黑龙江省高等教育应用型人才培养系列教材

经济应用数学

主　编　柴艳有
副主编　杨旭光　孙冬琦

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

黑龙江省高等教育应用型人才培养系列教材

经济应用数学

主　编　柴艳有
副主编　杨旭光　孙冬琦

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书是为参加财经类与管理类专业高等教育自学考试的广大学生学习经济应用数学课程的需要而编写的教材。本书用通俗易懂的语言介绍了微积分和线性代数的知识，选编了一定数量的典型例题和习题。主要内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学和线性代数。为提高读者运用数学知识处理实际经济问题的能力，本书还加入了数学理论在经济学应用方面的内容。

本书可作为财经类与管理类专业参加自学考试学生的主要参考书。此外，也可以用作相关专业在校学生学习经济应用数学课程的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学/柴艳有主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2015.1
ISBN 978-7-5661-0957-6

Ⅰ.①经… Ⅱ.①柴… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 013582 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1 092mm 1/16
印　　张 14
字　　数 366 千字
版　　次 2015 年 1 月第 1 版
印　　次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 38.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

经济应用数学是财经类与管理类专业学生的一门必修的重要基础课，是经济与数学相互交叉的学科领域。经济应用数学在经济中有着广泛的应用，它是为培养我国社会主义经济建设所需要的应用型人才服务的。该课程不仅为后继课程提供必备的数学基础，而且是培养财经类与管理类专业学生数学素养和理性思维能力的最重要途径。

本书是为参加经济类与管理类高等教育自学考试的广大学生学习经济应用数学课程的需要而编写的教材。考虑到本书主要面向的读者，在教材的编写过程中，我们力求淡化理论，突出数学概念的直观性，强化知识的应用性，注重培养学生用数学概念、数学思想和方法解决实际问题的能力。本书的主要内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微分学和线性代数。为提高读者运用数学知识处理实际经济问题的能力，本书还加入了数学理论在经济学应用方面的内容。本书的习题分为 A，B 两类，其中 A 类习题的题型为填空题和选择题，主要是为理解和掌握本章基本概念之用，B 类习题的题型为计算、应用和证明，主要是为掌握本章基本计算和基本方法之用。

在本书的编写过程中，得到了哈尔滨工程大学理学院公共数学教学中心和哈尔滨工程大学出版社多位同事的支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

本书第 1，2 章由柴艳有编写，第 3，4 章由杨旭光编写，第 5 章由孙冬琦编写。限于作者水平有限，缺点和错误之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2014 年 10 月

目　　录

第1章 函数与极限

函数是客观世界中变量与变量之间相互依赖关系的一种数学抽象,是微积分的主要研究对象. 极限概念是研究微积分的理论基础,极限方法则是微积分的基本分析方法. 本章将首先介绍函数与极限的一般概念,然后着重介绍求极限的方法,最后给出了函数连续性的定义及闭区间上连续函数的性质.

1.1 函数的概念与性质

1.1.1 变量与实数集

通常我们把在一定研究范围内取值不断变化的量称为变量,如运动物体运动的路程、某上市公司的股票价格、某地区的气温等. 任何一个变量变化都会有一个明确的范围,称为变量的变域或数域. 如不加特殊说明,本书中所涉及的变量的变域仅限于实数域. 实数域又叫实数集,可以用一般的集合表示法来表示,对于特定的集合也可以采用特定的方法来表示,例如:

全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,记 $\mathbf{R}^{*}$ 为排除数 0 的实数集,$\mathbf{R}^{+}$ 为全体正实数集.

对于很多问题,人们主要采用的是实数的区间表示法. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$. 实数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

实数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点,这里 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似地可说明：

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. $b-a$ 称为这些区间的长度. 此外还有无限区间. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

实数集 **R** 也可记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

1.1.2　函数的定义

在研究某一问题时，往往会同时出现两个或者两个以上的变量，而这些变量又往往是相互联系和相互依赖的.

例 1　（圆面积公式）圆的面积 S 与半径 r 的函数关系为

$$S=\pi r^2$$

圆的半径不同，圆的面积也就不同，而 π 在圆的面积计算中总是不变的. 所以我们说，在这个给定的问题中，π 是常量，圆的半径 r 和圆的面积 S 都是变量，它们之间的相互关系是由上述公式确定的.

