普通高等教育规划教材

高等数学

下册

GAODENG SHUXUE

郑金梅　唐定云　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

高等数学

下册

主　编　郑金梅　唐定云

副主编　吴明科　文华艳

参　编　张媛媛

机械工业出版社

本书分上、下两册，下册内容包括向量与空间解析几何、多元函数的微分、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数以及微分方程. 在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求. 为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题.

本书适合作为高等院校理工类、经管类专业的教材，也可作为其他学科学生学习高等数学的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册/郑金梅，唐定云主编. —北京：机械工业出版社，2016. 2

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-52914-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①郑…②唐… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 019664 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：王玉鑫 责任编辑：王玉鑫 王 芳

责任校对：张 薇 封面设计：张 静

责任印制：乔 宇

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2016 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 12.25 印张 · 300 千字

0 001—3 000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-52914-9

定价：27.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前　言

本书是根据高等应用型工科院校的教学要求，在作者多年教学实践的基础上，为满足高等数学课程模块化教学改革要求而编写的. 本书在编写上突出了数学知识的系统性、实用性，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识.

本书分上、下两册，下册内容包括向量与空间解析几何、多元函数的微分、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数以及微分方程. 在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求. 为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题.

本书由西南科技大学城市学院数学教研室组织编写，郑金梅、唐定云为主编，吴明科、文华艳为副主编，张媛媛参加编写.

由于编者水平有限，且各专业对高等数学的要求不尽相同，因而本书在内容上存在的不妥之处，希望广大读者批评指正.

编　者

2015. 12

目　录

第九章 重积分

第十章 曲线积分与曲面积分

第十一章 无穷级数

第十二章　微分方程

第七章 向量与空间解析几何

利用数形结合的思想将图形与方程相对应，从而能够用代数研究几何问题，这样便产生了解析几何. 向量是一个兼具“数”和“形”的工具，因此它在解析几何中有广泛的应用.

本章首先建立空间直角坐标系，引进向量的概念和一些运算，然后利用向量的运算建立空间的平面和直线方程，最后讨论空间曲线和曲面的一般方程以及二次曲面的几何特性.

第一节 向量代数

一、空间直角坐标系及向量的概念

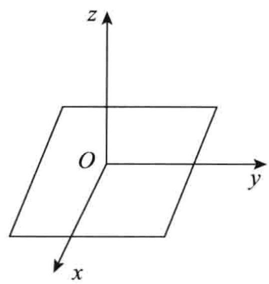

图 7-1

定义 1 在空间中，有三条交于一点(原点 O)的两两垂直的数轴，依次称为 x 轴、y 轴和 z 轴，其方向符合右手规则：用右手握住 z 轴，当四指从 x 轴正方向以$\frac{\pi}{2}$角度弯向 y 轴正方向时，拇指伸直的方向与 z 轴正方向一致. 这样的三条数轴构成了空间直角坐标系(见图 7-1)，三条数轴中任意两条确定的平面称为坐标面，如 x 轴及 y 轴确定的平面叫作 Oxy 面，y 轴及 z 轴和 z 轴及 x 轴所确定的平面分别叫作 Oyz 面及 Oxz 面.

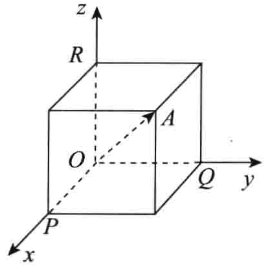

图 7-2

定义 2 在空间直角坐标系中有一点 A，过 A 向三条数轴做垂直平面，交点依次为 P，Q，R（见图 7-2). 设这三个交点在坐标轴上的坐标分别为 x，y，z，则称（x,y,z）为空间点 A 的坐标.

定义 3 在空间直角坐标系中有两点 A，B，称由 A 到 B 的有向线段为空间向量，记为$\overrightarrow{AB}$或$\boldsymbol{a}$ 其中 A 为$\overrightarrow{AB}$的起点，B 为$\overrightarrow{AB}$的终点，线段的长度称为$\overrightarrow{AB}$的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 有向线段的方向

称为向量的方向. 模为 1 的向量称为单位向量，通常记为$\boldsymbol{e}$；模为 0 的向量称为零向量，记为$\boldsymbol{0}$.

向量实际上是既有大小(即模)又有方向的量. 在物理学上有很多量均为向量（也称为矢量），如力、速度、加速度等.

很多讨论向量的场合，常和向量的起点无关. 对于起点不在坐标原点的向量，都可以平移到起点为原点的向量，于是下面仅仅定义起点在原点的向量坐标.

定义 4 设空间向量$\overrightarrow{AB}$，起点 A 与原点 O 重合，且 $B(x,y,z)$，则称（x,y,z）为向量$\overrightarrow{AB}$的坐标，记为$\overrightarrow{AB}=(x,y,z)$.

二、向量的运算

1. 线性运算

为讨论方便，以下所提向量若无特殊说明均为以原点为起点的空间向量.

定义 5 设任意向量$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则以下运算都称为线性运算，

（1）加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

（2）数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1,\ y_1,\ z_1)=(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1)$.

