现代信号处理技术

—高阶谱、时频分析与小波变换

吴正国 夏 立 尹为民 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

现代信号处理技术

—高阶谱、时频分析与小波变换

吴正国 夏 立 尹为民 编著

武汉大学出版社
全国优秀出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代信号处理技术:高阶谱、时频分析与小波变换/吴正国,夏立,尹为民编著.—武汉:武汉大学出版社,2003.1

ISBN 7-307-03737-8

Ⅰ.现… Ⅱ.①吴… ②夏… ③尹… Ⅲ.信号处理 Ⅳ.TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 079464 号

责任编辑:史新奎　　责任校对:黄添生　　版式设计:支　笛

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北省京山县印刷厂

开本:787×1092　1/16　印张:18.25　字数:437 千字

版次:2003 年 1 月第 1 版　2003 年 5 月第 2 次印刷

ISBN 7-307-03737-8/TN·13　定价:26.00 元

前　言

近十几年来，随着计算机技术的发展，数字信号处理的理论和方法都获得了迅速发展。人们已不满足于用线性、因果、最小相位系统和平稳、高斯分布的随机信号去描述实际的系统和信号。非线性、非因果、非最小相位系统及非平稳信号和非高斯信号已被确定为信号处理的对象；高阶统计量方法、时频分析理论、小波变换技术已成为研究的热点。这些新发展的理论和技术已成为现代数字信号处理技术的主要标志之一，它们反映了人类对实际信号和系统认识上的深化和处理能力的飞跃。现代信号处理不仅已广泛应用于雷达、声纳、通信、生物医学、地球物理等领域，而且已扩展应用到机械振动、电气工程、故障诊断等几乎所有工程领域。

为适应现代信号处理技术应用范围的日益拓展，作者在多年研究的基础上，整理编著了此书。本书在较系统而深入地介绍现代信号处理的主要新理论和新技术及其应用的同时，特别介绍了现代信号处理技术在电气工程，故障诊断等领域的应用。由于篇幅的限制，本书主要以高阶谱估计、时频分析及小波变换为主要内容，将基本理论的阐述与新的研究成果介绍相结合，特别介绍了有限拟正交离散戈勃展开、自适应小波设计、多小波等新的研究热点，使广大读者在掌握基本理论和基本方法的同时，尽快跟踪现代信号处理的最新发展趋势。为使广大工程技术人员易于接受本书，特别在第一章系统介绍了所需的基础知识，并且在保证基本理论阐述尽量严密的同时，力求较详细地从工程角度阐述各种信号的处理算法。

本书的第二章由尹为民执笔，第三章由夏立执笔，吴正国编写第一、四、五章并负责全书的统稿。张琴担负了全书的打字及部分绘图工作。由于作者水平和能力所限，本书的选材和叙述必有一些不妥和错误之处，殷切希望读者予以批评、指正。

编著者

2002.8

目 录

第一章 基础知识

阅读本书需具备“泛函分析”及“数字信号处理”的一些基础知识。考虑到一些工科专业人员没有学习过这方面的内容，或者对知识有所遗忘，在本章中先简要叙述本书所需的一些基础知识。对这两方面基础知识的详细了解，请参阅参考文献[1][2]，或其它有关书籍。

§1.1 Hilbert 空间

1.1.1 线性空间

一、定义

定义1.1 设X是一个非空集合，K是数域（实数域$\mathbb{R}$或复数域$\mathbb{C}$）。如果对于任意$x,z,y\in X$和任意$\mu,\lambda\in K$，有元素$u\in X$称为x和y的和，记为$u=x+y$；有元素$v\in X$称为λ与x的数积，记为$v=\lambda x$，且满足如下条件：