例 2　设某种商品的价格为 2 元/件，销售量为 q 件，销售收入为 R 元，则 $R=2q$. 销售量变化时，销售收入也随之变化，且销售量确定后，销售收入也随之确定.

上述两个问题分别来自几何和经济问题，但是其共同本质是参与给定问题的变量之间存在相互依赖的关系. 当其中一个变量取定了一个数值时，按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的相应值. 函数这一概念正是这样抽象出来的.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有（唯一）确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量. 相应地，y 的取值范围构成的集合 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

按照上述函数的定义，需要注意的是：

(1) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的. 前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x),x\in D$”或“$y=f(x),x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

(2) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的符号“f”也可用其他字母，如“F”“φ”等表示，这时函数就应记作 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作$y=y(x)$.

(3) 两个函数相等当且仅当两个函数的定义域相同，对应法则也相同.

(4) 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中自变量的实际意义确定，在例 2 中，商品的销售量 q 不可能是负数，所以定义域是由大于零的数组成的集合；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定其定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合.

(5) 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，因此可以称为单值函数.

如果给定一个对应法则,按这个法则,对每个 $x \in D$ 总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不是唯一的,那么这个对应法则并不符合函数的定义,通常称这种法则确定了一个多值函数.

函数 $y=f(x)$ 可以用各种不同方式表达,例如 $y=x^2$,$y=\sin x$ 等. 这种函数表达方式的特点是:等式左端是因变量的符号,而右端是含有自变量的式子,用这种方式表达的函数叫作显函数. 有些函数的表达方式却不是这样,例如方程 $x+y^3-1=0$,当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时,y 有唯一确定的值与之对应,故此方程表示一个函数. 这种函数表达方式的特点是:用方程 $F(x,y)=0$ 表示 x 与 y 的对应关系,即在一定条件下,当 x 取某区间内的任意值时,相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在,用这种方式表达的函数叫作隐函数. 值得注意的是,有些隐函数是可以化成显函数的,例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$,就把隐函数化成了显函数. 但有些隐函数想化成显函数是困难的,例如方程 $y=\frac{1}{2}\sin(x+y)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi-1}{2},\frac{\pi-1}{2}\right)$ 上定义了一个以 x 为自变量,y 为因变量的隐函数,但由此方程解出 y 是困难的.

例3　求函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\lg x}$ 的定义域.

解　解如下不等式组

$$\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0 \\ x>0,\text{且 } \lg x \neq 0 \end{cases}$$

可得函数的定义域为 $(0,1)\cup(1,2]$.

1.1.3　函数的性质

1. 单调性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(严格单调增加的),如图 1-1 所示;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(严格单调减少的),如图 1-2 所示. 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数.

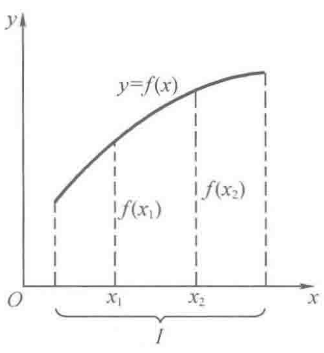

图 1-1

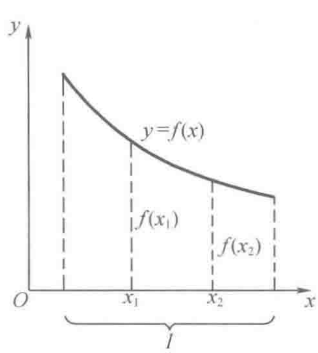

图 1-2

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调的，如图 1－3 所示.

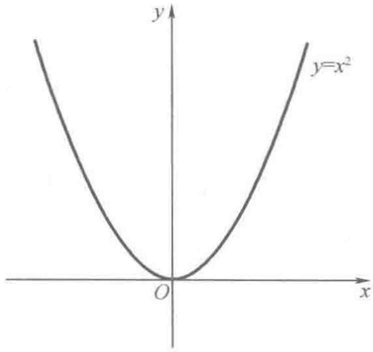

图 1－3

2. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$X\subset D$. 如果当 $x\in X$ 时，存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界，即如果对任意正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 1 是它的一个上界，-1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）. 又因为

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任意实数 x 都成立，故函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|\sin x|\leqslant M$ 对任一实数 x 都成立）.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 是奇函数.

