

天津大学数学系编写组 编

# 工程数学基础教程

# 工程数学基础教程

天津大学数学系编写组 编

 天津大学出版社  
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础教程 / 天津大学数学系编写组编. —  
天津:天津大学出版社,2016.9

ISBN 978-7-5618-5650-5

I. ①工… II. ①天… III. ①工程数学-教材 IV.  
①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 203305 号

出版发行 天津大学出版社  
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)  
电 话 发行部:022-27403647  
网 址 publish.tju.edu.cn  
印 刷 廊坊市海涛印刷有限公司  
经 销 全国各地新华书店  
开 本 148mm×210mm  
印 张 12.25  
字 数 365千  
版 次 2016年9月第1版  
印 次 2016年9月第1次  
定 价 25.00元

---

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

# 前 言

天津大学为工程硕士研究生开设“工程数学基础”课程已将近 20 年,任课教师在教学中严格执行教学大纲,仔细研究《工程数学基础》(2001 版)教材,认真分析学生的学习情况,积累了丰富的经验,也找出了存在的问题.本书是按照总结经验、发扬优点、改进不足的原则,根据多位任课教师的讲稿编写而成的.

为保持教学工作的连续性和巩固教学改革成果,本书沿用《工程数学基础》(2001 版)的结构体系,沿袭其简明扼要的行文风格,并根据工程硕士研究生入学水平和培养目标,在满足教学大纲的基本要求前提下,删除了一些内容(如非线性方程组的解法等),略去了工科学生不必掌握的某些定理的证明,从而降低了难度;增加了广义逆矩阵的内容,供有需要的专业领域人员使用,但不作为教学的基本要求;补充了若干属于本科数学的内容,以便教学工作的顺利进行.

根据工程硕士研究生的培养目标及特点,本书在保证重要数学概念及理论严密准确的前提下,叙述方式直观简洁、通俗易懂,且语言流畅、行文风格平实,可读性强.

各章所配的习题,都分为 A、B 两类.其中,A 类题是为理解掌握基本内容而设计的,而通过 B 类题的练习则有助于提高分析问题、解决问题的能力.

参与本书编写的有曾绍标、苗新河、汤雁、袁和军.曾绍标教授为本书的编写做了大量前期工作,并对全书行文风格进行了协调统一.

本书在编写出版过程中,得到了众多任课教师的鼓励和帮助,得到了天津大学出版社及研究生教材主管部门的大力支持.愿借本书问世之机,对他们表示衷心感谢.

由于编者水平有限,加之时间紧迫,书中不妥甚至错误之处一定不少,恳请广大读者批评指正。

编者

# 目 录

第 1 章 线性空间与线性算子 .....	(1)
§ 1.1 集合及其运算 .....	(1)
一、集合的概念 .....	(1)
二、集合的包含关系与子集 .....	(3)
三、集合的交、并、差运算 .....	(4)
四、集合的直积 .....	(6)
五、 $n$ 个集合的交、并及直积 .....	(7)
§ 1.2 映射及其性质 .....	(8)
一、映射的概念 .....	(8)
二、几种重要的映射 .....	(9)
三、逆映射与复合映射 .....	(10)
四、可数集及其性质 .....	(11)
五、任意多个集合的交、并运算 .....	(14)
六、数域, 实数集的确界, 重要不等式 .....	(15)
§ 1.3 线性空间 .....	(18)
一、线性空间的概念 .....	(18)
二、线性空间的子空间 .....	(22)
§ 1.4 线性空间的基与维数 .....	(24)
一、集合的线性相关性 .....	(25)
二、基与维数 .....	(26)
三、元素在基下的坐标 .....	(27)
§ 1.5 线性算子 .....	(29)
一、线性算子及其性质 .....	(29)