(1)$x+y=y+x$；

(2)$(x+y)+z=x+(y+z)$；

(3)$1x=x$；

(4)$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$；

(5)$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$；

(6)$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$；

(7)X中存在零元θ，使得$x+\theta=x$；

(8)存在$x'\in X$，使得$x+x'=\theta$；通常称x'为x的负元，且记为$x'=-x$，

则称X为（数域K上的）**线性空间或向量空间**。

n维实空间$\mathbb{R}^n$、n维复空间$\mathbb{C}^n$及$(m\times n)$维矩阵空间$K^{m\times n}$都是常见的线性空间。此外，有界数列空间$l^p(Z)=\left\{x=x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots\,\middle|\,\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty\right\}$及函数空间$L^p[a,b]=\{x(t)$为$[a,b]$上的 Lebergue 可测函数$\left|\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t<\infty\right\}$，也是线性空间$(1\leqslant p<\infty)$。

线性子空间 设X为数域K上的线性空间，$M\subset X$为非空集合。如对于任意$x,y\in M$及任意$\lambda\in K$，有$x+y\in M$及$\lambda x\in M$成立，则称M为X的线性子空间（简称子空间）。如果$M\neq X$，则称M为真子空间。

设M为X的非空子集，记

$$\mathrm{span}M=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\,\middle|\,x_i\in M,\lambda_i\in K,n\in N\right\}$$

为由子集 M 所张成的子空间。

二、线性无关

设 X 为数域 K 上的线性空间，对于 $x_i\in X(i=1,2,\cdots,n)$，若存在不全为零的数 $k_i\in K$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i=\theta$，则称子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ **线性相关**，否则称此子集**线性无关**。

基与维数 设 X 为线性空间，若任意 $x\in X$，都可表示为 X 中的一个线性无关子集 $\{x_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合，即

$$x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i \quad (\lambda_i\in K)$$

则称此线性无关子集为 X 的一个**基**，并称 n 为 X 的**维数**，记为 $\dim X=n$。

三、线性算子

设 X,Y 为数域 K 上的两个线性空间，T 是从 X 到 Y 的一个映射。如果对任意的 $x,y\in X,\lambda,\mu\in K$ 都有下式成立

$$T(\lambda x+\mu y)=\lambda Tx+\mu Ty$$

则称 T 为线性算子。

X 为 T 的定义域，记为 $D(T)=X$；$R(T)=\{Tx|x\in X\}$ 称为 T 的值域；若 $Y=K$，则称 T 为线性泛函。对于线性泛函，常用小写字母表示，例如记为 $fx=f(x)\in K$。

对于有限维线性空间上的线性算子 T，对于确定的基而言，它与矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是一一对应的，有时就直接记为 $T=(a_{ij})_{n\times n}$（假定 X,Y 皆为 n 维线性空间）。

1.1.2 赋范线性空间

一、赋范线性空间与 Banach 空间

定义 1.2 设 X 为数域 K 上的线性空间。若对任意的 $x\in X$ 都有确定的实数 $\|x\|$ 与之对应，并满足如下条件（范数公理）：

(1)正定性 对$\forall\ x\in X$，$\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0$，当且仅当 $x=\theta$；

(2)正齐次性 对$\forall\ x,y\in X$ 及 $\lambda\in K$，$\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$；

(3)三角不等式 对$\forall\ x,y\in X$，$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数，并称 X 按范数 $\|x\|$ 成为赋范线性空间（简称赋范空间），记为 $(X,\|\cdot\|)$，或简记 X。

定义 1.3 设$(X,\|\cdot\|)$为赋范线性空间，距离函数 $d(x,y)=\|x-y\|$ $(\forall\ x,y\in X)$，如果 X 是完备的，则称 X 为 Banach 空间。

$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、$L^p[a,b]$、$l^p(z)$等都是常见的 Banach 空间。

二、有界线性算子

设 X,Y 皆为赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，若存在常数 $A>0$，使得对$\forall\ x\in X$，

$$\|Tx\|\leqslant A\|x\|$$

成立，则称T为$\boldsymbol{X}$上的有界线性算子。

对于有界线性算子T，满足上式的正数A有无穷多个，我们定义所有这些A的下确界为算子的范数，即

$$\|T\| = \inf\{A>0 \mid \|Tx\| \leqslant A\|x\|, \forall\, x\in \boldsymbol{X}\}$$

