应用型本科院校特色教材

高等数学学习指导

上册

■ 主编 叶海江 马 辉

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

中国人民大学出版社

应用型本科院校特色教材

高等数学（上册）学习指导

主　编　叶海江　马　辉
副主编　孙晓祥　刘立伟　张书欣

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）学习指导/叶海江，马辉主编. —北京：中国人民大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-300-23239-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①叶…②马… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 185402 号

应用型本科院校特色教材
高等数学（上册）学习指导
主　编　叶海江　马　辉
副主编　孙晓祥　刘立伟　张书欣
Gaodeng Shuxue（Shangce）Xuexi Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2016 年 8 月第 1 版
印　　张	11.25	**印　　次**	2016 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	258 000	**定　　价**	27.00 元

前　言

本书是吉林省教育科学“十二五”规划课题《应用型本科院校高等数学教学中学生创新能力培养的研究与实践》的主要成果，是项目组在多年应用型本科数学教学改革与实践的基础上，运用集体智慧通力合作的结晶。

本书在编写中注意贯彻“加强基础、注重应用、增加弹性、兼顾体系”的原则。编写中紧密结合高等教育背景下应用型本科院校生源的实际，注重理论联系实际、深入浅出、删繁就简、重点突出、难点分散并兼顾直观性；着重讲清问题的思路和方法的应用，变严格的理论证明为通俗的语言描述说明，降低理论难度，强化实际运用，使教材具有易教、易自学的特点。本教材体现了以下特点：

一是兼顾与中学数学的过渡与衔接。由于高考大纲和中学教材体系的调整，学生在中学阶段没有学习反三角函数和极坐标内容，本教材及时做了补充。

二是本教材注重数学思想方法的渗透，注重数学在各方面的应用。不过于强调理论上的推导，淡化繁杂的数学计算，同时追求科学性与实用性的双重目标，以利于应用型本科院校学生掌握数学的基本思想与方法，提高科学素质，增强运用数学来进行分析和解决实际问题的能力。

三是本教材适合于应用型本科院校的不同专业、不同学时高等数学课程的教学使用。应用型本科院校基本上都是多学科型院校，如果不同专业选择不同类别的教材，会给教材订购和教学带来诸多不便。然而，纵观工科类、理工类、经济类、农科类等高等数学教材，内容体系大体相同，主要是应用部分的案例不同。本教材依据上述需求，将各种应用基本全部列出，供不同专业、不同学时的课程使用时选择。

四是本教材配备学习指导书，含有内容提要、基本要求、疑难解析、典型范例、习题选解等环节。学习指导书能够帮助学生很快地掌握教材中的重点、难点，了解习题的类型

及解题思路，同时进一步补充理论和习题的深度。

本书执笔与统稿者分工如下：

第一章——孙晓祥；第二章——刘立伟；第三章——张书欣；第四章——马辉。全书由叶海江教授策划与统稿。

本书内容丰富，应用背景广泛，为应用型本科院校不同专业的教学提供充分的选择余地，对超出“教学基本要求”的部分标*号注明，在教学实际中可视情况选用，教学时数亦可灵活安排。本教材也可作为其他理工科院校的教学参考书。

在多年的改革实践中，项目组得到了吉林农业科技学院广大师生的热情支持，受到许多专家与院校同行的关注和鼓励，对此我们表示衷心的感激！

中国人民大学出版社以严谨的科学态度和高度的责任心对书稿严格把关，并确保印刷质量，力求把精品教材呈献给广大师生，作者对此表示由衷的谢意！

由于编写时间仓促，书中难免存在疏漏和不足，我们真诚地欢迎专家与广大师生多提宝贵意见，以便在今后的修订中不断完善。

吉林省教育科学规划课题项目组
暨《高等数学》教材编写组
2016年8月

目 录

第一章

函数与极限

第一节　函　　数

一、内容提要

1. 集合

(1)集合与元素

一般地,把具有某种性质的对象的全体称为集合.其中的对象称为集合的元素.若元素 a 是集合 A 的元素,则记为 $a\in A$;若元素 a 不是集合 A 的元素,则记为 $a\notin A$.