例如，$f(x)=2-\cos x$ 是偶函数，因为 $f(-x)=2-\cos(-x)=2-\cos x=f(x)$，如图 1－4 所示；$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=-x^3=-f(x)$，如图 1－5 所示. 由函数奇偶性的定义可知，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

值得注意的是，有些函数既非奇函数，又非偶函数，例如 $f(x)=\sin x+\cos x$.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

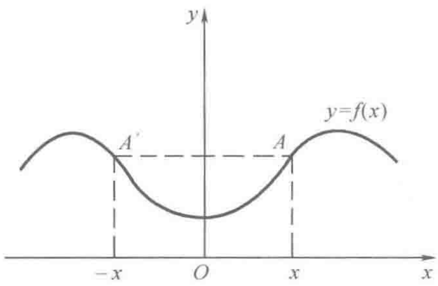

图 1-4

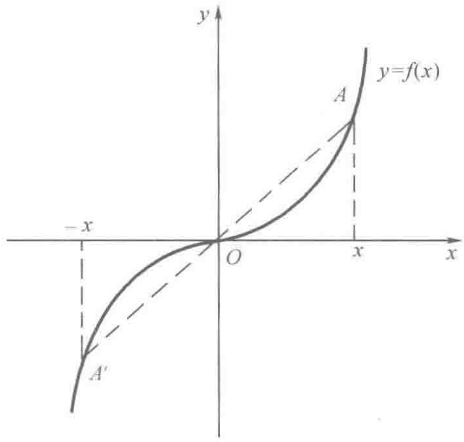

图 1-5

1.1.4 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域是 W，如果对 W 中的每一个 y 值，都可以从关系式 $f(x)=y$ 确定唯一的一个 x 值，则得到一个定义在 W 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数 $x=f^{-1}(y)$，它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

例如，函数 $y=x^3, x\in \mathbf{R}$ 的反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}, y\in \mathbf{R}$.

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数通常记成 $y=f^{-1}(x), x\in W$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 把直接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-6). 这是因为如果 $p(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义，有 $a=f^{-1}(b)$，故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点；反之，若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

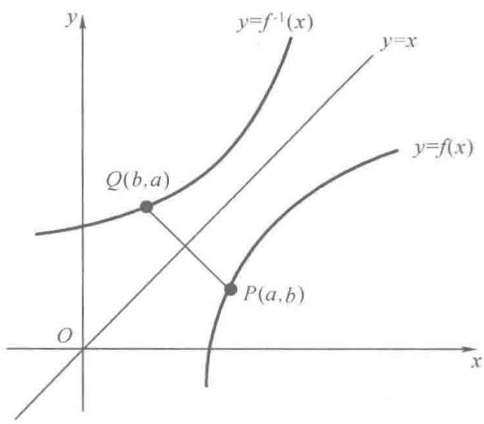

图 1-6

1.1.5 复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

以下几种函数称为基本初等函数.

幂函数:$y=x^a$(a 为常数).

指数函数:$y=a^x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$). 特别地,以常数 $e=2.718\,281\,8\cdots$为底的指数函数 $y=e^x$ 是常用的指数函数.

对数函数:$y=\log_a x$(a 为常数,且 $a>0,a\neq1$). 当 $a=e$ 时,记作 $y=\ln x$.

三角函数:$y=\sin x$(正弦函数);$y=\cos x$(余弦函数);$y=\tan x$(正切函数);

$y=\cot x$(余切函数);$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$(正割函数); $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$(余割函数).

三角函数的反函数称为反三角函数,由于三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 不是单调的,为了得到它们的反函数,对这些函数限定在某个单调区间内讨论. 一般地,取反三角函数的“主值”. 常用的反三角函数有:

反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$.

反正切函数 $y=\arctan x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$.