由此范数定义必有$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|$成立。

以$B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$表示从$\boldsymbol{X}$到$\boldsymbol{Y}$的全体有界线性算子构成的集合，特别当$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$时，记$B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=B(\boldsymbol{X})$。可以证明，$B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$按算子的线性运算和范数，也成为一个赋范线性空间。

三、有界线性泛函与共轭空间

定义1.4 设$\boldsymbol{X}$为数域$\boldsymbol{K}$上的赋范线性空间，$f:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{K}$为线性泛函。如存在常数$A>0$，使得$|f(x)|\leqslant A\|x\|$ $(\forall\, x\in\boldsymbol{X})$成立，则称$f$为$\boldsymbol{X}$上的有界线性泛函。显然，有界线性泛函是一种特殊的有界线性算子。

赋范线性空间$\boldsymbol{X}$上的所有有界线性泛函构成的集合$\boldsymbol{X}^*=B(\boldsymbol{X},\boldsymbol{K})$，称$\boldsymbol{X}^*$为$\boldsymbol{X}$的共轭空间（对偶空间）。可以证明，共轭空间$\boldsymbol{X}^*$为Banach空间。

1.1.3 Hilbert 空间

一、内积与Hilbert 空间

定义1.5 设$\boldsymbol{X}$是数域$\boldsymbol{K}$上的线性空间，若对于任意的$x,y\in\boldsymbol{X}$，都对应一个数$\langle x,y\rangle\in\boldsymbol{K}$，且满足下列条件：

(1)共轭对称性　对$\forall\, x,y\in\boldsymbol{X}$，有$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$；

(2)对第一变元的线性　对$\forall\, x,y,z\in\boldsymbol{X}$，$\forall\,\lambda,\mu\in\boldsymbol{K}$，有$\langle\lambda x+\mu y,z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\mu\langle y,z\rangle$；

(3)正定性　对$\forall\, x\in\boldsymbol{X}$，有$\langle x,x\rangle\geqslant 0$，且$\langle x,x\rangle=0$的充要条件是$x=\theta$，则称$\langle x,y\rangle$为元素$x$与$y$的内积。定义了内积的线性空间$\boldsymbol{X}$称为内积空间。

对于内积空间$\boldsymbol{X}$，称$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ $(\forall\, x\in\boldsymbol{X})$为由$\boldsymbol{X}$的内积诱导的范数。

定义1.6 设$\boldsymbol{X}$为内积空间，如果$\boldsymbol{X}$按内积诱导的范数成为Banach空间，则称$\boldsymbol{X}$为Hilbert空间。所以，Hilbert空间是完备的内积空间，也是特殊的Banach空间。

对于空间$\mathbb{R}^n$，可定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

则由此内积诱导的范数为

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

显然$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$是Banach空间，所以$\mathbb{R}^n$为Hilbert空间，有时也称为欧氏空间。

类似地，在$\mathbb{C}^n$中定义内积

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i^*$$

则$\mathbb{C}^n$也是Hilbert空间。在$l^2(z)$中定义内积

$$\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*$$

则$l^2(z)$也是Hilbert 空间。在$L^2[a,b]$中定义内积

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)\mathrm{d}t$$

则$L^2[a,b]$也是Hilbert 空间。

二、正交分解与投影定理

定义1.7 设X为内积空间，$x,y\in X$，如果$\langle x,y\rangle=0$，则称x与y正交，记为$x\perp y$。设M为X的非空子集，若x与M中所有元素正交，则称x与M正交，记为$x\perp M$。

定义1.8 设X为内积空间，M为X的线性子空间，$x\in X$。如果存在$x_0\in M$，$x_1\in M^{\perp}$（$M^{\perp}$为M的正交补空间），使得$x=x_0+x_1$，则称x_0为x在M上的正交投影(简称投影)。

可以证明：对于Hilbert 空间H，若M为H的闭线性子空间，则对任意$x\in H$，x在M上的投影存在而且惟一。

三、Riesz 表示定理

设Hilbert 空间H，F为H上的有界线性泛函，则必有惟一的$y\in H$，使得对任意$x\in H$，有$F(x)=\langle x,y\rangle$，且$\|F\|=\|y\|$成立。

