

普通高等教育规划教材

高等数学

下 册

GAODENG SHUXUE

郑金梅 唐定云 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育规划教材

高等数学

下册

主 编	郑金梅	唐定云
副主编	吴明科	文华艳
参 编	张媛媛	

机械工业出版社

本书分上、下两册，下册内容包括向量与空间解析几何、多元函数的微分、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数以及微分方程。在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求。为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题。

本书适合作为高等院校理工类、经管类专业的教材，也可作为其他学科学生学习高等数学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册/郑金梅, 唐定云主编. —北京:
机械工业出版社, 2016.2
普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-111-52914-9
I. ①高… II. ①郑…②唐… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 019664 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 王玉鑫 责任编辑: 王玉鑫 王 芳

责任校对: 张 薇 封面设计: 张 静

责任印制: 乔 宇

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·12.25 印张·300 千字

0 001—3 000 册

标准书号: ISBN 978-7-111-52914-9

定价: 27.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: 010-88379833

机工官网: www.cmpbook.com

读者购书热线: 010-88379649

机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网: www.golden-book.com

前 言

本书是根据高等应用型工科院校的教学要求，在作者多年教学实践的基础上，为满足高等数学课程模块化教学改革要求而编写的。本书在编写上突出了数学知识的系统性、实用性，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识。

本书分上、下两册，下册内容包括向量与空间解析几何、多元函数的微分、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数以及微分方程。在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求。为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题。

