天津大学数学系编写组　编

工程数学基础教程

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

工程数学基础教程

天津大学数学系编写组　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础教程/天津大学数学系编写组编. —
天津:天津大学出版社,2016.9
ISBN 978-7-5618-5650-5

Ⅰ.①工… Ⅱ.①天… Ⅲ.①工程数学-教材 Ⅳ.
①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第203305号

出版发行	天津大学出版社
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647
网　　址	publish.tju.edu.cn
印　　刷	廊坊市海涛印刷有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	148mm×210mm
印　　张	12.25
字　　数	365千
版　　次	2016年9月第1版
印　　次	2016年9月第1次
定　　价	25.00元

前　　言

天津大学为工程硕士研究生开设“工程数学基础”课程已将近20年，任课教师在教学中严格执行教学大纲，仔细研究《工程数学基础》(2001版)教材，认真分析学生的学习情况，积累了丰富的经验，也找出了存在的问题. 本书是按照总结经验、发扬优点、改进不足的原则，根据多位任课教师的讲稿编写而成的.

为保持教学工作的连续性和巩固教学改革的成果，本书沿用《工程数学基础》(2001版)的结构体系，沿袭其简明扼要的行文风格，并根据工程硕士研究生入学水平和培养目标，在满足教学大纲的基本要求前提下，删除了一些内容(如非线性方程组的解法等)，略去了工科学生不必掌握的某些定理的证明，从而降低了难度；增加了广义逆矩阵的内容，供有需要的专业领域人员使用，但不作为教学的基本要求；补充了若干属于本科数学的内容，以便教学工作的顺利进行.

根据工程硕士研究生的培养目标及特点，本书在保证重要数学概念及理论严密准确的前提下，叙述方式直观简洁、通俗易懂，且语言流畅、行文风格平实，可读性强.

各章所配的习题，都分为A，B两类. 其中，A类题是为理解掌握基本内容而设计的，而通过B类题的练习则有助于提高分析问题、解决问题的能力.

参与本书编写的有曾绍标、苗新河、汤雁、袁和军. 曾绍标教授为本书的编写做了大量前期工作，并对全书行文风格进行了协调统一.

本书在编写出版过程中，得到了众多任课教师的鼓励和帮助，得到了天津大学出版社及研究生教材主管部门的大力支持. 愿借本书问世之机，对他们表示衷心感谢.

由于编者水平有限，加之时间紧迫，书中不妥甚至错误之处一定不少，恳请广大读者批评指正.

编者

目　录

第 1 章　线性空间与线性算子

本章在介绍集合与映射的基础上，给出线性空间的概念，然后介绍线性算子及其矩阵表示．这些知识在本科阶段应该具备，此处作为复习，也为本书系统的完整性而列出，在教学中可根据具体情况取舍．本章还将简单介绍实数系的连续性以及几个重要不等式．

§1.1　集合及其运算

集合理论是现代数学的基础．

一、集合的概念

集合是数学中最基本、最原始的概念之一，不能用其他数学概念对其进行严格定义，只能用人们所熟悉的、容易理解的术语来加以描述．但这并不影响集合作为数学的基础的作用．

所谓“集合”，是指具有某种确定性质（或满足某种确定条件）的“事物”的全体．集合也可简称为“集”，并将构成集合的一个个“事物”称为该集合的“元素”，也可简称为“元”．比如：

(1) 中国所有的直辖市构成一个集合（北京、上海、天津、重庆是它的元素）；

(2) 全体自然数是一个集合；

(3) 一份学生名单是一个集合；

(4) 单位圆周是平面上的一个点集；

(5) 中国的首都也是一个集合．

集合存在于我们的工作、学习、日常生活、经济活动和社会交往的

各个方面.为简单方便起见,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来记一个集合,例如可将上述各个集合分别记为 $A,\mathbb{N},B,C,F$;而将元素记成小写字母 $a,b,c,\cdots$.

设 x 是某个"事物",A 是某个集合.若 x 是 A 的元素,则称 x 属于 A,记为 $x\in A$;否则,称 x 不属于 A,记为 $x\notin A$.

将集合清楚地表示出来的方法一般有以下两种.

一是"列举法":若一个集合的所有元素都能列出来,则将它们写在一个花括号内,并用逗号隔开,这种方法称为列举法.例如上述各个集合除 C 外可分别表示为

$A=\{$北京,上海,天津,重庆$\}$,

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$,

$B=\{$张××,王××,李××,…,赵××$\}$,

$F=\{$北京$\}$.

二是"描述法":若 $p(x)$ 是集合的任意一个元素 x 所满足的条件,则可将该集合表示为 $\{x\mid p(x)\}$,这种方法称为描述法.例如上述集合中的 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,又如方程 $x^2-1=0$ 的解集合可表示为 $\{x\mid x^2-1=0\}$.

