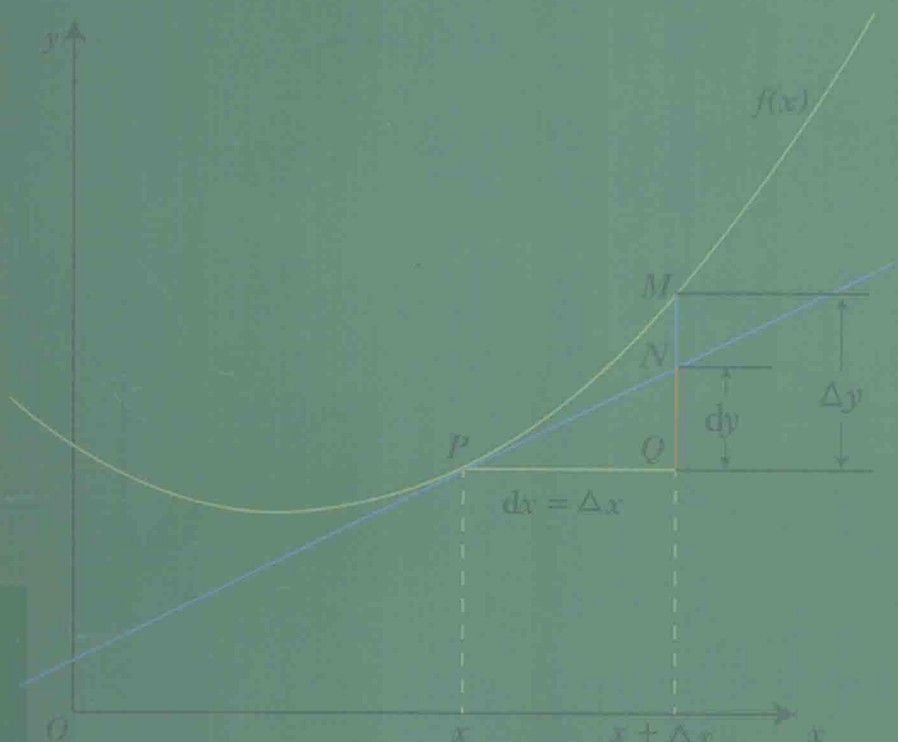
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

经济应用数学基础（一）

微积分

赵树嫄 / 主编

第四版



中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/赵树嫄主编．—4 版．—北京：中国人民大学出版社，2016.8
（经济应用数学基础）
ISBN 978-7-300-23121-1

Ⅰ．微… Ⅱ．赵… Ⅲ．①微积分-高等学校-教材 Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 163778 号

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
经济应用数学基础（一）
微积分（第四版）
赵树嫄　主编
Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	**版　　次**	1982 年 5 月第 1 版
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本		2016 年 8 月第 4 版
印　　张	23.75 插页 1	**印　　次**	2016 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	551 000	**定　　价**	39.00 元

第四版修订说明

《微积分》自20世纪80年代初出版三十多年来，经过多次修订，一直受到广大读者的青睐，对此编者深表感谢。本着与时俱进的精神，在中国人民大学出版社的积极协助下编者进行了本次修订工作。

新版修正了原书中的一些瑕疵，并补充了一些例题、习题。同时，此版结合当前广泛使用的数字化手段尝试对教学方法进行改革。通过扫描书内嵌入的二维码进入APP的方式为读者提供了丰富的教学辅助资料，包括重点和难点知识点的视频讲解、习题解答、高校模拟试卷等。我们相信通过这种数字化手段改进教学的创新，会从教与学两方面利于读者高效率地学习。

本次修订过程中，中国人民大学出版社经济分社社长刘晶、本书策划编辑李丽娜、责任编辑王美玲及北京第二外国语学院的宋宏业老师都给予了大量的支持与帮助。编者对他们的辛勤劳动表示诚挚的感谢。

参加本次修订工作的有赵树嫄、胡显佑、陆启良、萨奇。

编　者

2016年6月

第三版修订说明

根据中国人民大学出版社的要求，我们对《微积分》(修订本)进行了再次修订。

《经济应用数学基础(一)：微积分》等教材，自 1982 年第一版出版三十年来深受广大读者的欢迎，直至目前，仍保持着很大的年度发行量，说明这套教材现在仍然适合很多读者的需要。但也有不少读者希望我们进行修订，本着对广大读者负责的态度，我们的修订工作进行得十分慎重。本次修订，我们保持了原书的风格，内容上有少量增删，习题中的选择题根据目前考试的要求全部进行了改写。