反三角函数的图形如图 1-7 所示.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$的定义域为 D_g,其值域 $R_g\subset D_f$,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],x\in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$和 $y=f(u)$复合而成的复合函数,它的定义域为 D_g,称 u 为中间变量.

例如,函数 $y=\arctan(x^2)$可看作是由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的,这个函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,它也是 $u=x^2$ 的定义域.

又例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 是不能复合成一个复合函数的. 因为对于 $u=x^2+2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的 u 值(都不小于2),都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如,设 $y=\sqrt{u}$,$u=\text{arccot}\,v$,$v=\dfrac{x}{2}$,则得复合函数 $y=\sqrt{\text{arccot}\,\dfrac{x}{2}}$,这里 u 及 v 都是中间变量.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$,$y=\ln\sin^2x+2x\tan\sqrt{x}$ 等都是初等函数. 不是初等函数的函数就称为非初等函数.

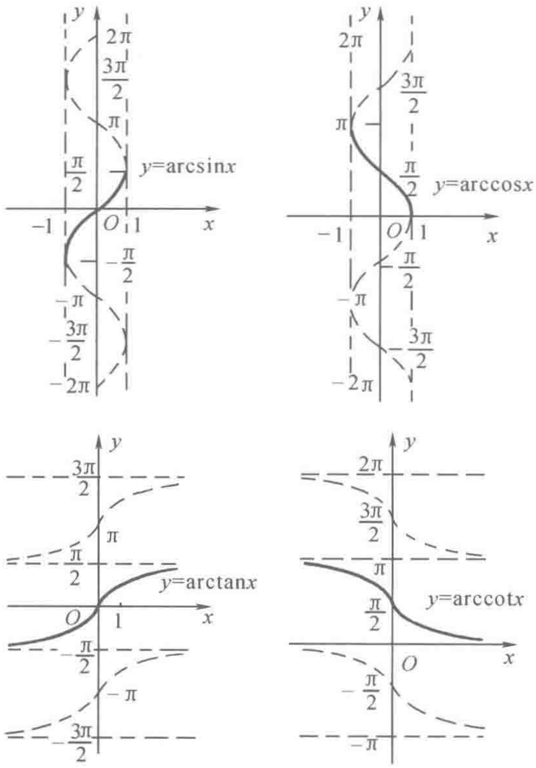

图 1－7

下面举几个非初等函数的例子.

例 4　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$(图 1－8).

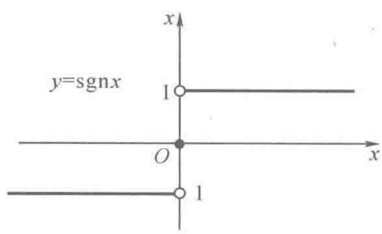

图 1－8

例 5　函数

$$y(x)=\begin{cases}\sin x, x\leqslant 0\\ x, \quad x>0\end{cases}$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[-1,+\infty)$.

以上两个例子有一个共同的特征，即在不同的定义域上有不同的对应法则，我们称具有这样特征的函数为分段函数. 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，值域也是各段函数值域的并集.

1.1.6 经济学中常用的函数

1. 需求函数、价格函数

在经济学中，购买者（消费者）对某种商品的需求这一概念的定义是：购买者既有购买商品的愿望，又有购买的能力，也就是说，只有购买者同时具备了购买商品的欲望和支付能力两个条件，才称得上需求. 影响需求的因素有很多，如人口、收入、财产、价格、其他相关商品的价格以及消费者的偏好等. 在所考虑的时间范围内，如果把除该商品价格以外的上述因素都看作是不变的因素，则可把该商品价格 p 视为自变量，需求量 Q 视为因变量，即需求量 Q 可视为该商品价格 p 的函数，称为需求函数，记作：$Q=Q(p)$.

一般地，商品价格高，需求量就小；商品价格低，需求量就大，因此需求函数为价格 p 的减函数.

同样，也可把价格 p 表示成需求量 Q 的函数：

$$p=p(Q)$$

它是需求函数的反函数，也称为价格函数.