如果一个集合含有有限多个元素,则称其为**有限集**,如上述集合中的 A,B,F 都是有限集.其中,将只含一个元素的集合称为**单元素集**(或单点集),例如 $F=\{$北京$\}$ 即是单元素集.将不含任何元素的集合称为**空集**,用专门记号 $\varnothing$ 表示,例如"方程 $x^2+1=0$ 的实根"就是一个空集.本书将空集也算作有限集.不是有限集的集合称为**无限集**,例如上述集合中的 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 和 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 都是无限集.

元素均为数的集合称为数集.下面的几个数集经常用到,并以专用记号记之,今后不再一一解释.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$——全体自然数的集合;

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$——全体整数的集合;

$\mathbb{Q}$——全体有理数的集合;

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$——全体实数的集合；

$\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R},\mathrm{i}=\sqrt{-1}\}$——全体复数的集合.

此外还有

$\varnothing$——空集；

$\mathbb{R}^{m\times n}$——全体实的 $m\times n$ 矩阵的集合；

$\mathbb{C}^{m\times n}$——全体复的 $m\times n$ 矩阵的集合

也经常用到.

记号$\mathbb{Q}^{+}$,$\mathbb{R}^{-}$,$\mathbb{Z}^{-}$,…分别表示全体正有理数的集合、全体负实数的集合、全体负整数的集合,等等.

在理解集合概念时,要注意以下几点.

(1)一个集合的元素所具有的性质(或满足的条件)必须是明确的. 例如,“大于或等于 1 的全体实数”是明确的,是一个集合,即 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant 1\}$;而“远大于 1 的全体实数”是不明确的,不是集合. 因此,对于任意的 x 及给定集合 A,要么 $x\in A$,要么 $x\notin A$,二者必居其一,且只居其一.

(2)集合中的各元素必须是彼此能够分辨的、互异的. 因此,在用列举法表示集合时,其中的元素不能重复出现.

(3)集合中的元素没有先后次序之分. 因此,$\{1,2,3\}$,$\{2,3,1\}$,$\{3,1,2\}$ 等表示的是同一个集合.

二、集合的包含关系与子集

定义 1.1　设 A,B 是任意集合.

(1)若 $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A 含于 B(或 B 包含 A),记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$),并称 A 是 B 的**子集**.

例如$\mathbb{N}$ 是$\mathbb{R}$ 的子集,{北京}是{北京,上海,天津,重庆}的子集.

(2)若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$,否则则记为 $A\neq B$.

例如$\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}$.

(3)若 $A\subset B$,但 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A\subsetneqq B$.

显然$\mathbb{N}$ 是$\mathbb{R}$ 的真子集.

由定义可知,空集$\varnothing$是任何集合 A 的子集,即总有$\varnothing\subset A$. 此外,不难得出集合之间的包含关系"$\subset$"具有以下性质:

(1)(自反性)$A\subset A$;

(2)(传递性)若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

注意:并不是任何集合之间都具有包含关系. 例如$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$与 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$就没有包含关系.

三、集合的交、并、差运算

在研究某个问题时,所涉及的所有集合都是某个集合 X 的子集,于是我们将 X 称为**基本集合**(也可称为**全集**). 比如,在单元函数的微积分中,$\mathbb{R}$ 是基本集合;在概率论中,样本空间是基本集合;在空间解析几何中,全空间$\mathbb{R}^3$ 是基本集合.

定义 1.2 设 X 是基本集合,$A,B\subset X$.

(1)A 与 B 的交:$A\cap B\equiv\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合.

(2)A 与 B 的并:$A\cup B\equiv\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,即由 A 和 B 的所有元素构成的集合.

(3)A 与 B 的差:$A\backslash B\equiv\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$,即由属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合,也可记为 $A-B$;称差 $X\backslash A$ 为集合 A 的余集或补集,记为 A^{C}.

通常可用文氏(Venn)图来直观地表现定义 1.2 中的各个集合(图 1-1)及一些运算律.

由定义不难知道集合的交、并、差、补具有下列性质:

(1)$A\cap B\subset A$,$A\cap B\subset B$,$A\subset A\cup B$,$B\subset A\cup B$,$A\backslash B\subset A$,$A\backslash B\not\subset B$;

(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cap X=A$,$A\cup X=X$;

(3)$A\cap A^{\mathrm{C}}=\varnothing$,$A\cup A^{\mathrm{C}}=X$,$(A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}}=A$,$X^{\mathrm{C}}=\varnothing$,$\varnothing^{\mathrm{C}}=X$;