本书由西南科技大学城市学院数学教研室组织编写，郑金梅、唐定云为主编，吴明科、文华艳为副主编，张媛媛参加编写。

由于编者水平有限，且各专业对高等数学的要求不尽相同，因而本书在内容上存在的不妥之处，希望广大读者批评指正。

编 者

2015.12

目 录

前言

第七章 向量与空间解析几何

第一节 向量代数/1

一、空间直角坐标系及向量的概念/1

二、向量的运算/2

三、向量间的关系/3

四、向量的模、方向角/4

习题 7-1/5

第二节 空间平面/5

一、空间平面的方程/5

二、平面间的关系/7

习题 7-2/8

第三节 空间直线/8

一、空间直线的方程/8

二、直线间的关系/10

三、线面间的关系/10

习题 7-3/13

第四节 曲面与空间曲线方程/13

一、曲面方程/13

二、空间曲线的方程/17

三、空间曲线在坐标面上的投影/18

习题 7-4/19

第五节 向量代数应用模块/20

第八章 多元函数的微分

第一节 多元函数的概念/23

一、平面上的点集/23

二、二元函数/24

第二节 二元函数的极限与连续性/25

一、二元函数的极限/25

二、二元函数的连续性/26

习题 8-2/27

第三节 偏导数/28

一、偏导数/28

二、高阶偏导数/29

习题 8-3/30

第四节 全微分/31

一、全微分的定义/31

二、函数可微的条件/31

三、全微分在近似计算中的应用/33

习题 8-4/34

第五节 复合函数的求导法则/34

一、链式法则/34

二、全微分形式不变性/37

习题 8-5/37

第六节 隐函数的导数/38

一、一个方程的情形/38

二、方程组的情形/39

习题 8-6/40

第七节 多元函数微分法在几何上的应用/41

一、空间曲线的切线与法平面/41

二、曲面的切平面与法线/42

习题 8-7/44

第八节 方向导数与梯度/45

一、方向导数/45

二、梯度/47

习题 8-8/48

第九节 多元函数的极值/49

一、多元函数极值的计算/49

二、多元函数最值的计算/51

三、条件极值 / 51

习题 8-9 / 53

第十节 多元函数微分学应用模块 / 54

一、偏导数应用模块 / 54

二、全微分应用模块 / 57

三、极值应用模块 / 60

第九章 重积分

第一节 二重积分的概念与性质 / 64

一、二重积分的概念 / 64

二、二重积分的性质 / 66

习题 9-1 / 68

第二节 二重积分的计算法 / 68

一、在直角坐标系下计算二重积分 / 68

二、在极坐标系下计算二重积分 / 71

习题 9-2 / 74

第三节 二重积分的几何应用 / 75

一、立体体积与平面面积 / 75

二、曲面面积 / 76

习题 9-3 / 78

第四节 三重积分及其计算 / 78

一、三重积分的概念及性质 / 78

二、三重积分的计算 / 79

习题 9-4 / 83

第五节 重积分应用模块 / 83

一、二重积分应用模块 / 84

二、三重积分应用模块 / 87

第十章 曲线积分与曲面积分

第一节 对弧长的曲线积分 / 89

一、对弧长的曲线积分的概念与性质 / 89

二、对弧长的曲线积分的计算 / 91

习题 10-1 / 92

第二节 对坐标的曲线积分 / 93

一、对坐标的曲线积分的概念与性质 / 93

二、对坐标的曲线积分的计算 / 95

习题 10-2 / 97

第三节 格林公式及其应用 / 98

一、格林公式 / 98

二、平面上曲线积分与路径无关的条件 / 100

三、二元函数的全微分求积分 / 101

习题 10-3 / 103

第四节 对面积的曲面积分 / 104

一、对面积的曲面积分的概念与性质 / 104

二、对面积的曲面积分的计算 / 105

习题 10-4 / 106

第五节 对坐标的曲面积分 / 107

一、对坐标的曲面积分的概念与性质 / 107

二、对坐标的曲面积分的计算法 / 110

习题 10-5 / 111

第六节 高斯公式和斯托克斯公式 / 112

一、高斯公式 / 112

二、斯托克斯公式 / 113

习题 10-6 / 114

第七节 线面积分应用模块 / 114

一、第一型线面积分应用模块 / 115

二、第二型线面积分应用模块 / 117

三、格林公式与高斯公式应用模块 / 118

第十一章 无穷级数

第一节 常数项级数的概念和性质 / 120

一、常数项级数的概念 / 120

二、收敛级数的基本性质 / 123

习题 11-1 / 125

第二节 常数项级数的审敛法 / 125

一、正项级数及其审敛法 / 125

二、交错级数及其审敛法 / 131

三、绝对收敛与条件收敛 / 132

习题 11-2 / 133

第三节 幂级数 / 135

一、函数项级数的概念 / 135

二、幂级数及其收敛性 / 136

三、收敛幂级数的性质 / 139

习题 11-3 / 140

第四节 函数展开成幂级数 / 141

一、泰勒级数 / 141

二、函数展开成幂级数 / 143

习题 11-4 / 145

第五节 函数的幂级数展开式在近似中的应用 / 146

一、近似计算的思路 / 146

二、精度的控制 / 146

习题 11-5 / 148

第六节 傅里叶级数 / 148

一、正交函数系 / 149

二、以 2π 为周期的函数的傅里叶级数 / 149

三、傅里叶级数的收敛性 / 151

习题 11-6 / 152

第七节 正弦级数与余弦级数 / 153

习题 11-7 / 155

第十二章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念 / 156

一、引例 / 156

二、基本概念 / 157

习题 12-1 / 159

第二节 一阶微分方程 / 160

一、可分离变量的微分方程 / 160

二、齐次方程 / 162

三、一阶线性微分方程 / 163

习题 12-2 / 167

第三节 可降阶的高阶微分方程 / 168

一、 $y=f(x)$ 型的微分方程 / 168

二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程 / 169

三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程 / 171

习题 12-3 / 172

第四节 二阶常系数线性微分方程 / 172

一、二阶常系数齐次线性微分方程 / 172

二、二阶常系数非齐次线性微分方程 / 175

习题 12-4 / 180

第五节 微分应用模块 / 181

一、工程应用模块 / 181

二、经济应用模块 / 185

参考文献 / 188

利用数形结合的思想将图形与方程相对应,从而能够用代数研究几何问题,这样便产生了解析几何.向量是一个兼具“数”和“形”的工具,因此它在解析几何中有广泛的应用.

本章首先建立空间直角坐标系,引进向量的概念和一些运算,然后利用向量的运算建立空间的平面和直线方程,最后讨论空间曲线和曲面的一般方程以及二次曲面的几何特性.

第一节 向量代数

一、空间直角坐标系及向量的概念

定义 1 在空间中,有三条交于一点(原点 O)的两两垂直的数轴,依次称为 x 轴、 y 轴和 z 轴,其方向符合右手规则:用右手握住 z 轴,当四指从 x 轴正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度弯向 y 轴正方向时,拇指伸直的方向与 z 轴正方向一致.这样的三条数轴构成了空间直角坐标系(见图 7-1),三条数轴中任意两条确定的平面称为坐标面,如 x 轴及 y 轴确定的平面叫作 Oxy 面, y 轴及 z 轴和 z 轴及 x 轴所确定的平面分别叫作 Oyz 面及 Oxz 面.