2. 供给函数

"供给"指在一定条件下，生产者愿意出售并且可以出售的商品量. 如果略去影响供给者的诸多因素，只讨论供给与价格的关系，则可把该商品价格 p 视为自变量，把供给量 S 视为因变量，即供给量 S 可视为该商品价格 p 的函数，称为供给函数，记作：$S=S(p)$.

一般地，商品价格低，生产者不愿意生产，供给少；商品价格高，供给多. 因此供给函数为价格 p 的单调递增函数，如图 1－9 所示.

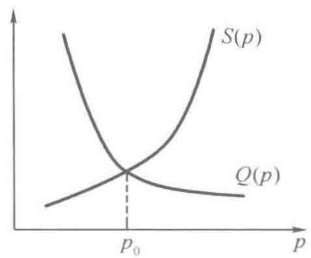

图 1－9

使一种商品的市场需求量与供给量相等的价格称为均衡价格，图 1－9 中 p_0 为均衡价格. 当市场价格高于均衡价格 p_0 时，供给量增加，需求量相应地减少，市场上会出现"供过于求"的现象，会引起商品滞销，进而导致价格下跌；反之，市场价格低于平衡价格时，供给量减少，需求量增加，市场上会出现"供不应求"的现象，会引起商品短缺，进而导致价格上涨.

3. 总成本函数

产品的成本是衡量一个企业管理水平高低的重要指标，根据会计学中的成本核算知识，产品的总成本是指生产一定数量的产品所需要的成本总数，它由固定成本与变动成本

构成. 固定成本不受产量多少的影响,它是与产量无关的常数,而变动成本是随着产量的变化而变化的.

一般总成本函数 C 表示如下:

$$C = C(x) = C_1 + C_2(x)$$

其中,x 为产量;C_1 为固定成本;$C_2(x)$ 为可变成本.

4. 平均成本函数

平均成本是指平均每个单位产品的成本,它也是产量 x 的函数,一般平均成本函数 $\overline{C}$ 表示如下:

$$\overline{C} = \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$$

5. 总收益函数

总收益是指厂商出售商品的总收入,它与商品的价格 p 和销售量 x 有关, 一般总收益函数 R 可表示为

$$R = R(x) = px$$

注意:

(1) 由于商品在销售过程中,价格一般都是波动的,因此上式中的价格 p 一般指平均价格;

(2) 总收益应是关于销售量的函数;

(3) 在实际中,产量、销量、需求量一般是不相等的.

但是,在数学里,为研究问题方便,我们假设:

$$产量 = 销量 = 需求量$$

6. 利润函数

在总收益中减去总成本,得到的就是利润 L,利润函数 L 可表示为

$$L = L(x) = R(x) - C(x)$$

注意:利润 $L(x)$ 也是关于产量 x 的函数.

例 6 设某工厂的总成本中,固定成本为 20 000 元,单位产品的变动成本为 3 000 元,单价为 5 000 元,求产量 x 对总成本 C、平均成本 $\overline{C}$、收益 R 及利润 L 的影响.

解 由定义可知:

总成本函数:$C = 20\ 000 + 3\ 000x$;

平均成本函数:$\overline{C} = \dfrac{20\ 000 + 3\ 000x}{x} = 3\ 000 + \dfrac{20\ 000}{x}$;

总收入函数:$R = 5\ 000x$;

总利润函数:$L = R - C = 2\ 000x - 20\ 000$.

使 $L = 0$,即 $R = C$ 的产量 x 的取值 x_0 叫损益分歧点. 当 $x > x_0$ 时,$L > 0$,这时赢利;当 $x < x_0$ 时,$L < 0$,这时亏损.

1.2 数列的极限

1.2.1 数列

如果按照某一对应法则,对每个 $n \in \mathbf{N}^+$,对应着一个确定的实数 x_n,这些实数 x_n 按下

标 n 从小到大排列得到的一个序列：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就称为数列，记作 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的一般项. 根据函数的定义，数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数，即 $x_n = f(n)$，$n \in \mathbf{N}^+$.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \tag{1-1}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \tag{1-2}$$

$$3, 3^2, 3^3, \cdots, 3^n, \cdots \tag{1-3}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots \tag{1-4}$$

为了直观起见，我们把这四个数列的前几项分别在数轴上表示出来，如图 1－10 所示.