向量的加法运算符合平行四边形法则及三角形法则(见图 7－3). 向量的减法可以转化为加法，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

其中 $-\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量（与 $\boldsymbol{b}$ 模相等、方向相反的向量）.

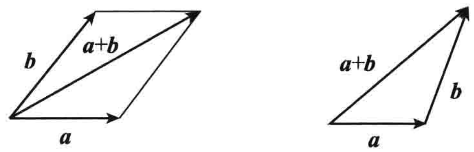

图 7－3

利用减法运算可定义起点不在原点的向量的坐标. 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则向量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

设$\overrightarrow{AB}=(x,y,z)$，则由向量的线性运算可得

$$\overrightarrow{AB}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为与坐标轴同向的单位向量.

2. 数量积

定义 6 设向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，称实数

$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$$

为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积或内积，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 其中$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

在物理学中，数量积可以表示很多量，如恒力沿直线所做的功（见图7-4）

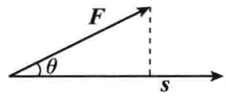

图7-4

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos<\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}>$$

由数量积的定义可得以下运算性质：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(3) 非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，有$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}$;

(5) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

3. 向量积

定义7　设向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，向量$\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所确定的平面，且$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$的方向满足右手规则，而

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$$

则称向量$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的向量积或外积，记为$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$（见图7-5）.

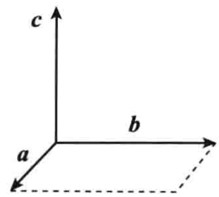

图7-5

由向量积的定义可以得到：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) 任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，有$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(5) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

(6) $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$.

设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则由向量积的运算性质有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}$$

为了方便记忆，上式可表为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$$

三、向量间的关系

向量之间有相等、垂直、平行等特殊关系.

如果两个向量的模相等、方向相同，则两个向量相等.

设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

其中分式为形式分式，当分母不为0时，和通常分式的意义相同．当分母等于0时，规定分子同时取0，例如分式

$$\frac{x_1}{0}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}，其中\ y_2，z_2\neq 0$$

等价于$x_1=0$并且$\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

如果$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

四、向量的模、方向角

1. 向量模的计算

设$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则由勾股定理可得空间两点距离公式

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

设空间向量$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则有$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，其中$O(0,0,0)$，$A(x,y,z)$，由两点距离公式可以得到向量$\boldsymbol{a}$的模的计算公式

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2. 方向角与方向余弦

定义8 非零向量$\boldsymbol{a}$与三条坐标轴正方向的夹角α，β，γ称为向量$\boldsymbol{a}$的方向角，方向角的余弦称为方向余弦.

设$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，不妨设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，其中$O(0,0,0)$，$A(x,y,z)$，则其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|OA|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

同理可得

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}，\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

习　题 7-1

❶ 在 Oyz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

❷ 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4，7，求这向量的起点 A 的坐标.

❸ 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

❹ 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 具有怎样的关系，才能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

❺ 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度及它和 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的夹角.

第二节　空间平面

在平面解析几何中，由不同的方式可以得到不同的直线方程. 对空间平面来讲也一样.

一、空间平面的方程

1. 平面的点法式方程

定义 1　垂直于平面的非零向量称为该平面的法向量，通常记为 $\boldsymbol{n}$.

由平面经过一点，且给定平面的一个法向量，则该平面被唯一确定. 因此有下面的定理.

定理 1　设平面 Π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为其一个法向量（见图 7-6），则平面 Π 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{1}$$

证明　设任意点 $M(x,y,z)\in\Pi$，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，所以

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$$

而 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，故有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

方程（1）称为**平面的点法式方程**.

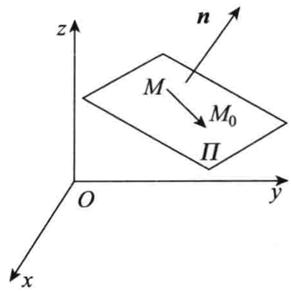

图 7-6

例 1 求过点 $M(0,-2,3)$，且以 $\boldsymbol{n}=(1,2,-3)$ 为法向量的平面方程.

解 由点法式方程有

$$1(x-0)+2(y+2)-3(z-3)=0$$

即
$$x+2y-3z+13=0$$

2. 平面的一般方程

方程（1）可以化简为

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

则称其为**平面的一般方程**，其中 A，B，C 不全为零，且 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. 从下面这个定理可以看出三元一次方程与平面一般方程的关系.

定理 2 任意平面都可以用三元一次方程表示，反之任意三元一次方程都可以表示一个平面.

证明 仅证结论的第二部分. 设任意三元一次方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

且(x_0,y_0,z_0)为其一个解，则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

两式相减得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

这个方程表示过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，以$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面. 显然它与式（2）是等价的，所以 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示平面.

在一般方程中，若系数 A，B，C 取某些特殊值，则方程表示的平面也是特殊的.

定理 3 设平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$（A，B，C 不全为零），则

（1）$D=0$ 当且仅当 $(0,0,0)\in\Pi$；

（2）$A=0$ 当且仅当 $\Pi//x$ 轴或 x 轴在 Π 上；

（3）由 $A=B=0$，则 z 轴 $\perp\Pi$.