(2)集合的分类

集合按元素多少分**有限集**和**无限集**;不含任何元素的集合称为**空集**.

(3)集合的表示法

集合的表示法有两种:**列举法**和**描述法**.

习惯上,我们用 N 表示自然数集,用 Z 表示整数集,用 Q 表示有理数集,用 R 表示实数集.

(4)集合之间的关系

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

(5)集合的基本运算

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in \mathrm{A}$ 或 $x\in \mathrm{B}\}$;设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap \mathrm{B}$,即 $A\cap B=\{x|x\in \mathrm{A}$ 且

$x\in B\}$;设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 又不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A-B$,即 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 由所研究的所有对象构成的集合称为全集,记为 I. 称 $I-A$ 为 A 的**余集**或**补集**,记为 $\overline{A}$.

2. 区间和邻域

(1)区间

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.

$(a,b)=\{x|a<x<b\}$称为开区间;

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间;

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$和$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$称为半开区间.

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$和$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$都是无限区间.

(2)邻域

开区间$(a-\delta,a+\delta)$就是以点 a 为中心,δ 为半径的邻域,记作 $U(a,\delta)$;若把邻域 $U(a,\delta)$的中心去掉,所得到的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{0<|x-a|<\delta\}$;开区间$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$分别称为点 a 的左邻域和右邻域.

3. 函数的概念

(1)映射的定义

设 X、Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**,记作 $f:X\to Y$,其中 y 称为元素 x 的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$.

(2)函数的定义

设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的**函数**,通常记为 $y=f(x)$,$x\in D$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域. 函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记作 R.

显然,只要定义域和对应关系确定了,值域也就随之确定,故定义域和对应关系是确定函数的两个要素.

表示函数的主要方法有图示法、表格法和公式法.

(3)分段函数

我们把在不同的定义域上用不同的表达式来表示对应法则的函数称为分段表示的**函数**,简称为**分段函数**. 例如绝对值函数 $y=|x|$,符号函数 $y=\mathrm{sgn}x$ 及取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

4. 函数的几种特性

(1)函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 M,使得对一切 $x\in X$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**,或称 $f(x)$是 X 上的有界函数. 若这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$在 X 上**无界**.

(2)函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加函数(单调**

减少函数).

(3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意 $x\in D$, $f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对于任意 $x\in D$, $f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的,奇函数的图形关于原点是对称的.

两个偶(奇)函数之和仍为偶(奇)函数;两个偶(奇)函数之积仍为偶函数;奇函数与偶函数之积为奇函数.

(4)函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对于任意 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常周期函数的周期指的是**最小正周期**.

5. 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有 $x=f^{-1}(y)$. 通常都把 x 作为自变量,y 作为因变量. 因此可记为 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(D)$.

函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

若函数 f 在 D 上是单调增加(或单调减少)的函数,则它在 D 上是一对一的函数,从而 f 在 D 上有反函数,单调增加(或单调减少)函数的反函数也是单调增加(或单调减少)的.

6. 复合函数及初等函数

(1)复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g,且其值域 $R_g\subset D_f$,则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$, $x\in D_g$,称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D_g,变量 u 称为中间变量. 通常记为 $f\circ g$,即 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

(2)初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数:

幂函数:$y=x^\mu$($\mu\in R$ 是常数);

指数函数:$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$);

对数函数:$y=\log_a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$);

三角函数:如 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ 等;

反三角函数:如 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=arc\cot x$ 等.

以上这五类函数统称为**基本初等函数**.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

7. 简单的经济函数

(1)需求函数

一种商品的市场需求量 D 与该商品的价格 p 密切相关,涨价需求量减少,降价需求量增加. 因此,需求量 D 可看成价格 p 的单调减少函数,$D=f(p)$ 称为需求函数.

(2)供给函数

一种商品的市场供给量 Q 与该商品的价格 p 密切相关,价格上涨供给量增加,价格下跌供给量减少.因此,供给量 Q 是价格 p 的单调增加函数,$Q=f(p)$称为供给函数.