Riesz 表示定理说明Hilbert 空间上的有界线性泛函都可以看成是由该空间中的某向量y通过内积定义导出的有界线性泛函。

1.1.4 Hilbert 空间上的线性算子

一、伴随算子

定义1.9 设H,G都为Hilbert 空间，$T\in B(H,G)$，称满足下式的惟一的有界线性算子$S\in B(G,H)$为T的伴随算子(或共轭算子)

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,sy\rangle \quad (\forall\ x\in H,\forall\ y\in G)$$

一般记T的共轭算子为T^*，所以有

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$$

伴随算子T^*的存在性和惟一性由Riesz 定理所保证。伴随算子有如下性质：

(1)$(T^*)^*=T$；

(2)$\|T^*\|=\|T\|$；

(3)$\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$；

(4)若$T\in B(H,G)$，$S\in B(G,L)$，则$(ST)^*=T^*S^*$；

(5)若$T\in B(H,G)$且T为双射，则$(T^*)^{-1}$存在，且$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$，$(T^*)^{-1}\in B(H,G)$。

若$T^*=T$，则称T为自伴算子(自共轭算子)。

可以证明：T为Hilbert 空间H自伴算子的充要条件是对任意$x\in H$，有$\langle Tx,x\rangle$为实数。

二、投影算子

设 $\boldsymbol{H}$ 为 Hilbert 空间，$\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的闭线性子空间，对任意 $x\in \boldsymbol{H}$，在 $\boldsymbol{M}$ 中有惟一正交投影 x_0。定义映射 $P:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{M}$ 为：$px=x_0$，则称 P 为 $\boldsymbol{H}$ 到 $\boldsymbol{M}$ 的投影算子，有时记为 P_M。

可以证明：P 是 Hilbert 空间上投影算子的充要条件是：

(1)P 是自伴算子；

(2)P 是幂等算子，即 $P^2=P$。

三、酉算子

定义 1.10 设 $\boldsymbol{H}$ 为 Hilbert 空间，$U\in B(\boldsymbol{H})$，若 $U^*U=UU^*=\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ 为 $\boldsymbol{H}$ 上的恒等算子)，则称 U 为酉算子。

可以证明：U 是 $\boldsymbol{H}$ 上的酉算子的充要条件是：(1)U 是满射；(2)U 是保范算子，即对任意 $x\in\boldsymbol{H}$，有 $\|Ux\|=\|x\|$ 成立。

酉算子的概念可以看做线性代数中酉变换在 Hilbert 空间的推广。

例如定义在 $\boldsymbol{L}^2(\mathbf{R})$上的仿射算子 $U(a,b)$ 就是 $\boldsymbol{L}^2(\mathbf{R})$上的酉算子。仿射算子的定义为[8]：

对于任意 $f(x)\in \boldsymbol{L}^2(\mathbf{R})$有：

$$(U(a,b)f)(x)=|a|^{-\frac{1}{2}}f\left(\frac{x-b}{a}\right)\quad \begin{pmatrix}a\neq 0\\ a,b\in\mathbf{R}\end{pmatrix}$$

自伴算子、投影算子、酉算子由于都满足 $T^*T=TT^*$ 条件，所有它们都是 Hilbert 空间上的正常算子。对于空间 $\boldsymbol{H}$ 上的正常算子 T，其充要条件是对任意 $x\in\boldsymbol{H}$，有 $\|T^*x\|=\|Tx\|$ 成立。

§1.2 Fourier 变换

1.2.1 $L^2(\mathbf{R})$中的 Fourier 变换

一、Fourier 变换的定义[7]

定义 1.11 令 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$，则 $f(t)$的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)\in L^2(\mathbf{R})$，并且由下式定义

