LEBESGUE MEASURE AND INTEGRAL

Lebesgue测度与积分

王於平 夏业茂 施建兵 陈 磊 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

Lebesgue 测度与积分

王於平　夏业茂
施建兵　陈　磊　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内 容 提 要

本书是作者在十余年教学经验的基础上撰写的一部有关实变函数的教材.该书根据信息与计算科学专业实际情况——教学课时少的特点,精简传统实变函数论中部分抽象内容,对某些抽象概念、定理等内容都举例说明,从而降低该课程难度,减轻学生负担,提高学生学习积极性.我们主要介绍 Lebesgue(勒贝格)测度与 Lebesgue 积分.本书内容包括:集合与实数集、Lebesgue 测度、Lebesgue 可测函数、Lebesgue 积分、L^p 空间,共五章内容,每章后均附习题,以便于读者学习和掌握实变函数论的基础知识.

本书可供高等院校数学系学生、研究生阅读,也可供其他有关学科教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

Lebesgue 测度与积分 / 王於平等编著. — 南京 :
东南大学出版社, 2017.1
ISBN 978-7-5641-6898-8

Ⅰ.①L… Ⅱ.①王… Ⅲ.①实变函数 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 318068 号

Lebesgue 测度与积分

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	虎彩印艺股份有限公司
开　　本	700 mm×1000 mm　1/16
印　　张	8
字　　数	130 千字
版　　次	2017 年 1 月第 1 版
印　　次	2017 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978-7-5641-6898-8
定　　价	20.00 元

(本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系。电话:025-83791830)

目　　录

1　集合与实数集

自 19 世纪 80 年代德国数学家 G. Cantor 创立集合论以来，集合论已经渗透到各个数学领域，成为现代数学的基础. 本章我们介绍集合论的基本知识，为学习实变函数论及其他数学课程提供必要的预备知识.

1.1　集合的运算

具有某种特定性质的研究对象的全体称为集合(set)，简称为集，其中每个对象称为元素(element). 我们常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素. 用 $x\in X$ 表示 x 为 X 的元素，称为 x 属于 X；用 $x\notin X$ 表示 x 不为 X 的元素，称为 x 不属于 X，二者必居其一. $A\subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集，即 A 的元素都是 B 的元素；$A\subsetneqq B$ 表示 A 是 B 的真子集，即 A 的元素都是 B 的元素，且 B 中至少有一个元素不属于 A；$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

设 A,B 是 X 的两个子集，我们定义 A 与 B 的运算如下：

(1) $A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$ 表示 A 与 B 的并(union)；

(2) $A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$ 表示 A 与 B 的交(intersection)；

(3) $A\backslash B=\{x:x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 表示 A 与 B 的差(difference)；

(4) $A^c=\{x:x\in X$ 且 $x\notin A\}$ 表示 A 的补集或余集；

(5) $A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 表示 A 与 B 的对称差.

设一族集合 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，$I$ 称为指标集(index set)，它们的并与交分别为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\exists\,\alpha\in I,\text{使得 }x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\forall\,\alpha\in I,\text{都有 }x\in A_\alpha\}.$$

读者不难证明 de Morgan 公式

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,$$

$$(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c.$$

通常用 $\varnothing$ 表示空集(empty set),即该集不含任何元素,$\mathbf{N}$ 表示自然数集(本书中不含 0),$\mathbf{Z}$ 表示全体整数集,$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集,$\mathbf{R}$ 表示全体实数集,$\mathbf{C}$ 表示全体复数集.

1.2 集合的基数

基数(cardinal number) 的概念是为了研究一个集合的元素的个数而引进的.

1.2.1 映射的概念

如果 $\forall x\in A$,都有唯一的 $y=f(x)\in B$ 与它对应,则称 $f:A\rightarrow B$ 为 A 到 B 的映射(mapping). 称 A 为 f 的定义域,记为 D_f,称$\{f(x)\mid x\in A\}$ 为 f 的值域,记为 R_f,它是 B 的一个子集.

若 D_f,R_f 都是数集,则称 f 为函数(function).

若 D_f 是数集,R_f 不是数集,则称 f 为抽象函数.

