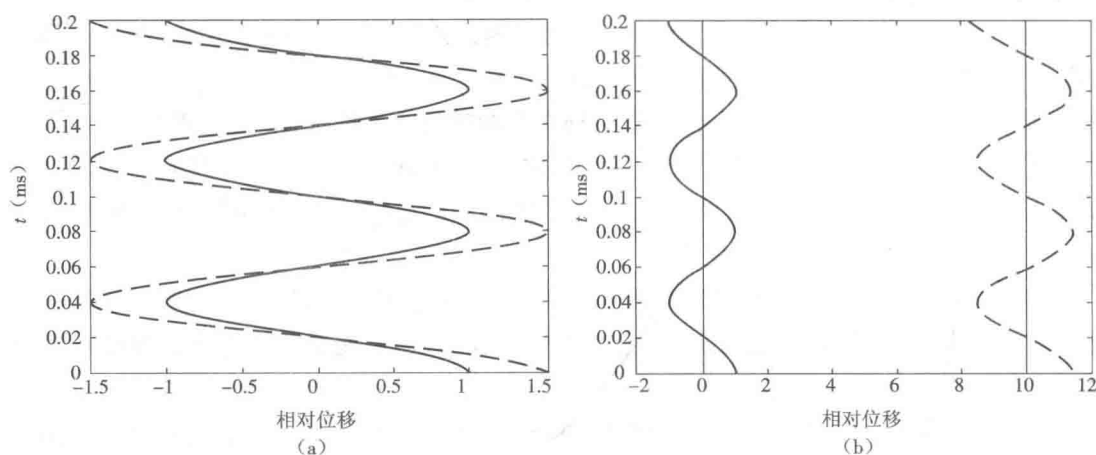


图1-3 杆的非中心位置单元体两端的振动位移

(a) 位移重叠 (b) 位移分布