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.2.1}$$

当 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 时，因为$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$ 不一定存在，可令

$$f_N(t)=\begin{cases}f(t) & |t|\leqslant N\\ 0 & |t|>N\end{cases}$$

使 $f_N(t)\in L^1(\mathbf{R})$，则可由 $f_N(t)$的 Fourier 变换 $\hat{f}_N(\omega)$来定义 $\hat{f}(\omega)$，即

$$\hat{f}(\omega)=\lim_{N\to\infty}\hat{f}_N(\omega)$$

此极限取二阶平均极限，即满足

$$\lim_{N\to\infty}\|\hat{f}(\omega)-\hat{f}_N(\omega)\|_2=0$$

引用上述定义后，Fourier 变换算子 F，可以看做是 $L^2(\mathbf{R})\to L^2(\mathbf{R})$映射的有界线性算子。并且可以证明，这种映射是一一映射，即对每一个 $g\in L^2(\mathbf{R})$，有相应的一个且仅有一个 $f\in L^2(\mathbf{R})$，使得 $\hat{f}=g$。

F 存在逆算子 F^{-1}，即对某个 $\hat{f}(\omega)\in L^2(\mathbf{R})$，存在 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，$f(t)$由下式规定

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.2.2}$$

二、Fourier 变换的性质

Fourier 变换的性质有许多，这里主要叙述以下几点：

(1)卷积定理，若令

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)*h(t)$$

则

$$\hat{g}(\omega)=\hat{f}(\omega)\hat{h}(\omega) \tag{1.2.3}$$

(2)Parseval 公式，若令 $f,g\in L^2(R)$，则

$$\langle f(t),g(t)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f}(\omega),\hat{g}(\omega)\rangle$$

特别地，有

$$\|f(t)\|_2^2=\langle f(t),f(t)\rangle=\frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}(\omega)\right\|_2^2 \tag{1.2.4}$$

(3)δ 函数的 Fourier 变换

$\delta(t)$虽然不是一个通常意义上的函数，而是一个广义函数，但因为它满足 $f(t)=f(t)*\delta(t)$，所以我们一般指定 $\delta(t)$的 Fourier 变换为

$$\hat{\delta}(\omega)=1 \tag{1.2.5}$$

由此，我们按 Fourier 变换的求逆公式还有

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.2.6}$$

成立。

三、相关函数

定义 1.12 令 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，则其自相关函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t+x)f^*(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t-x)\mathrm{d}t$$

令

$$f^-(t)=f(-t)$$

则有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^{*-}(x-t)\mathrm{d}t$$

$$=f(t)*f^{-*}(t)$$

因为

$$F[f^{-*}(t)]=\hat{f}^*(\omega)$$

所以

$$\hat{F}(\omega)=|\hat{f}(\omega)|^2 \tag{1.2.7}$$

并有

$$|F(x)|\leqslant F(0)=\|f\|_2^2 \tag{1.2.8}$$

成立。

1.2.2 Poisson 求和公式

一、周期函数的Fourier 变换

令函数 $f(t)$ 满足 $f(t+lT)=f(t)$（l 为任意整数），它可展开为Fourier 级数，即

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{1.2.9}$$

并且

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \tag{1.2.10}$$

为导出周期函数的Fourier 变换，可借助广义函数 $\delta(\omega-n\omega_0)$，即

$$F[e^{in\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-n\omega_0) \tag{1.2.11}$$

从而得到

$$\begin{aligned}F[f(t)]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n F[e^{in\omega_0 t}]\\&=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\delta(\omega-n\omega_0)\end{aligned}$$

所以周期函数的傅里叶变换为频域的冲激串函数。其冲激强度由其傅里叶级数系数 c_n 所决定。

特别地，对于 $T=2\pi,\omega_0=1$，则有 $f(t)\in L^2(0,2\pi),c_n\in l^2(\mathbf{Z})$，故周期函数的Fourier 变换，可以看做是将 $L^2(0,2\pi)$ 空间映射到 $l^2(\mathbf{Z})$ 空间的有界线性算子。

二、序列的Fourier 变换

现考虑序列 $\{c_n\},c_n\in l^2(\mathbf{Z})$，可定义其Fourier 变换如下：

$$\hat{f}_c(\omega_c)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-in\omega_c} \tag{1.2.12}$$

其逆变换式为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(\omega_c)e^{in\omega_c}d\omega_c \tag{1.2.13}$$