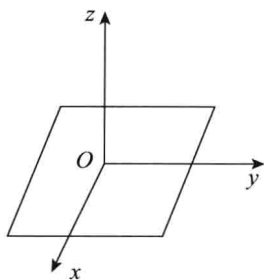


图 7-1

定义 2 在空间直角坐标系中有一点 A ,过 A 向三条数轴做垂直平面,交点依次为 P , Q , R (见图 7-2). 设这三个交点在坐标轴上的坐标分别为 x , y , z , 则称 (x, y, z) 为空间点 A 的坐标.

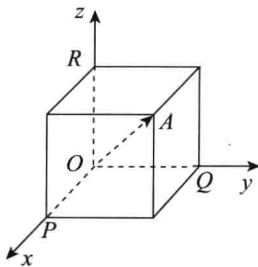


图 7-2

定义 3 在空间直角坐标系中有两点 A , B , 称由 A 到 B 的有向线段为空间向量, 记为 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\mathbf{a}$ 其中 A 为 $\overrightarrow{AB}$ 的起点, B 为 $\overrightarrow{AB}$ 的终点, 线段的长度称为 $\overrightarrow{AB}$ 的模, 记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$. 有向线段的方向

称为向量的方向. 模为 1 的向量称为单位向量, 通常记为 $\mathbf{e}$; 模为 0 的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$.

向量实际上是既有大小(即模)又有方向的量. 在物理学上有很多量均为向量(也称为矢量), 如力、速度、加速度等.

很多讨论向量的场合, 常和向量的起点无关. 对于起点不在坐标原点的向量, 都可以平移到起点为原点的向量, 于是下面仅仅定义起点在原点的向量坐标.

定义 4 设空间向量 $\overrightarrow{AB}$, 起点 A 与原点 O 重合, 且 $B(x, y, z)$, 则称 (x, y, z) 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标, 记为 $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$.

二、向量的运算

1. 线性运算

为讨论方便, 以下所提向量若无特殊说明均为以原点为起点的空间向量.

定义 5 设任意向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则以下运算都称为线性运算,

(1) 加法: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.

(2) 数乘: $\lambda \mathbf{a} = \lambda (x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

向量的加法运算符合平行四边形法则及三角形法则(见图 7-3). 向量的减法可以转化为加法, 即

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

其中 $-\mathbf{b}$ 为 $\mathbf{b}$ 的相反向量(与 $\mathbf{b}$ 模相等、方向相反的向量).



图 7-3

利用减法运算可定义起点不在原点的向量的坐标. 设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则向量

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

设 $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$, 则由向量的线性运算可得

$$\overrightarrow{AB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

其中 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 分别为与坐标轴同向的单位向量.

2. 数量积

定义 6 设向量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, 称实数

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积或内积, 记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. 其中 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角.

在物理学中, 数量积可以表示很多量, 如恒力沿直线所做的功 (见图 7-4)

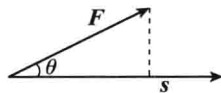


图 7-4

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos \langle \mathbf{F}, \mathbf{s} \rangle$$

由数量积的定义可得以下运算性质:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$;
- (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- (3) 非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 有 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$;
- (4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$;
- (5) $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \cdot (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

3. 向量积

定义 7 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 向量 $\mathbf{c}$ 垂直于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 所确定的平面, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的方向满足右手规则, 而

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

则称向量 $\mathbf{c}$ 为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的向量积或外积, 记为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (见图 7-5).

由向量积的定义可以得到:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- (2) 任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 有 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$;
- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$;
- (4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$;
- (5) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$;
- (6) $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}|$.

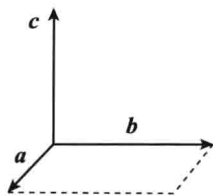


图 7-5

设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则由向量积的运算性质有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}) \times (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \mathbf{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \mathbf{k}$$

为了方便记忆, 上式可表为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

三、向量间的关系

向量之间有相等、垂直、平行等特殊关系.

如果两个向量的模相等、方向相同, 则两个向量相等.