二、线性算子的零空间 .....	(31)
三、线性算子的运算 .....	(31)
四、线性算子的矩阵 .....	(32)
习题 1 .....	(35)
A .....	(35)
B .....	(36)
<b>第 2 章 矩阵的相似标准形 .....</b>	<b>(38)</b>
§ 2.1 方阵的特征值与特征向量 .....	(38)
一、特征值与特征向量的概念 .....	(38)
二、有关特征值与特征向量的重要结论 .....	(41)
§ 2.2 相似矩阵 .....	(42)
一、相似矩阵及其性质 .....	(42)
二、方阵的相似对角形 .....	(44)
§ 2.3 多项式矩阵及其 Smith 标准形 .....	(46)
一、多项式的有关概念 .....	(46)
二、多项式矩阵 .....	(48)
三、多项式矩阵的初等变换 .....	(51)
四、多项式矩阵的 Smith 标准形 .....	(53)
§ 2.4 多项式矩阵的不变因子与初等因子 .....	(57)
一、多项式矩阵的行列式因子与不变因子 .....	(57)
二、多项式矩阵的初等因子 .....	(62)
三、多项式矩阵等价的充要条件 .....	(65)
§ 2.5 矩阵的 Jordan 标准形和有理标准形 .....	(66)
一、方阵相似的充要条件 .....	(66)
二、方阵的 Jordan 标准形 .....	(67)
三、方阵的有理标准形 .....	(73)
§ 2.6 方阵的零化多项式与最小多项式 .....	(78)
一、方阵的零化多项式 .....	(78)

---

二、方阵的最小多项式 .....	(79)
三、最小多项式的应用 .....	(82)
习题 2 .....	(83)
A .....	(83)
B .....	(86)
<b>第 3 章 赋范空间</b> .....	<b>(89)</b>
§ 3.1 赋范空间的概念 .....	(89)
一、赋范空间定义及常见的赋范空间 .....	(89)
二、由范数导出的度量 .....	(93)
三、等价范数 .....	(95)
四、赋范空间的子空间 .....	(96)
§ 3.2 收敛序列与连续映射 .....	(97)
一、序列的收敛性 .....	(97)
二、赋范空间中的无穷级数 .....	(100)
三、映射的连续性 .....	(101)
§ 3.3 赋范空间的完备性 .....	(103)
一、Cauchy 序列及其性质 .....	(103)
二、Banach 空间 .....	(106)
三、几个重要的结论 .....	(107)
§ 3.4 有界线性算子 .....	(108)
一、线性算子的有界性概念 .....	(108)
二、有界线性算子的范数 .....	(109)
三、线性算子的有界性与连续性的关系 .....	(112)
四、有界线性算子空间 .....	(113)
五、有界线性算子范数的次乘性 .....	(114)
§ 3.5 方阵范数与方阵的谱半径 .....	(116)
一、方阵范数的概念 .....	(116)
二、方阵的谱半径 .....	(119)



三、方阵的三种算子范数 .....	(122)
习题 3 .....	(124)
A .....	(124)
B .....	(128)
第 4 章 矩阵分析 .....	(130)
§ 4.1 向量和矩阵的微分与积分 .....	(130)
一、单元函数矩阵的微分 .....	(130)
二、单元函数矩阵的积分 .....	(132)
三、多元向量值函数的导数 .....	(133)
§ 4.2 方阵序列与方阵级数收敛的充要条件 .....	(135)
一、方阵序列收敛的充要条件及性质 .....	(135)
二、方阵级数收敛的充要条件及性质 .....	(137)
§ 4.3 方阵幂级数与方阵函数 .....	(139)
一、方阵幂级数 .....	(139)
二、方阵函数 .....	(143)
§ 4.4 方阵函数值的计算 .....	(147)
一、根据 $A$ 的 Jordan 标准形求 $f(A)$ .....	(147)
二、将 $f(A)$ 表示为 $A$ 的多项式 .....	(152)
三、谱映射定理 .....	(155)
§ 4.5 方阵函数的一个应用 .....	(156)
一、一阶线性常系数微分方程组的矩阵表示 .....	(156)
二、一阶线性常系数微分方程组初值问题的解 .....	(157)
习题 4 .....	(161)
A .....	(161)
B .....	(162)
第 5 章 内积空间与 Hermite 矩阵 .....	(164)
§ 5.1 内积空间 .....	(164)
一、内积空间的概念 .....	(164)