若 D_f 不是数集,R_f 是数集,则称 f 为泛函.

若 D_f,R_f 不是数集,则称 f 为映射或变换(transformation) 或算子(operator).

如果对任意 $x_1\neq x_2\in D_f$,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 A 到 B 的单射(injection). 此时它的逆映射存在,记为 $f^{-1}:R_f\rightarrow A$.

如果 $R_f=B$,则称 f 为满射(surjection).

如果 f 既是单射又是满射,则称 f 为 1 - 1 对应或双射(bijection).

定义 1.2.1 若 A 与 B 间存在 1 - 1 对应,则称 A 与 B 对等. 记为 $A\sim B$.

例 1.1 (1) $\mathbf{Z}\sim\mathbf{N}$,这两个集合存在 1 - 1 对应

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x=1,2,\cdots,\\ -2x+1, & x=0,-1,-2,\cdots.\end{cases}$$

(2) $[0,1]\sim[a,b]$,因为两集合存在 1 - 1 对应 $y=a+(b-a)x$.

(3) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\sim(-\infty,+\infty)$，因为两集合存在 1-1 对应 $y=\tan x$.

显然对等关系有下列性质：

定理 1.2.1　对任何集合，均有

(1) 自反性 $A\sim A$；

(2) 对称性 $A\sim B\Rightarrow B\sim A$；

(3) 传递性 $A\sim B, B\sim C\Rightarrow A\sim C$.

定理 1.2.2　设$\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$，$\{B_\alpha\mid\alpha\in I\}$是两两不相交的集族，$\forall\alpha\in I$有$A_\alpha\sim B_\alpha$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\sim\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha.$$

1.2.2　有限集、无限集和可数集

众所周知，两个有限集合对等的充要条件是它们的元素个数相同. 因此我们用对等关系来讨论集合元素的个数问题，并将集合进行分类.

定义 1.2.2　如果两个集合对等，则称它们具有相同的基数. 集合 A 的基数记为 $\overline{\overline{A}}$.

显然

$$\overline{\overline{\mathbf{Z}}}=\overline{\overline{\mathbf{N}}},\overline{\overline{[0,1]}}=\overline{\overline{[a,b]}},\overline{\overline{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}}=\overline{\overline{(-\infty,+\infty)}}.$$

若 $A\sim\varnothing$ 或 $A\sim\{1,2,\cdots,n\}$，则称 A 为有限集(finite set)；否则称为无限集(infinite set). 记有限集的基数为集合元素的个数，如：

例 1.2　$\overline{\overline{\varnothing}}=0$；$\overline{\overline{\{1,2,\cdots,n\}}}=n$.

若 $A\sim\mathbf{N}$，则称 A 为可数集(countable set)，记为 $\overline{\overline{A}}=\aleph_0$（读作阿列夫零）. 显然 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

若 A 为有限集或可数集，则称 A 为至多可数集.

例 1.3　因为 $\mathbf{Z}\sim\mathbf{N}$，所以 $\overline{\overline{\mathbf{Z}}}=\aleph_0$.

下面定理是关于可数集的性质：

定理 1.2.3　(1) 任何无限集必含有一个可数集.

(2) 可数集的任一无限子集是可数集.

(3) 有限个或可数个可数集的并还是可数集.

证明 (1) A 为无限集,取 $a_1 \in A$,则 $A\backslash\{a_1\}$ 是无限集. 取 $a_2 \in A\backslash\{a_1\}$,则 $A\backslash\{a_1,a_2\}$ 是无限集,以此类推. $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\} \subseteq A$.

(2) 设 $E \subseteq A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 的无限子集,令 $n_1 = \min\{n: a_n \in E\}$, $n_2 = \min\{n: a_n \in E, n > n_1\}$, $\cdots$. 由于 E 是无限集,这样得到 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. 易知 $E = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots\}$ 是一个可数集.

(3) 不妨设 $A_n = \{a_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $n = 1,2,\cdots$ 是两两不相交的可数集的情形. 令

$$B_m = \{a_{m,1}, a_{m-1,2}, \cdots, a_{1,m}\}.$$

因为 B_m 有限,所以 $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ 是一个可数集. 又

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m,$$

所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集.

证毕.