设 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

其中分式为形式分式, 当分母不为 0 时, 和通常分式的意义相同. 当分母等于 0 时, 规定分子同时取 0, 例如分式

$$\frac{x_1}{0} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \text{ 其中 } y_2, z_2 \neq 0$$

等价于 $x_1 = 0$ 并且 $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

如果 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 则

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

四、向量的模、方向角

1. 向量模的计算

设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, 则由勾股定理可得空间两点距离公式

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

设空间向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 则有 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, 其中 $O(0, 0, 0)$, $A(x, y, z)$, 由两点距离公式可以得到向量 $\mathbf{a}$ 的模的计算公式

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. 方向角与方向余弦

定义 8 非零向量 $\mathbf{a}$ 与三条坐标轴正方向的夹角 α, β, γ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角, 方向角的余弦称为方向余弦.

设 $\mathbf{a} = (x, y, z)$, 不妨设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, 其中 $O(0, 0, 0)$, $A(x, y, z)$, 则其方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

同理可得

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

显然有

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

习 题 7-1

① 在 Oyz 面上, 求与三个已知点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

② 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴, y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4, 7, 求这向量的起点 A 的坐标.

③ 求平行于向量 $\mathbf{a} = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

④ 设 $\mathbf{a} = (3, 5, -2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 具有怎样的关系, 才能使 $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ 与 z 轴垂直?

⑤ 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两垂直, 且 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$, 求 $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 的长度及它和 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的夹角.

第二节 空间平面

在平面解析几何中, 由不同的方式可以得到不同的直线方程. 对空间平面来讲也一样.

一、空间平面的方程

1. 平面的点法式方程

定义 1 垂直于平面的非零向量称为该平面的法向量, 通常记为 $\mathbf{n}$.

由平面经过一点, 且给定平面的一个法向量, 则该平面被唯一确定. 因此有下面的定理.

定理 1 设平面 Π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为其一个法向量 (见图 7-6), 则平面 Π 的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

证明 设任意点 $M(x, y, z) \in \Pi$, 则 $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$, 所以

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$$

而 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\mathbf{n} = (A, B, C)$, 故有

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

方程 (1) 称为平面的点法式方程.

例 1 求过点 $M(0, -2, 3)$, 且以 $\mathbf{n} = (1, 2, -3)$ 为法向量的平面方程.

解 由点法式方程有

$$1(x-0) + 2(y+2) - 3(z-3) = 0$$

即
$$x + 2y - 3z + 13 = 0$$

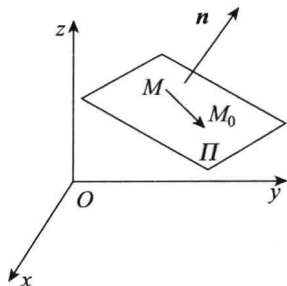


图 7-6

2. 平面的一般方程

方程 (1) 可以化简为

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

则称其为平面的一般方程, 其中 A, B, C 不全为零, 且 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. 从下面这个定理可以看出三元一次方程与平面一般方程的关系.

定理 2 任意平面都可以用三元一次方程表示, 反之任意三元一次方程都可以表示一个平面.

证明 仅证结论的第二部分. 设任意三元一次方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

且 (x_0, y_0, z_0) 为其一个解, 则有

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

两式相减得

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

这个方程表示过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面. 显然它与式 (2) 是等价的, 所以 $Ax + By + Cz + D = 0$ 表示平面.

在一般方程中, 若系数 A, B, C 取某些特殊值, 则方程表示的平面也是特殊的.

定理 3 设平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C 不全为零), 则

- (1) $D = 0$ 当且仅当 $(0, 0, 0) \in \Pi$;
- (2) $A = 0$ 当且仅当 $\Pi \parallel x$ 轴或 x 轴在 Π 上;
- (3) 由 $A = B = 0$, 则 z 轴 $\perp \Pi$.

例 2 已知平面通过 y 轴, 且过点 $(4, -1, 2)$, 求平面方程.

解 设过 y 轴的平面为

$$Ax + Cz = 0$$

因点 $(4, -1, 2)$ 在平面上, 则

$$4A + 2C = 0$$

解得 $C = -2A$. 代入所设方程, 得平面方程

$$x - 2z = 0$$

3. 平面的截距式方程

设平面 Π 过三点 $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$, $R(0, 0, c)$ (见图 7-7), 其中 a, b, c 均不为零, 平面 Π 的方程可设为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

将三点的坐标代入方程有

$$\begin{cases} aA + D = 0 \\ bB + D = 0 \\ cC + D = 0 \end{cases}$$

得 $A = -\frac{D}{a}$, $B = -\frac{D}{b}$, $C = -\frac{D}{c}$. 代入一般方程可得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

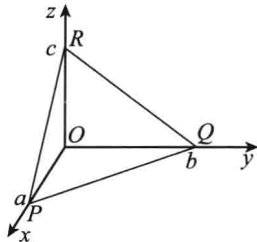


图 7-7

该方程称为平面的截距式方程, 其中 a, b, c 分别称为平面在 x, y, z 轴上的截距.