---

二、内积的性质 .....	(167)
三、由内积导出的范数 .....	(168)
四、内积空间的子空间 .....	(171)
§ 5.2 正交与正交系 .....	(172)
一、正交及其性质 .....	(172)
二、正交系、标准正交系及其性质 .....	(173)
* 三、正交化方法 .....	(176)
§ 5.3 正规矩阵及其酉对角化 .....	(180)
一、正规矩阵的概念 .....	(180)
二、酉矩阵的充要条件及其性质 .....	(181)
三、正规矩阵的充要条件 .....	(184)
§ 5.4 正定矩阵 .....	(185)
一、Hermite 矩阵的性质 .....	(185)
二、Hermite 矩阵的分类 .....	(189)
三、正定矩阵的充要条件及其性质 .....	(189)
习题 5 .....	(192)
A .....	(192)
B .....	(194)
<b>第 6 章 线性方程组的解法 .....</b>	<b>(196)</b>
§ 6.1 线性方程组的性态、严格对角占优矩阵 .....	(196)
一、线性方程组的性态 .....	(196)
二、矩阵的条件数 .....	(198)
三、严格对角占优矩阵及其性质 .....	(202)
§ 6.2 解线性方程组的 Gauss 消去法 .....	(205)
一、顺序 Gauss 消去法 .....	(205)
二、列主元素 Gauss 消去法 .....	(209)
* 三、解三对角方程组的追赶法 .....	(211)
§ 6.3 解线性方程组的迭代法 .....	(217)

一、迭代法的基本思想及有关概念 .....	(217)
二、简单迭代格式及其收敛性判别 .....	(218)
三、Jacobi 迭代法 .....	(221)
四、Gauss-Seidel 迭代法 .....	(227)
五、解线性方程组迭代法小结 .....	(232)
习题 6 .....	(232)
A .....	(232)
B .....	(234)
<b>第 7 章 插值法与数值逼近 .....</b>	<b>(236)</b>
§ 7.1 插值法概述 .....	(236)
一、插值问题 .....	(236)
二、多项式插值 .....	(237)
三、带导数的插值公式、分段插值与样条插值简介 .....	(240)
§ 7.2 Lagrange 插值 .....	(243)
一、Lagrange 插值公式 .....	(243)
二、Lagrange 插值的误差估计 .....	(247)
§ 7.3 Newton 插值 .....	(251)
一、Newton 插值多项式 .....	(251)
二、差商及其性质 .....	(253)
§ 7.4 Hermite 插值 .....	(256)
一、Hermite 插值公式 .....	(256)
二、Hermite 插值余项 .....	(258)
* § 7.5 三次样条插值 .....	(260)
一、三次样条插值函数 .....	(260)
二、三次样条插值函数的构造方法 .....	(261)
三、插值余项及收敛性 .....	(271)
* § 7.6 最佳平方逼近 .....	(272)
一、函数的最佳逼近 .....	(272)

---

二、用正交多项式作函数的最佳平方逼近 .....	(276)
三、曲线拟合的最小二乘法 .....	(280)
习题 7 .....	(286)
A .....	(286)
B .....	(288)
<b>第 8 章 数值积分与数值微分 .....</b>	<b>(290)</b>
§ 8.1 数值求积公式及其代数精度 .....	(290)
一、数值求积公式的一般形式 .....	(290)
二、求积公式的代数精度 .....	(291)
§ 8.2 Newton-Cotes 公式——等距节点的插值型求积公式 .....	(293)
一、插值型求积公式及其余项 .....	(293)
二、Newton-Cotes 公式 .....	(295)
§ 8.3 复化求积法 .....	(298)
一、复化求积公式 .....	(298)
二、变步长求积公式 .....	(302)
§ 8.4 Romberg 算法与 Gauss 型求积公式 .....	(305)
一、变步长求积公式之间的关系 .....	(305)
二、Romberg 算法 .....	(307)
三、Gauss 型求积公式简介 .....	(309)
§ 8.5 数值微分简介 .....	(314)
一、插值型求导公式 .....	(315)
二、两点数值微分公式和三点数值微分公式 .....	(316)
习题 8 .....	(319)
A .....	(319)
B .....	(320)
<b>第 9 章 常微分方程的数值解法 .....</b>	<b>(322)</b>
§ 9.1 常微分方程数值解法概述 .....	(322)
一、一阶常微分方程初值问题解的存在唯一性 .....	(322)