定理 1.2.3(3) 在证明某集合是可数集方面起着重要的作用. 例如:

推论 1.2.4 有理数全体 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证明 对任何 $n \in \mathbf{N}$,记 $A_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots\}$,则 A_n 是可数集. 令

$$\mathbf{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

根据定理 1.2.3(3) 知,$\mathbf{Q}^+$ 是可数集. 同理可证

$$\mathbf{Q}^- = \bigcup_{n=-\infty}^{-1} A_n$$

也是可数集,从而 $\mathbf{Q}$ 就是可数集.

证毕.

定理 1.2.5 设 A 为无穷集,B 为可数集,则 $A \sim A \cup B$.

证明 不妨设 $A \cap B = \varnothing$. 取 A 的可数子集 A_1,则 $A_1 \cup B$ 可数集,所以 $A_1 \overset{f_1}{\sim}$

注:本书定理、推论、引理、性质按章节连续编号;例题按章编号。

$A_1 \cup B$. 因为 $A\backslash A_1 \overset{I}{\sim} A\backslash A_1$，其中 I 表示 $A\backslash A_1$ 的恒等映射，$A_1 \overset{f_1}{\sim} A_1 \cup B$，又 $(A\backslash A_1) \cap A_1 = \varnothing$，$(A\backslash A_1) \cap (A_1 \cup B) = \varnothing$，所以 $A = (A\backslash A_1) \cup A_1 \sim (A\backslash A_1) \cup (A_1 \cup B) = A \cup B$.

证毕.

1.2.3 不可数集

在上一节中我们学习了可数集及可数集性质. 下面的定理告诉我们一个不可数集(uncountable set) 的例子.

定理 1.2.6 闭区间(closed interval)$[0,1]$ 是不可数集.

证明 用反证法. 假设$[0,1]$ 是可数集，则

$$[0,1] = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

将$[0,1]$ 三等分得

$$\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\text{和}\left[\frac{2}{3},1\right].$$

a_1 最多只能属于它们中的两个，因此存在一个闭区间，记为 I_1 使得

$$a_1 \notin I_1.$$

类似地取

$$I_2 \subseteq I_1 \text{ 使得 } a_2 \notin I_2.$$

这样得到一列闭区间$\{I_n\}$

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

使得

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \notin I_n, \quad \text{且} \quad |I_n| = \frac{1}{3^n}.$$

由数学分析中的闭区间套定理知，存在

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

显然

$$\xi \in [0,1], \text{但}\ \xi \neq a_n.$$

矛盾!所以[0,1] 不可数.

证毕.

称[0,1] 具有连续势,记为$\overline{\overline{[0,1]}} = \aleph$(读作阿列夫).

由于对等关系具有传递性,这样我们得到任何区间都是不可数集,即

推论 1.2.7 任何区间都具有连续势.

1.3 R 上的点集

对于 **R** 中的开集与闭集读者已经在数学分析中有所了解,这里将进一步介绍点集的特性,以后再理解多维情形,就不会发生困难了.本节主要介绍 **R** 中的开集、闭集、完备集及 Cantor 三分集等内容.

1.3.1 R 中的开集、闭集

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$,我们称

$$U(x_0,\delta) := \{x: |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

为 x_0 的 δ-邻域(neighborhood).称

$$\mathring{U}(x_0,\delta) := \{x: 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

为 x_0 的去心 δ-邻域.

定义 1.3.1 设 E 是 **R** 的非空子集,$x_0 \in \mathbf{R}$.

(1) 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0,\delta) \subseteq E$,则称 x_0 是 E 的内点(inner point). E 的内点组成的集合称为 E 的内部,记为 E°.

(2) 若存在 $\delta_0 > 0$,使得 $\mathring{U}(x_0,\delta_0) \cap E = \varnothing$,则称 x_0 为 E 的外点(outer point).

(3) 如果对任意 $\delta > 0$,使得 $\mathring{U}(x_0,\delta) \cap E \neq \varnothing$,则称 x_0 为 E 的聚点(point of accumulation). E 的全体聚点记为 E',称为 E 的导集(derived set).记 $\overline{E} := E' \cup E$ 称为 E 的闭包(closure).