例 2 已知平面通过 y 轴，且过点$(4,-1,2)$，求平面方程.

解 设过 y 轴的平面为

$$Ax+Cz=0$$

因点$(4,-1,2)$在平面上，则

$$4A+2C=0$$

解得 $C=-2A$. 代入所设方程，得平面方程

$$x-2z=0$$

3. 平面的截距式方程

设平面 Π 过三点 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$（见图 7－7），其中 a，b，c 均不为零，平面 Π 的方程可设为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

将三点的坐标代入方程有

$$\begin{cases} aA+D=0 \\ bB+D=0 \\ cC+D=0 \end{cases}$$

得 $A=-\dfrac{D}{a}$，$B=-\dfrac{D}{b}$，$C=-\dfrac{D}{c}$. 代入一般方程可得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

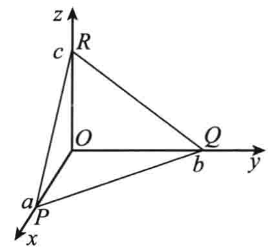

图 7－7

该方程称为**平面的截距式方程**，其中 a，b，c 分别称为平面在 x，y，z 轴上的**截距**.

二、平面间的关系

1. 平面间的位置关系

设两平面

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

则其法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则有

$$\Pi_1\text{ 平行或重合 }\Pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

2. 两平面的夹角

两平面法向量的夹角（指小于或等于$\dfrac{\pi}{2}$的角）称为两平面的夹角.

设两平面的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，两平面的夹角 θ 的余弦公式为

$$\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2>|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}\right|$$

例 3　已知平面过两点 $M_1(1,1,1)$，$M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面 $x+y+z=0$，求该平面的方程.

解　设所求平面的法向量为$\boldsymbol{n}$，已知平面的法向量为$\boldsymbol{n}_0=(1,1,1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$，则

$$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_0,\ \boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$$

故可取

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (-2,1,1)$$

故所求平面方程为

$$-2(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$$

即

$$2x - y - z = 0$$

习　题　7－2

❶ 求通过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

❷ 求过三点 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 及 $(1,-1,2)$ 的平面方程.

❸ 求过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$ 的平面方程.

❹ 求与已知平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行且与三坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面方程.

第三节　空间直线

一、空间直线的方程

1. 直线的参数方程及对称式方程

定义 1　平行于直线的非零向量称为直线的方向向量，通常记为 $\boldsymbol{s}$.

显然若直线经过一点，且有一个方向向量，则直线被唯一确定.

定理 1　设直线 l 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为其一个方向向量(见图 7－8)，则直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

或者

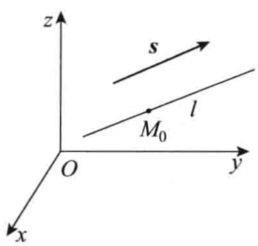

图 7－8

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

证明　设任意点 $M(x,y,z)\in l$，则

$$\overrightarrow{M_0M}\,/\!/\,\boldsymbol{s}$$

而 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，则

$$\overrightarrow{M_0M}=t\,\boldsymbol{s},\quad t\in\mathbf{R}$$

即

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(mt,nt,pt)$$

从而

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}\tag{3}$$

从中消去 t 得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\tag{4}$$

其中式（3）称为**直线的参数方程**，式（4）称为**直线的对称式方程或点向式方程**.

例 1　求过两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$的直线方程.

解　取直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

故所求的直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

2. 直线的一般方程

空间中任意直线 L 均可看作两个相交平面的交线，因此将两个平面的方程联立，即可表示空间直线：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

称这个方程为**平面的一般方程**.

例 2　将直线 L 的方程

$$\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x-y+3z=0\end{cases}$$

转化为对称式方程.

解　取 $x=1$，解得 $y=-1$，$z=-1$，所以$(1,-1,-1)\in L$. 取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,1,1)\times(2,-1,3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$$

故直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-3}$$

二、直线间的关系

1. 直线间的位置关系

设两直线 L_1，L_2 的方向向量为$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，则

$$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1\text{ 平行或重合于 }L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1/\!/\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

2. 直线间的夹角

两直线的方向向量的夹角（指小于或等于$\frac{\pi}{2}$的角）称为两直线的夹角.

设两直线的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，两直线夹角 θ 的余弦公式为

$$\cos\theta=|\cos<\boldsymbol{s}_1,\ \boldsymbol{s}_2>|=\left|\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}\right|$$

例 3 求经过点$(4,0,-2)$且平行于直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$的直线方程.

解 已知直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(4,-1,3)$$

则所求直线方程为

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+2}{3}$$

三、线面间的关系

1. 线面间的位置关系

设直线 L：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$，则直线 L 的方向向量为$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，所以

（1）$L\perp\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

（2）$L/\!/\Pi$ 或 $L\subseteq\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

当 $Am+Bn+Cp\neq0$ 时，L 与 Π 相交. 容易得到直线 L 的参数方程：

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}\tag{5}$$