二、平面间的关系

1. 平面间的位置关系

设两平面

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

则其法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 则有

$$\Pi_1 \text{ 平行或重合 } \Pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

2. 两平面的夹角

两平面法向量的夹角 (指小于或等于 $\frac{\pi}{2}$ 的角) 称为两平面的夹角.

设两平面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 两平面的夹角 θ 的余弦公式为

$$\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right|$$

例 3 已知平面过两点 $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, 1, -1)$, 且垂直于平面 $x + y + z = 0$, 求该平面的方程.

解 设所求平面的法向量为 $\mathbf{n}$, 已知平面的法向量为 $\mathbf{n}_0 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$, 则

$$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1 M_2}$$

故可取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 \times \overrightarrow{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (-2, 1, 1)$$

故所求平面方程为

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

即

$$2x - y - z = 0$$

习 题 7-2

- ① 求通过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.
- ② 求过三点 $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$ 及 $(1, -1, 2)$ 的平面方程.
- ③ 求过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a} = (2, 1, 1)$ 和 $\boldsymbol{b} = (1, -1, 0)$ 的平面方程.
- ④ 求与已知平面 $2x + y + 2z + 5 = 0$ 平行且与三坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面方程.

第三节 空间直线

一、空间直线的方程

1. 直线的参数方程及对称式方程

定义 1 平行于直线的非零向量称为直线的方向向量, 通常记为 $\boldsymbol{s}$.

显然若直线经过一点, 且有一个方向向量, 则直线被唯一确定.

定理 1 设直线 l 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为其一个方向向量(见图 7-8), 则直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

或者

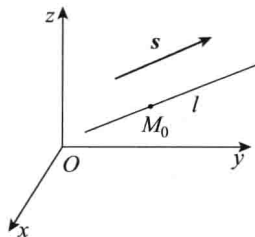


图 7-8

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

证明 设任意点 $M(x, y, z) \in l$, 则

$$\overrightarrow{M_0M} // s$$

而 $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 则

$$\overrightarrow{M_0M} = t s, \quad t \in \mathbf{R}$$

即

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = (mt, nt, pt)$$

从而

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (3)$$

从中消去 t 得

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (4)$$

其中式 (3) 称为直线的参数方程, 式 (4) 称为直线的对称式方程或点向式方程.

例 1 求过两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程.

解 取直线的方向向量

$$s = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

故所求的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

2. 直线的一般方程

空间中任意直线 L 均可看作两个相交平面的交线, 因此将两个平面的方程联立, 即可表示空间直线:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称这个方程为平面的一般方程.

例 2 将直线 L 的方程

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

转化为对称式方程.

解 取 $x=1$, 解得 $y=-1$, $z=-1$, 所以 $(1, -1, -1) \in L$. 取直线的方向向量为

$$s = (1, 1, 1) \times (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -1, -3)$$

故直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-3}$$

二、直线间的关系

1. 直线间的位置关系

设两直线 L_1, L_2 的方向向量为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1), s_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 则

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 \text{ 平行或重合于 } L_2 \Leftrightarrow s_1 // s_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

2. 直线间的夹角

两直线的方向向量的夹角(指小于或等于 $\frac{\pi}{2}$ 的角)称为两直线的夹角.

设两直线的方向向量分别为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1), s_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 两直线夹角 θ 的余弦公式为

$$\cos \theta = |\cos \langle s_1, s_2 \rangle| = \left| \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} \right|$$

例 3 求经过点 $(4, 0, -2)$ 且平行于直线 $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ 的直线方程.

解 已知直线的方向向量为

$$s = (4, -1, 3)$$

则所求直线方程为

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

三、线面间的关系

1. 线面间的位置关系

设直线 $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, 平面 $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$, 则直线 L 的方向向量为 $s = (m, n, p)$, 平面 Π 的法向量 $n = (A, B, C)$, 所以

$$(1) L \perp \Pi \Leftrightarrow s // n \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$

$$(2) L // \Pi \text{ 或 } L \subseteq \Pi \Leftrightarrow s \perp n \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

当 $Am + Bn + Cp \neq 0$ 时, L 与 Π 相交. 容易得到直线 L 的参数方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (5)$$