二、数值解法的基本概念 .....	(323)
三、数值方法的截断误差与阶 .....	(329)
§ 9.2 Runge-Kutta 法 .....	(330)
一、Runge-Kutta 法的基本思想 .....	(330)
二、二阶 Runge-Kutta 格式 .....	(331)
三、四阶 Runge-Kutta 格式 .....	(332)
* § 9.3 收敛性与稳定性 .....	(335)
一、收敛性 .....	(336)
二、稳定性 .....	(337)
§ 9.4 一阶常微分方程组和高阶常微分方程初值问题的数值解法 .....	(340)
一、一阶常微分方程组初值问题的数值解法 .....	(340)
二、高阶常微分方程初值问题的数值解法 .....	(344)
习题 9 .....	(347)
A .....	(347)
B .....	(348)
* 第 10 章 广义逆矩阵及其应用 .....	(350)
§ 10.1 广义逆矩阵 $A^{-}$ .....	(350)
§ 10.2 矩阵的满秩分解 .....	(353)
一、矩阵满秩分解的概念 .....	(353)
二、矩阵满秩分解的方法 .....	(354)
§ 10.3 矩阵的奇异值分解 .....	(356)
§ 10.4 广义逆矩阵 $A^{+}$ .....	(361)
§ 10.5 有解方程组的通解及最小范数解 .....	(369)
§ 10.6 无解方程组的最小二乘解 .....	(374)
习题 10 .....	(376)
A .....	(376)
B .....	(377)
参考文献 .....	(379)

# 第 1 章 线性空间与线性算子

本章在介绍集合与映射的基础上,给出线性空间的概念,然后介绍线性算子及其矩阵表示. 这些知识在本科阶段应该具备,此处作为复习,也为本书系统的完整性而列出,在教学中可根据具体情况取舍. 本章还将简单介绍实数系的连续性以及几个重要不等式.

## § 1.1 集合及其运算

集合理论是现代数学的基础.

### 一、集合的概念

集合是数学中最基本、最原始的概念之一,不能用其他数学概念对其进行严格定义,只能用人们所熟悉的、容易理解的术语来加以描述. 但这并不影响集合作为数学的基础的作用.

所谓“集合”,是指具有某种确定性质(或满足某种确定条件)的“事物”的全体. 集合也可简称为“集”,并将构成集合的一个个“事物”称为该集合的“元素”,也可简称为“元”. 比如:

(1) 中国所有的直辖市构成一个集合(北京、上海、天津、重庆是它的元素);

(2) 全体自然数是一个集合;

(3) 一份学生名单是一个集合;

(4) 单位圆周是平面上的一个点集;

(5) 中国的首都也是一个集合.

集合存在于我们的工作、学习、日常生活、经济活动和社会交往的

各个方面. 为简单方便起见, 通常用大写字母  $A, B, C, \dots$  来记一个集合, 例如可将上述各个集合分别记为  $A, \mathbb{N}, B, C, F$ ; 而将元素记成小写字母  $a, b, c, \dots$ .

设  $x$  是某个“事物”,  $A$  是某个集合: 若  $x$  是  $A$  的元素, 则称  $x$  属于  $A$ , 记为  $x \in A$ ; 否则, 称  $x$  不属于  $A$ , 记为  $x \notin A$ .

将集合清楚地表示出来的方法一般有以下两种.

一是“列举法”: 若一个集合的所有元素都能列出来, 则将它们写在一个花括号内, 并用逗号隔开, 这种方法称为列举法. 例如上述各个集合除  $C$  外可分别表示为

$$A = \{\text{北京, 上海, 天津, 重庆}\},$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

$$B = \{\text{张} \times \times, \text{王} \times \times, \text{李} \times \times, \dots, \text{赵} \times \times\},$$

$$F = \{\text{北京}\}.$$

二是“描述法”: 若  $p(x)$  是集合的任意一个元素  $x$  所满足的条件, 则可将该集合表示为  $\{x | p(x)\}$ , 这种方法称为描述法. 例如上述集合中的  $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ , 又如方程  $x^2 - 1 = 0$  的解集合可表示为  $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ .

如果一个集合含有有限多个元素, 则称其为有限集, 如上述集合中的  $A, B, F$  都是有限集. 其中, 将只含一个元素的集合称为单元素集(或单点集), 例如  $F = \{\text{北京}\}$  即是单元素集. 将不含任何元素的集合称为空集, 用专门记号  $\emptyset$  表示, 例如“方程  $x^2 + 1 = 0$  的实根”就是一个空集. 本书将空集也算作有限集. 不是有限集的集合称为无限集, 例如上述集合中的  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  和  $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  都是无限集.