最简单的需求函数和供给函数为线性需求函数与线性供给函数 $D=a-bp$,$Q=-c+dp$,其中 a,b,c,d 为正的常数.

(3)总收入函数

若单位产品的售价为 p,销售量为 x,则总收入函数 $R(x)=px$.

(4)总成本函数

生产 x 单位的产品,其总成本由固定成本和可变成本两部分组成,固定成本与产量 x 无关,而可变成本产量 x 的增函数.生产 x 单位的产品的平均成本为 $\overline{C}x=C(x)/x$,$C(x)$为总成本.

(5)总利润函数

若销售量即是生产量,则生产 x 单位的产品的总利润等于总收入减去总成本,即 $L(x)=R(x)-C(x)$.

二、基本要求

复习函数的相关概念和性质,掌握函数定义域的求法,重点掌握反函数的定义和求法及复合函数的定义和求法.

三、疑难解析

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$求 $f(-x)$.

解 作变换 $x=-t$,则有 $f(-t)=\begin{cases}(-t)^2, & t\geqslant 0,\\ (-t)^2+(-t), & t<0,\end{cases}$ $f(-t)=\begin{cases}t^2, & t\geqslant 0,\\ t^2-t, & t<0,\end{cases}$故 $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$求 $f(f(x))$.

解 因为 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f(f(x))=1$.

四、典型范例

题型 1 求定义域

例 1 求函数 $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$的定义域.

解 在实数范围内,当 $x-2\geqslant 0$ 时,$\sqrt{x-2}$有意义;当 $x\neq 3$ 时,$\dfrac{1}{x-3}$有意义;当 $5-x>0$ 时,$\ln(5-x)$有意义.因此,所给函数的定义域必须同时满足 $x\geqslant 2, x\neq 3, x<5$.解之得到定义域

$$D=\{x\mid 2\leqslant x<5,\text{且 } x\neq 3, x\in \mathbf{R}\}=[2,3)\cup(3,5).$$

题型 2 求反函数

例 2 求下列函数的反函数.

(1)$y=(x-1)^3$；　(2)$y=\log_4{}^2+\log_4{}^{\sqrt{x}}$；　(3)$y=\log_a{}^{(x+\sqrt{x^2+1})}$，$a>0$，$a\neq1$.

解　(1)由 $y=(x-1)^3$ 解得 $x=1+\sqrt[3]{y}$，所以 $y=(x-1)^3$ 的反函数 $y=1+\sqrt[3]{x}$，$x\in R$；

(2)$y=\log_4^2+\log_4^{\sqrt{x}}=\log_4^{2\sqrt{x}}$，可得 $4^y=2\sqrt{x}$，$x=4^{2y-1}$，所以 $y=\log_4^2+\log_4^{\sqrt{x}}$ 的反函数为 $y=4^{2x-1}$，$x\in R$；

(3)$y=\log_a{}^{(x+\sqrt{x^2+1})}$，可解得 $x=\dfrac{1}{2}(a^y+a^{-y})$，故 $y=\log_a{}^{(x+\sqrt{x^2+1})}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

题型 3　经济问题中的函数

例 3　某厂生产某种商品的最高日产量为 $100t$，固定成本为 130 万元，每生产 $1t$，成本增加 6 万元. 试求该厂日产量的总成本函数和平均成本函数.

解　设日产量为 x(单位：t)总成本函数为 $C(x)$(单位：万元)，则依题设有

$$C(x)=130+6x,x\in[0,100],$$

而平均成本函数为

$$\overline{C}(x)=6+\frac{130}{x},x\in(0,100].$$

例 4　某厂生产某种产品，销售量在 100 件以内时，每件价格为 150 元；超过 100 件到 200 件的部分按九折出售；超过 200 件的部分按八五折出售. 试求该产品的总收入函数.