因为 $\hat{f}(\omega_c)\in L^2(0,2\pi)$，即为以 2π 为周期的函数，所以序列的Fourier 变换是将 $l^2(\mathbf{Z})$ 映射为 $L^2(0,2\pi)$ 的有界线性算子。

现考虑序列 $\{c_n\}$ 为连续时间函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$ 通过取样而获得（令取样周期为 T_s），即

$$c_n=f(t)\big|_{t=nT_s}=f(nT_s)$$

令 $\hat{f}(\omega)$ 为 $f(t)$ 的Fourier 变换，$\hat{f}_c(\omega)$ 为 c_n 的Fourier 变换，则据取样定理有

$$\hat{f}_c(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\omega+\frac{2k\pi}{T_s}\right) \tag{1.2.14}$$

成立。即时域的取样将导致频谱的周期延拓，其延拓周期为 $\omega_s=2\pi f_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$。

现在考虑时域连续函数 $F(t)$ 为某函数 $f(t)$ 的自相关函数，令 $F(t)$ 的取样序列为 $F(n)$，

则由于 $\hat{F}(\omega)=|\hat{f}(\omega)|^2$，可得

$$\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(\omega+\frac{2k\pi}{T_s}\right)\right|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega T_s} \tag{1.2.15}$$

三、Poisson 求和公式[7]

现考虑 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$ 的周期延拓式

$$\phi_f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t+nT) \tag{1.2.16}$$

延拓周期为 T，可以证明 $\phi_f(t)$ 是一个以 T 为周期的函数，即 $\phi_f(t)\in L^1(0,T)$。现假定 $\phi_f(t)$ 的 Fourier 级数处处收敛，即

$$\phi_f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\quad\left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\right)$$

那么有

$$\begin{aligned}c_k&=\frac{1}{T}\int_0^T\phi_f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^T f(t+nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega_0 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\hat{f}(k\omega_0)\end{aligned}$$

$\hat{f}(k\omega_0)$ 即为 $\hat{f}(\omega)$ 的频域取样序列（取样周期 ω_0）。

由此可得到著名的 Poisson 求和公式：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t+nT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k\omega_0)^{\mathrm{i}k\omega_0 t} \tag{1.2.17}$$

特别当 $t=0$ 时，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k\omega_0) \tag{1.2.18}$$

§1.3 信号的参数模型

1.3.1 最小相位系统

一、最小时延多项式

考虑一个 M 阶的 Z 域多项式 $A(z)$，若其零点 z_i 全部位于单位圆内，则称 $A(z)$ 为最小时延多项式。即

$$\begin{aligned}A(z)&=a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Mz^{-M}\\&=a_0(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})\cdots(1-z_Mz^{-1})\end{aligned}$$

而 $$|z_i|<1 \quad i=1,2,\cdots,M \tag{1.3.1}$$

二、最小时延性质

序列 $a=(a_0,a_1,\cdots,a_2)$ 的总能量按 Parseval 公式有

$$P_A=\sum_{m=0}^{M}|a_m|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|A(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{1.3.2}$$

若考虑其能量按时间的分布状况，可定义部分能量为

$$P_A(n)=\sum_{m=0}^{n}|a_m|^2 \quad n=0,1,\cdots,M \tag{1.3.3}$$

现在若将最小时延多项式 $A(z)$ 的一个零点（不失一般性，即 z_1）共轭映射到单位圆外，变为 $(z_1^*)^{-1}$，则得到一个新的多项式（非最小时延多项式）：

$$B(z)=\frac{-z_1^*+z^{-1}}{1-z_1z^{-1}}A(z) \tag{1.3.4}$$

上式也可用一个 $(M-1)$ 阶最小时延多项式 $F(z)$ 记为

$$\begin{cases}A(z)=(1-z_1z^{-1})F(z)\\ B(z)=(-z_1^*+z^{-1})F(z)\end{cases} \tag{1.3.5}$$