参加本次修订工作的有：赵树嫄、胡显佑、陆启良、褚永增等。

对第三版中的错误与不妥之处热诚欢迎广大读者批评指正。

编　者

第二版说明

《经济应用数学基础》是原教育部委托中国人民大学经济信息管理系数学教研室赵树嫄主持编写的高等学校财经专业试用教材，共分五册：第一册《微积分》，第二册《线性代数》，第三册《概率论与数理统计》，第四册《线性规划》，第五册《运筹学通论》。从1981年以来由中国人民大学出版社陆续出版。

本套教材自出版发行后，被许多院校选作教材，也受到了自学财经专业课程的读者的欢迎，在一定程度上满足了当时教学的迫切需要。

目前，随着我国社会主义经济建设的发展和经济体制改革的深入，经济数学的教学方法的研究和应用日益受到广大经济理论教学、研究人员和实际工作者的重视。很多院校加强了数量经济学方面的研究和教学工作，相继增开了一些有关的必修或选修课程。近年来，高等学校财经专业的学生队伍的构成和素质也有了很大的变化。这一切都对高等学校财经专业基础数学的教学提出了更高的要求。为此，我们将对本套教材陆续进行修订。

这次修订工作是在国家教委的支持与领导下进行的，并得到北京大学、北京经济学院、北京商学院、北京财贸学院、中央财政金融学院、对外经济贸易大学等兄弟院校有关同志的大力协助，对本套教材的修改提出了许多宝贵的意见。在此，我们表示衷心感谢。

第一册《微积分》介绍了微积分学的基础知识。书中有些内容加了“※”号，选用本书时可以根据教学的需要和学时安排略去不讲。

参加《微积分》第一版编写与审阅的有：赵树嫄、金必先、陆启良、马兴忠、龚德恩、胡富昌，由赵树嫄任主编。参加第二版修改与审阅的有：赵树嫄、陆启良、胡富昌、傅维潼、金必先，由赵树嫄任主编。褚永增对本次修订做了大量工作并审核了全部习题答案。

本次修订，对第一版编写及排印中的疏漏进行了修正，并对部分章节进行了删改，补充了一些内容。在习题中增加了选择题，各章习题均分为(A)、(B)两类，(A)类为计算、证明、应用等传统题型；(B)类为选择题，每题各有4个备选答案，其中至少有一个是正确的，请读者将正确答案前的字母都填在括号内，凡多填或漏填的均算答案错误。

习题答案附书后。

由于我们的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1987年12月

目　　录

第一章　函　　数

§1.1　集　　合

(一)集合的概念

“集合”是数学中的一个重要概念，它在现代数学的发展中起着非常重要的作用.

我们常常研究某些事物组成的集体，例如，一班学生、一批产品、全体正整数，等等，这些由某类特定事物组成的集体都是集合.

一般说来，**集合**是具有某种属性的事物的全体，或者说是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的**元素**.

下面举几个集合的例子.

例 1　26 个英文字母.

例 2　方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

例 3　全体偶数.

例 4　直线 $x+y-1=0$ 上所有的点.

由有限个元素构成的集合，称为有限集合，如例 1、例 2；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例 3、例 4.

通常，我们用大写字母 A，B，C，X，Y 等表示集合，用小写字母 a，b，c，x，y 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \overline{\in} A$ 或 $a\notin A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.

例如，如果 $\mathbf{F}$ 表示全体有理数的集合，则 $\frac{3}{5}\in\mathbf{F}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{F}$.

我们这里讲的集合，具有确定性的特征，即对于某一个元素是否属于某个集合是确定的，“是”或者“不是”，二者必居其一且只居其一.

例如，“很小的数”，“某人的好朋友”，则不是我们这里所讨论的集合，因为构成它的对象是不明确的.

(二) 集合的表示法

(1) 列举法:按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号“{　}”括起来.

例 5　由 a，b，c，d 四个元素组成的集合 A，可表示为

$$A=\{a, b, c, d\}$$

例 6　由方程 $x^2-5x+6=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$$A=\{2, 3\}$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复.

(2) 描述法：设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为

$$A=\{a \mid P(a)\}$$

例 7　设 A 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合，可表示为

$$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$$

例 8　设 A 为全体偶数的集合，可表示为

$$A=\{x \mid x=2n,\ n \text{ 为整数}\}$$

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为**文氏图**. 文氏图是用一个平面区域表示一个集合，如图 1—1 所示. 集合内的元素以区域内的点表示.