元素均为数的集合称为数集. 下面的几个数集经常用到, 并以专用记号记之, 今后不再一一解释.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \text{——全体自然数的集合;}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \text{——全体整数的集合;}$$

$$\mathbb{Q} \text{——全体有理数的集合;}$$

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ——全体实数的集合;

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$ ——全体复数的集合.

此外还有

$\emptyset$ ——空集;

$\mathbb{R}^{m \times n}$ ——全体实的  $m \times n$  矩阵的集合;

$\mathbb{C}^{m \times n}$ ——全体复的  $m \times n$  矩阵的集合

也经常用到.

记号  $\mathbb{Q}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$ ,  $\mathbb{Z}^-$ , ... 分别表示全体正有理数的集合、全体负实数的集合、全体负整数的集合, 等等.

在理解集合概念时, 要注意以下几点.

(1) 一个集合的元素所具有的性质(或满足的条件)必须是明确的. 例如, “大于或等于 1 的全体实数”是明确的, 是一个集合, 即  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ; 而“远大于 1 的全体实数”是不明确的, 不是集合. 因此, 对于任意的  $x$  及给定集合  $A$ , 要么  $x \in A$ , 要么  $x \notin A$ , 二者必居其一, 且只居其一.

(2) 集合中的各元素必须是彼此能够分辨的、互异的. 因此, 在列举法表示集合时, 其中的元素不能重复出现.

(3) 集合中的元素没有先后次序之分. 因此,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$  等表示的是同一个集合.

## 二、集合的包含关系与子集

**定义 1.1** 设  $A, B$  是任意集合.

(1) 若  $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ , 则称  $A$  含于  $B$  (或  $B$  包含  $A$ ), 记为  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ ), 并称  $A$  是  $B$  的子集.

例如  $\mathbb{N}$  是  $\mathbb{R}$  的子集,  $\{\text{北京}\}$  是  $\{\text{北京, 上海, 天津, 重庆}\}$  的子集.

(2) 若  $A \subset B$ , 且  $B \subset A$ , 则称  $A$  与  $B$  相等, 记为  $A = B$ , 否则则记为  $A \neq B$ .

例如  $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$ .



(3)若  $A \subset B$ , 但  $A \neq B$ , 则称  $A$  是  $B$  的真子集, 记为  $A \subsetneq B$ .

显然  $\mathbb{N}$  是  $\mathbb{R}$  的真子集.

由定义可知, 空集  $\emptyset$  是任何集合  $A$  的子集, 即总有  $\emptyset \subset A$ . 此外, 不难得出集合之间的包含关系“ $\subset$ ”具有以下性质:

(1)(自反性)  $A \subset A$ ;

(2)(传递性) 若  $A \subset B, B \subset C$ , 则  $A \subset C$ .

注意: 并不是任何集合之间都具有包含关系. 例如  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  与  $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  就没有包含关系.

### 三、集合的交、并、差运算

在研究某个问题时, 所涉及的所有集合都是某个集合  $X$  的子集, 于是我们将  $X$  称为基本集合(也可称为全集). 比如, 在单元函数的微积分中,  $\mathbb{R}$  是基本集合; 在概率论中, 样本空间是基本集合; 在空间解析几何中, 全空间  $\mathbb{R}^3$  是基本集合.

**定义 1.2** 设  $X$  是基本集合,  $A, B \subset X$ .

(1) $A$  与  $B$  的交:  $A \cap B \equiv \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ , 即由  $A$  与  $B$  的公共元素构成的集合.

(2) $A$  与  $B$  的并:  $A \cup B \equiv \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ , 即由  $A$  和  $B$  的所有元素构成的集合.

(3) $A$  与  $B$  的差:  $A \setminus B \equiv \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ , 即由属于  $A$  而不属于  $B$  的元素构成的集合, 也可记为  $A - B$ ; 称差  $X \setminus A$  为集合  $A$  的余集或补集, 记为  $A^c$ .

通常可用文氏(Venn)图来直观地表现定义 1.2 中的各个集合(图 1-1)及一些运算律.

由定义不难知道集合的交、并、差、补具有下列性质:

(1)  $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B, A \subset A \cup B, B \subset A \cup B, A \setminus B \subset A, A \setminus B \not\subset B$ ;

(2)  $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A, A \cap X = A, A \cup X = X$ ;

(3)  $A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = X, (A^c)^c = A, X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$ ;