由于

$$\left|\frac{-z_1^*+z^{-1}}{1-z_1z^{-1}}\right|^2_{z=e^{\mathrm{i}\omega}}=1$$

所以有

$$|A(\omega)|^2=|B(\omega)|^2 \tag{1.3.6}$$

因此，用单位圆外的共轭镜像零点置换一个最小时延多项式的零点时，其总振幅谱 $|A(\omega)|^2$ 保持不变，当然总能量也保持不变。由于这种置换方法有 2^M 种，因此可以断言，一个 M 阶最小时延多项式的总能量（振幅谱）将会与 2^M 个非最小时延多项式的总能量相等。

虽然这种零点置换不改变总能量，但却改变了能量随时间的分布，即改变了部分能量。令 a_n,b_n,f_n 分别为多项式 $A(z)$、$B(z)$，$F(z)$ 的第 n 项系数。则由(1.3.5)式可知

$$\begin{aligned}a_n&=f_n-z_1f_{n-1}\\ b_n&=-z_1^*f_n+f_{n-1}\end{aligned} \quad n=0,1,\cdots,M \tag{1.3.7}$$

所以有

$$|a_n|^2-|b_n|^2=(1-|z_1|^2)(|f_n|^2-|f_{n-1}|^2)$$

按(1.3.3)式求部分能量，则有

$$P_A(n)-P_B(n)=(1-|z_1|^2)|f_n|^2 \tag{1.3.8}$$

由于 $F(z)$ 为 $(M-1)$ 阶多项式，$|f_M|^2=0$

所以 $$P_A(M)=P_B(M)$$

总能量相等，但当 $0\leqslant n\leqslant(M-1)$ 时，恒有

$$P_A(n)-P_B(n)\geqslant 0$$

即在 $0\leqslant n\leqslant(M-1)$ 的任何时刻，$A(z)$ 的部分能量都将大于同时刻的 $B(z)$ 部分能量。也就是说，最小时延多项式比之具有相同振幅的非最小时延多项式具有能量分布的最小延时。

三、最小相位系统

设离散时间系统的传递函数为

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{A\prod_{i=1}^{N}(1-z_i z^{-1})}{\prod_{p=1}^{M}(1-z_p z^{-1})}\quad N<M \tag{1.3.9}$$

若 $H(z)$的分子、分母多项式 $N(z)$、$D(z)$皆为最小时延多项式，即 $H(z)$的零、极点皆在单位圆内，即

$$\begin{aligned}|z_i|&<1\quad 1\leqslant i\leqslant N\\|z_p|&<1\quad 1\leqslant p\leqslant M\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

则称 $H(z)$所描述的系统为最小相位系统。

显然，通过零极点共轭映射的方法，该最小相位系统将与许多非最小相位系统具有相同的$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2$。换句话说，$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2$ 仅对最小相位系统具有惟一对应关系，而对于非最小相位系统不具有惟一对应关系。

1.3.2 谱分解定理

一、随机信号的功率谱

离散时间实平稳随机信号 x_n 的功率谱 $P_{xx}(z)$定义为 x_n 的自相关函数 $R_{xx}(k)$的 z 变换，即

$$P_{xx}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{xx}(k)z^{-k} \tag{1.3.11}$$

式中：$R_{xx}(k)$定义为

$$R_{xx}(k)=E[x_{n+k}x_n] \tag{1.3.12}$$

若 $R_{xx}(k)$是稳定的，则 $P_{xx}(z)$的收敛域包含单位圆，所以令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$，有

$$P_{xx}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_{(xx)}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \tag{1.3.13}$$

$P_{xx}(\omega)$描述了信号功率随频率的分布密度，即信号的平均功率

$$P_x=E[x_n^2]=R_{xx}(o)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{1.3.14}$$

对于实平稳随机信号，由于 $R_{xx}(k)=R_{xx}(-k)$，所以有

$$P_{xx}(\omega)=P_{xx}(-\omega) \tag{1.3.15}$$

及 $P_{xx}(\omega)$为非负的实函数成立。

对于方差为 A 的白噪声信号，由于

$$R_{xx}(k)=A\delta(k) \tag{1.3.16}$$

成立，所以有

$$P_{xx}(\omega)=A\quad（常数） \tag{1.3.17}$$

对于实际中常遇到的带限白噪声，它定义为：

$$P_{xx}(\omega)=A\quad |\omega|\leqslant\omega_0$$