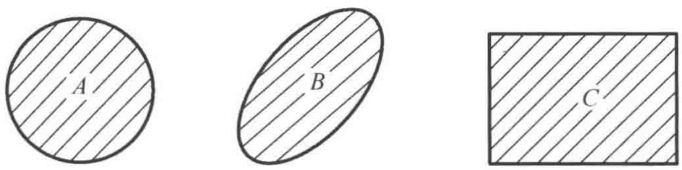


图 1—1

(三) 全集与空集

由所研究的所有事物构成的集合称为**全集**，记为U. 全集是相对的，一个集合在某一条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集. 例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数的集合就不是全集. 又如，要检查某工厂产品的优劣，则全厂产品为全集；如只检查某车间，则该车间产品为全集.

不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

例 9　方程 $x^2+1=0$ 的实数根集合为空集.

例 10　在欧几里得几何中，平面上两条平行线的交点集合为空集.

注意　$\{0\}$ 及 $\{\varnothing\}$ 都不是空集，前者含有元素“0”，后者以空集“$\varnothing$”为其元素.

(四) 子集

定义 1.1　如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即“如果 $a\in A$，则 $a\in B$”，则称 A 为 B 的**子集**. 记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果 $A\subseteq B$ 成立，并且 B 中确有元素不属于 A，则称 A 为 B 的真子集，并记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 如图 1—2 所示.

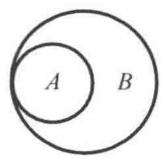


图 1—2

例 11　设 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数的集合，$\mathbf{F}$ 表示全体有理数的集合，则有

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{F}$$

例 12　设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，则

$B \subset A$

定义 1.2 设有集合 A 和 B，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

例 13 设

$$A = \{x \mid x \text{ 为大于 1 小于 4 的整数}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ 为大于 1 小于 4 的实数}\}$$

$$C = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

则 $A \subseteq B$，$A = C$

关于子集有下列结论：

(1) $A \subseteq A$，即“集合 A 是其自己的子集”；

(2) 对任意集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$，即“空集是任意集合的子集”；

(3) 若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$，即“集合的包含关系具有传递性”.

（五）集合的运算

定义 1.3 设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 和 B 的**并**，记为 $A \cup B$，如图 1—3 所示，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

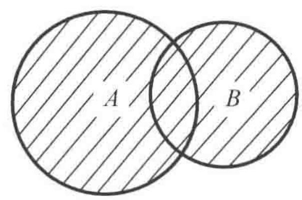


图 1—3

集合的并有下列性质：

(1) $A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$

(2) 对任何集合 A，有

$$A \cup \varnothing = A,\ A \cup U = U,\ A \cup A = A$$

定义 1.4 设有集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交**，记为 $A \cap B$，如图 1—4 的阴影部分所示，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

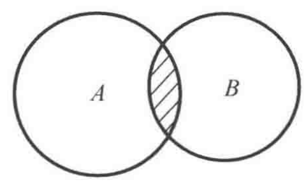


图 1—4

集合的交有下列性质：

(1) $A \cap B \subset A$，$A \cap B \subset B$

(2) 对任何集合 A，有

$$A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cap U = A,\ A \cap A = A$$

例 14 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cap B = \{3, 4\}$

例 15 设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{a, b\}$，则

$$A \cup B = \{a, b, c\},\quad A \cap B = \{a, b\}$$

例 16 设 A 为某外贸公司会英语的人的集合，B 为会日语的人的集合，则

$A \cup B$ 表示会英语或会日语的人的集合，
$A \cap B$ 表示既会英语又会日语的人的集合.

例 17 设 $A=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B=\{x \mid x>0\}$，则

$$A \cup B=\{x \mid x \geqslant -1\}$$

$$A \cap B=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$$

例 18 如果 A 为全体有理数集合，B 为全体无理数集合，则

$$A \cup B=\{x \mid x \text{ 为实数}\}$$

$$A \cap B=\varnothing$$

如果 $A \cap B=\varnothing$，则称 A，B 是分离的，如图 1—5 所示.

定义 1.5 设有集合 A 和 B，属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，如图 1—6 的阴影部分所示，即

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

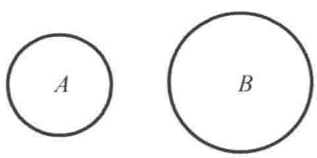


图 1—5

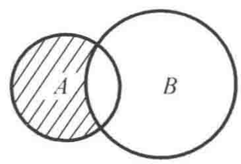


图 1—6

例 19 如果 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 3, 5, 7\}$，则

$$A-B=\{2, 4\}$$

定义 1.6 全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的**补集**，记为 $\overline{A}$，如图 1—7 所示，即

$$\overline{A}=\{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$$

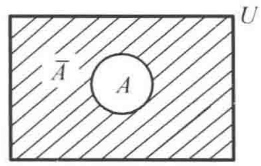


图 1—7

补集有下列性质：

$$A \cup \overline{A}=U, \quad A \cap \overline{A}=\varnothing$$

例 20 设参加考试的学生为全集 U.