(4) 如果对任意$x\in E$,都有$\delta_x>0$,使得$U(x,\delta_x)\subseteq E$,则称E为开集(open set).

(5) 如果$E'\subseteq E$,则称E为闭集(closed set).

例 1.4 (1) 设$E=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,则0是$E$的唯一聚点且不属于$E$.

(2) 设$E=(0,1)\cup\{-2,2\}$,则$E^{\circ}=(0,1)$,$E'=[0,1]$,且$\overline{E}=[0,1]\cup\{-2,2\}$.

显然$\varnothing$和$\mathbf{R}$既是开集又是闭集.不难证明下面几个定理:

定理 1.3.1 (1) 任意多个开集的并集是开集.

(2) 有限多个开集的交集是开集.

定理 1.3.2 (1) 任意多个闭集的交集是闭集.

(2) 有限多个闭集的并集是闭集.

定理 1.3.3 (1) 开集的余集是闭集.

(2) 闭集的余集是开集.

例 1.5 因为

$$[0,1]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right),$$

$$(0,1)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+2},1-\frac{1}{n+2}\right],$$

所以无穷多个开集的交集不一定是开集,无穷多个闭集的并集不一定是闭集.

定义 1.3.2 如果集合A能表示成无穷多个开集的交集,则称A为G_δ型集,如果集合B能表示成无穷多个闭集的并集,则称B为F_σ型集.

定义 1.3.3 设G是$\mathbf{R}$中的开集,$(a,b)\subseteq G$,但$a\notin G$,$b\notin G$,则称(a,b)为G的一个构成区间(constitutive interval).

注:a可以是$-\infty$,b可以是$+\infty$.

引理 1.3.4 设G是$\mathbf{R}$中的开集,则G中每一点必属于G的一个构成区间.

证明 设$x_0\in G$,由G是开集,存在$\delta_0>0$,使得

$$(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subseteq G.$$

令

$$a = \inf\{x : x < x_0, (x, x_0) \subseteq G\}, b = \sup\{x : x > x_0, (x_0, x) \subseteq G\},$$

其中 a 可能为 $-\infty$,b 可能为 $+\infty$.

显然 $x_0 \in (a,b)$. 下面证 (a,b) 是 G 的一个构成区间.

事实上,$\forall x \in (a,b)$,不妨设 $a < x < x_0$,取 a_1 使得 $a < a_1 < x$,则由下确界定义知

$$(a_1, x_0) \subseteq G.$$

从而 $x \in (a_1, x_0) \subseteq G$. 由 x 的任意性得 $(a,b) \subseteq G$.

如果 $a = -\infty$,则 $a \notin G$. 如果 a 是有限且 $a \in G$ 时,因为 G 是开集,所以存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$(a - \delta_0, a + \delta_0) \subseteq G.$$

进而我们得到

$$(a - \delta_0, x_0) \subseteq G.$$

但 $a - \delta_0 < a$,这与 a 的定义矛盾. 因此 $a \notin G$. 同理可证 $b \notin G$. 所以 (a,b) 是 G 的一个构成区间.

证毕.

定理 1.3.5 (开集构造)若 G 是 $\mathbf{R}$ 中的非空开集,则 G 可以表示为至多可数个两两不相交的开区间的并. 即

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda),$$

其中 Λ 为至多可数集,(a_λ, b_λ) 为 G 的构成区间.

证明 由引理 1.3.4 知

$$G = \bigcup_{x \in G} (a_x, b_x).$$

接下来证明:若 $\forall x_1 \neq x_2 \in G$,则 $(a_{x_1}, b_{x_1}) \cap (a_{x_2}, b_{x_2}) = \varnothing$ 或 $(a_{x_1}, b_{x_1}) = (a_{x_2}, b_{x_2})$.

对于任何有限区间 $(a_{x_1}, b_{x_1}) \cap (a_{x_2}, b_{x_2}) \neq \varnothing$,存在 $x_0 \in (a_{x_1}, b_{x_1}) \cap (a_{x_2}, b_{x_2})$.