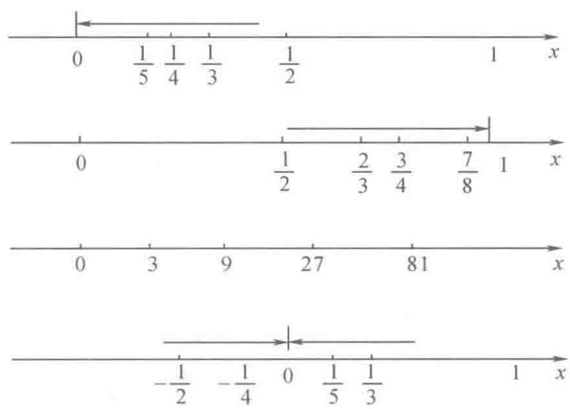

图 1－10

如果

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

如果

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的.

显然数列(1－1)是单调减少的，数列(1－2)和(1－3)是单调增加的.

单调增加或单调减少的数列都称为单调数列，数轴上对应于单调数列的项 x_n 向一个方向移动；如果数列是单调增大的，就向右方移动；如果数列是单调减少的，就向左方移动.

对于数列 $\{x_n\}$，若存在着正数 M，使得对一切 x_n 都满足不等式：

$$|x_n| \leqslant M$$

则称数列 $\{x_n\}$ 有界；如果这样的正数 M 不存在，称数列 $\{x_n\}$ 无界. 例如，数列(1－1)、(1－2)和(1－4)都是有界的，而数列(1－3)是无界的. 数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在区间 $[-M, M]$ 之内.

1.2.2 数列极限的定义

对于数列$\{x_n\}$,我们要关心的问题是:当n无限增大时,对应的x_n是否能无限接近于某个确定的数值?如果能的话,这个数值是多少?

分析前面4个数列x_n随n的变化情况,我们容易看到,当n无限增大(记为$n\to\infty$)时,数列(1-1)、(1-2)和(1-4)分别无限接近于确定的常数0,1和0. 而数列(1-3)中的项越来越大,不接近任何确定的常数. 由此,我们可以抽象出数列极限的概念.

定义1 设$\{x_n\}$为一数列,a为一个常数,如果当n无限增大时,数列$\{x_n\}$无限地趋近于a,则称当$n\to\infty$时数列$\{x_n\}$以a为极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于a. 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a$$

或

$$x_n\to a(n\to\infty)$$

如果不存在这样的常数a,称数列$\{x_n\}$极限不存在,或称数列$\{x_n\}$是发散的.

例如,数列$\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$当$n$趋于无穷时是收敛的;数列$\{(-1)^{n+1}\}$和$\{\ln n\}$,当$n$趋于无穷时是发散的.

1.2.3 收敛数列的性质

定理1 (唯一性)若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一.

定理2 (有界性)若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$必有界.

根据上述定理,如果数列$\{x_n\}$无界,则数列$\{x_n\}$必发散. 但数列$\{x_n\}$有界,却不能断定数列$\{x_n\}$一定收敛.

例如,数列$\{(-1)^n\}$有界,但它是发散的.

在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列$\{x_{n_k}\}$称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

定理3 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,则它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

由定理3可知,如果数列$\{x_n\}$有两个子列收敛于不同的极限,则数列$\{x_n\}$是发散的. 例如,数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

的子列$\{x_{2k-1}\}$收敛于1,而子列$\{x_{2k}\}$收敛于-1,因此这个数列是发散的. 同时这个例子也说明:一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

1.2.4 重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

我们先来考虑经济学中的复利问题. 复利是指将本金与到期利息相加,并入一起作为下次本金,重新计算利息.

假设按3年放出5%利息的贷款100元,按年计算复利. 那么对于每一元钱,第1年末得到$(1+0.05)$,第2年末得到$(1+0.05)\times(1+0.05)$,第三年末总共得到$(1+0.05)\times(1+0.05)\times(1+0.05)$,3年后应该还115.76元.

再极端一些,假设你的朋友借给你100元钱,年利率还是5%,天天复利,3年还清,那么