如果 A 表示及格的学生集合，则 $\overline{A}$ 表示不及格的学生集合.

例 21 某地区有 100 个工厂，其中，80 个生产甲种机床，以集合 A 表示这些工厂；61 个生产乙种机床，以集合 B 表示这些工厂；55 个两种机床都生产. 试用集合表示下列各类工厂，并计算出各类工厂的数目：

(1) 生产甲种机床而不生产乙种机床的工厂；

(2) 生产乙种机床而不生产甲种机床的工厂；

(3) 甲、乙两种机床中至少生产其中一种的工厂；

(4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂.

解：(1) 生产甲种机床而不生产乙种机床的工厂的集合为 $A-B$，工厂数目为

$80-55=25$ (个)

(2) 生产乙种机床而不生产甲种机床的工厂的集合为 $B-A$，工厂数目为

$61-55=6$ (个)

(3) 甲、乙两种机床中，至少生产其中一种的工厂的集合为 $A\cup B$，工厂数目为

$55+25+6=86$ (个) 或 $80+61-55=86$ (个)

(4) 甲、乙两种机床都不生产的工厂的集合为$\overline{A\cup B}$，工厂数目为

$100-86=14$ (个)

文氏图如图 1—8 所示.

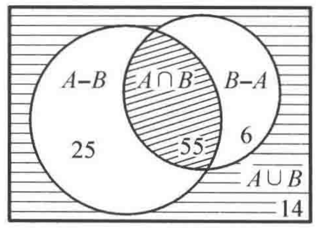


图 1—8

(六) 集合运算律

(1) 交换律：(Ⅰ) $A\cup B=B\cup A$

(Ⅱ) $A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：(Ⅰ) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(Ⅱ) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：(Ⅰ) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(Ⅱ) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 摩根律：(Ⅰ) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(Ⅱ) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

下面证明结合律的(Ⅰ)和摩根律的(Ⅰ)作为示范，其他几条定律可类似地证明.

结合律(Ⅰ)的证明：

如果 $x\in(A\cup B)\cup C$

则 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$

即 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 $x\in C$

因而 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$

所以 $x\in A\cup(B\cup C)$

由此可得 $(A\cup B)\cup C\subset A\cup(B\cup C)$

同理可证 $A\cup(B\cup C)\subset(A\cup B)\cup C$

所以 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

说明结合律(Ⅰ)成立的文氏图如图 1—9 所示.

摩根律(Ⅰ)的证明：

如果 $x\in\overline{A\cup B}$，则 $x\notin A\cup B$

即 $x\notin A$ 且 $x\notin B$

亦即 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$

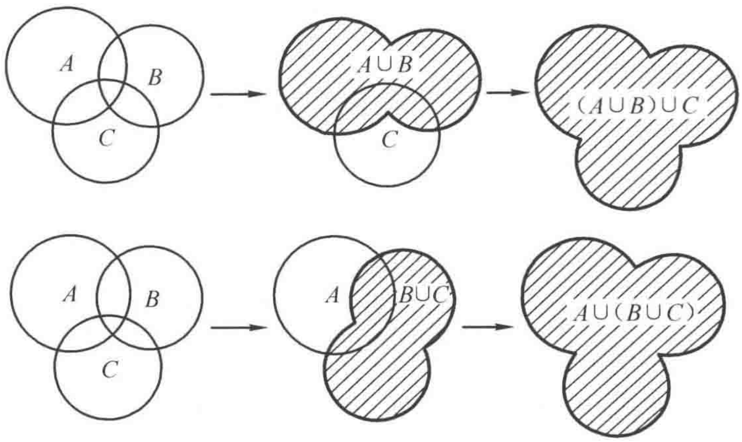


图 1—9

因此 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

所以 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

反之，如果 $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

则 $x \in \overline{A}$ 且 $x \in \overline{B}$

即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$

亦即 $x \notin A \cup B$

因此 $x \in \overline{A \cup B}$

所以 $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

于是得到 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

说明摩根律(Ⅰ)成立的文氏图如图 1—10 所示.