所以

$$a_{x_1} < x_0 < b_{x_2} \quad \text{并且} \quad a_{x_2} < x_0 < b_{x_1}.$$

因为 $a_{x_2} \notin G$,所以 $a_{x_2} \notin (a_{x_1}, b_{x_1})$,于是

$$a_{x_2} \leqslant a_{x_1}.$$

同理可证

$$a_{x_1} \leqslant a_{x_2}.$$

这样得到

$$a_{x_1} = a_{x_2}.$$

类似地也可以证明 $b_{x_1} = b_{x_2}$. 所以 $(a_{x_1}, b_{x_1}) = (a_{x_2}, b_{x_2})$. 因此 G 可以改写为

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda).$$

对每一个 $\lambda \in \Lambda$, (a_λ, b_λ) 至少含有一个有理数与它对应,而有理数是可数的,所以集合 λ 是至多可数集.

证毕.

由于闭集的余集是开集,类似于定理 1.3.5,我们得到闭集的构造定理,这里不再赘述. 读者可以参考其他实变函数论专著(如本书参考文献[1]-[3]).

1.3.2 完备集与 Cantor 三分集

定义 1.3.4 设 $E \subseteq \mathbf{R}$,

(1) 如果 $E' = E$,则称 E 是完备集(perfect set).

(2) 如果 $x \in E$ 但 x 不是 E 的聚点,则称 x 为 E 的孤立点(isolated point).

(3) 如果 $\mathbf{R}$ 中任何非空开集必有非空开子集与 E 不相交,则称 E 为疏集(nowhere dense set).

(4) 如果 $\mathbf{R}$ 中任何非空开集 G 使得 $G \cap E \neq \varnothing$,则称 E 为稠集(dense set).

例 1.6 (1) 闭区间 $[0,1]$ 是完备集.

(2) 令 $E = [0,1] \cup \{2,3\}$,则 $E' = [0,1]$,且 2 和 3 是 E 的孤立点.

(3) 整数集 $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的疏集.

(4) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的稠集.

读者不难证明下面定理:

定理 1.3.6 设 $E \subseteq \mathbf{R}$,则

(1) E 为 $\mathbf{R}$ 中的疏集 $\Leftrightarrow (\overline{E})^\circ = \varnothing$.

(2) E 为 $\mathbf{R}$ 中的稠集 $\Leftrightarrow \overline{E} = \mathbf{R}$.

完备集具有非常好的性质,它既是闭集,又不含孤立点,即每个点都是聚点. 我们知道闭区间或若干个闭区间的并集都是完备集,但完备集可能更复杂,Cantor 三分集证明了它的逆命题不正确. 接下来我们构造 Cantor 三分集(ternary set).

第一步,将闭区间$[0,1]$挖去开区间 $I_{1,1} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,得到剩下闭集 $C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$;

第二步,将剩下闭集 C_1 挖去开区间 $I_{2,1} = \left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)$, $I_{2,2} = \left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$,得到剩下闭集 $C_2 = \left[0,\frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2},1\right]$;

上述过程无限进行下去,我们将闭区间$[0,1]$挖去开集 G 为

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k},$$

其中$\{I_{n,k}\}$是两两互不相交且无公共端点的开区间族,而且它们都不以 0 和 1 为其端点. 于是得到

$$C = [0,1] \backslash G.$$

称 C 为 Cantor 三分集.

次数	去掉开区间	个数、长度	剩下闭集	个数、长度
1	$I_{1,1} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$	$1,\frac{1}{3}$	$C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] = C_{1,1} \cup C_{1,2}$	$2,\frac{1}{3}$
2	$I_{2,1} = \left(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2}\right)$, $I_{2,2} = \left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right)$	$2,\frac{1}{3^2}$	$C_2 = \left[0,\frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right] \cup \left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right] \cup$ $\left[\frac{8}{3^2},1\right] = C_{2,1} \cup C_{2,2} \cup C_{2,3} \cup C_{2,4}$	$2^2,\frac{1}{3^2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$I_{n,1} = \left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\cdots$, $I_{n,2^{n-1}} = \left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$	$2^{n-1},\frac{1}{3^n}$	$C_n = \left[0,\frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{2}{3^n},\frac{3}{3^n}\right] \cup \cdots \cup$ $\left[\frac{3^n-1}{3^n},1\right] = C_{n,1} \cup C_{n,2} \cup \cdots \cup C_{n,2^n}$	$2^n,\frac{1}{3^n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

图 1.1 Cantor 三分集的构造

定理 1.3.7 Cantor 三分集 C 具有下面的性质：

(1) C 是闭集.

(2) C 不含任何区间，即 C 没有内点，并且 C 是疏集.

(3) C 是完备集或 C 中无孤立点.

(4) C 具有连续势.

(5) C 的“长度”是 0.

证明 (1) 显然 C 是闭集.

(2) 用反证法. 若不然，设区间 $I\subseteq C$，考虑点

$$\frac{k}{3^n},\quad k=0,1,2,\cdots,3^n$$

相邻两点的距离是$\frac{1}{3^n}$，它们在$[0,1]$上是均匀分布的. 当 n 充分大时，相邻两点的距离满足

$$\frac{1}{3^n}<|I|,$$

其中 $|I|$ 表示区间的长度.

于是存在 $0\leqslant j_0\leqslant 3^n$ 使得

$$\left(\frac{j_0}{3^n},\frac{j_0+1}{3^n}\right)\subseteq I\subseteq C.$$

根据 C 的构造方法，区间$\left(\frac{j_0}{3^n},\frac{j_0+1}{3^n}\right)$中至少中间的$\frac{1}{3}$开区间是要挖掉的，不属于 C，矛盾！所以 C 不含任何区间，即 C 没有内点.

对于 $\mathbf{R}$ 中的任何非空开集 O，如果 $O\cap(0,1)=\varnothing$，则必有非空开子集与 C 不相交. 如果 $O\cap(0,1)\neq\varnothing$，则 $O\cap(0,1)\backslash C$ 为开集，所以必有非空开子集 $G\subseteq O\cap(0,1)\backslash C$，这样 $G\cap C=\varnothing$. 因此 C 是疏集.

(3) 因为 C 是闭集，我们只要证明 $C\subseteq C'$，即 C 每一个点都是聚点. $\forall x\in C$，为了方便，不妨设 $x\in(0,1)$，所以任意开区间(α,β)，$0<\alpha<x<\beta<1$，使得

$$x\in(\alpha,\beta).$$

根据 C 的构造方法，我们知道闭区间 $C_{n,k}$ 长度为$\frac{1}{3^n}$，所以存在充分大的 N_0，使得

$$\frac{1}{3^{N_0}} < \min\{x-\alpha, \beta-x\}.$$

因为 $x \in C$，则 x 是永远删不去的点，x 也应该属于删去 N_0 次以后所剩下的某个闭区间中，设它为 $C_{N_0,k}$，这样 $C_{N_0,k} \subseteq (\alpha,\beta)$，于是它的两个端点也就在$(\alpha,\beta)$ 中，但这两个端点都是属于 C 的点，所以(α,β) 中至少有一个异于 x 且属于 C 的点，这证明了 $x \in C'$. 因此 C 是完备集或 C 中无孤立点.

(4) 我们知道 $\forall x \in (0,1)$，都唯一表示为三进制数，使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

其中 $a_n = 0,1,2$.

因为 $\forall x \in I_{1,1} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，则 $a_1 = 1$. 同样 $\forall x \in I_{2,1} = \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$及 $\forall x \in I_{2,2} = \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$，则 $a_2 = 1$. $I_{3,k}, k = 1,2,3,4$ 中所有点 x 必有 $a_3 = 1$，等等. 即对 G 中的所有 x，必有某项 $a_n = 1$. 因此 $\forall x \in C \cap (0,1)$，则

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},$$

其中 $a_n = 0,2$.

令 $f: C \cap (0,1) \to (0,1)$

$$f(x) = 0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\cdots\frac{a_n}{2}\cdots,$$

不难验证 f 是 $C \cap (0,1)$ 到$(0,1)$ 上的 1-1 对应，所以 C 具有连续势.

(5) 因为区间 $|I_{n,k}|$ 的长度为

$$|I_{n,k}| = \frac{1}{3^n}, \quad n = 1,2,\cdots, \quad k = 1,2,\cdots,2^{n-1},$$

所以开集 G 的所有开子区间长度总和为