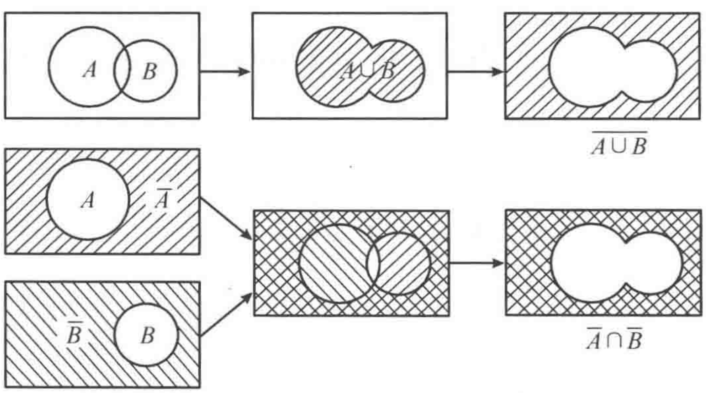


图 1—10

例 22 利用集合运算律证明:

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$

证: 由分配律(Ⅰ)有

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap B = U \cap B = B$$

(七) 集合的笛卡儿乘积

集合的元素是不涉及顺序问题的，例如，$\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 是指同一个集合. 但有时需要研究元素必须按某种规定顺序进行排列的问题.

将两元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 (x, y)，称为有序元素组. (x, y) 与 (y, x) 是两个不同的有序元素组.

注意 此处，(x, y) 表示有序元素组，在后面的区间概念中，(a, b) 表示开区间，读者根据不同场合，不难区别其意义.

对于有序元素组 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，当且仅当 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$ 时，才称 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是相等的.

由两个元素组成的有序元素组 (x_1, x_2) 称为二元有序元素组，由三个元素组成的有序元素组 (x_1, x_2, x_3) 称为三元有序元素组，……，由 n 个元素组成的有序元素组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 n 元有序元素组.

定义 1.7 设有集合 A 和 B. 对任意的 $x \in A$，$y \in B$，所有二元有序元素组 (x, y) 构成的集合，称为集合 A 与 B 的**笛卡儿乘积**，记为 $A \times B$，即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

例 23 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{2, 3\}$，则

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$$

例 24 设 $A = \{a, b\}$，则

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

例 25 设 $\mathbf{R}$ 为全体实数的集合，则笛卡儿直角坐标系的坐标平面可记作

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$$

例 26 设 $A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$，$B = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，则 $A \times B = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. 它表示平面直角坐标系中如图 1—11 所示的矩形区域.

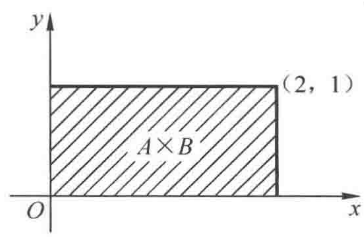


图 1—11

类似地，可以定义

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$$

例 27 设 $A = \{0, 1\}$，$B = \{1, 2\}$，$C = \{3\}$

则有 $$A \times B \times C = \{(0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 3)\}$$

§1.2 实数集

(一) 实数与数轴

人们对数的认识是逐步发展的，先是自然数，继而发展到有理数(即正负整数、正负分

数及零),再进一步就发展到无理数(例如,$\sqrt{2}$、π 等都是无理数). 有理数可以表示为 $\frac{p}{q}$,无理数不能表示为$\frac{p}{q}$,其中,p,q 为整数,且 $q\neq 0$.

有理数可以表示为有限小数或无限循环小数,而无理数为无限不循环小数.

设有一条水平直线,在这条直线上取定一点 O,称为原点,规定一个正方向(习惯上规定由原点向右的方向为正方向),再规定一个长度,称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为**数轴**. 如图 1—12 所示.

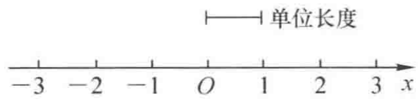


图 1—12

有理数与无理数统称为**实数**. 每一个实数必是数轴上某一个点的坐标;反之,数轴上每一点的坐标必是一个实数,这就是说全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系. 本书中我们所研究的数都是实数,为了方便起见,常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别,用相同的字母表示. 例如,数轴上的点 a,即坐标为实数 a 的点,实数 a 在数轴上的对应点就用 a 表示.

(二) 绝对值

在研究一些问题时,我们常常要用到实数绝对值的概念. 下面介绍实数绝对值的定义及性质.

定义 1.8 一个实数 x 的绝对值,记为$|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

$|x|$的几何意义:$|x|$表示数轴上点 x(不论 x 在原点左边还是右边)与原点之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$

(2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|-x|=|x|$

(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

因为 当 $x>0$ 时,$-|x|<x=|x|$

当 $x<0$ 时,$-|x|=x<|x|$

当 $x=0$ 时,$-|x|=x=|x|$

所以,总起来有

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$$