解　设 q 表示销售量(单位：件)，则依题设可知，总收入函数为

$$R(q)=\begin{cases}150q, & 0\leqslant q\leqslant 100,\\ 150\times100+0.9(q-100), & 100<q\leqslant 200,\\ 150\times100+150\times0.9\times100+150\times0.85(q-200), & 200<q.\end{cases}$$

五、习题选解

1. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{3x+2}$；　(2)$y=\ln(x+1)$；

(3)$y=\arcsin(x-3)$；　(4)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

解　(1)$\{x\mid 3x+2\geqslant0\}=\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2)$\{x\mid x+1>0\}=(-1,+\infty)$.

(3)$\{x\mid -1\leqslant x-3\leqslant1\}=[2,4]$.

(4)$\{x\mid x\neq0$，且 $1-x^2\geqslant0\}=[-1,0)\cup(0,1]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(1)$，$f(0)$.

解　$f(-2)=-1$，$f(1)=2$，$f(0)=1$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(f(x))$.

解　$f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x$, $(0,+\infty)$.

证 (1)对任意 $x_1<x_2$,

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

所以此函数在$(-\infty,1)$单调增加.

(2)对任意 $x_1<x_2$,

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2+\ln x_1-\ln x_2=x_1-x_2+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

所以此函数在$(-\infty,1)$单调增加.

5. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些即非奇函数也非偶函数?

(1) $y=\sin x+\cos x-1$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3) $y=x\cos x$；　　(4) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

解 (1)非奇函数也非偶函数.

(2) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,所以此函数为奇函数.

(3)奇函数.

(4) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=-\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-f(x)$,所以此函数为奇函数.

6. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数,指出其周期：

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=1+\tan x$；　　(3) $y=\cos 4x$.

解 (1) π；　　(2) π；　　(3) $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=1+\ln(x+2)$；　　(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1)由 $y=\sqrt[3]{x+1}$解得 $x=y^3-1$,所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$的反函数 $y=x^3-1,x\in R$；

(2)由 $y=1+\ln(x+2)$解得 $x=e^{y-1}-2$,所以 $y=1+\ln(x+2)$的反函数 $y=e^{x-1}-2$, $x\in R$；

(3)由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,所以 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$的反函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x},x\neq-1$.

8. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数：

(1) $y=\sin u,u=2x$；　　(2) $y=\sqrt{u},u=1+x^2$；

(3) $y=e^u,u=x^2$；　　(4) $y=u^2,u=e^x$.

解 (1) $y=\sin 2x$；　　(2) $y=\sqrt{1+x^2}$；

(3) $y=e^{x^2}$；　　(4) $y=e^{2x}$.

9. 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $y=f(\sin x)$；　　　　　　　　(2) $y=f(x^2)$.

解　(1) $\bigcup\limits_{n\in Z}[2n\pi,(2n+1)\pi]$；

(2) $x\in[-1,1]$.

10. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一销售商订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

解　(1) $p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 90-(x-100)\times 0.01, & 100<x<1\,600,\\ 75, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

(2) $P=(p-60)x=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 31x-0.01x^2, & 100<x<1\,600,\\ 15x, & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

(3) $P=31\times 1\,000-0.01\times 1\,000^2=21\,000$(元).

第二节　极限的概念

一、内容提要

1. 数列的极限

(1) 数列的定义

如果按照某一法则，对每个 $n\in N^+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 就叫作**数列** $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的**一般项**.

(2) 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε(无论它多么小)，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a, \text{或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

2. 函数的极限

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(无论它多么小)，总存在正数 δ，使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为**函数** $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域(或右邻域)内有定义，在 x_0 处可以没有定义. 如果存在

常数 A,对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 δ,使得对于满足不等式 $x_0-\delta<x<x_0$(或 $x_0<x<x_0+\delta$)的一切 x,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的左(或右)极限**. 记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A(\text{或} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A)\text{或} f(x_0^-)=A(\text{或} f(x_0^+)=A).$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

(2)自变量趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义,如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 X,使得对于满足不等式 $|x|>X$ 的一切 x,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

设函数 $f(x)$ 当 $x>X(x<-X)$ 时有定义,如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正数 X,使得对于满足不等式 $x>X(x<-X)$ 的一切 x,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 **$x\to+\infty(x\to-\infty)$时的极限**. 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$(或($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$)).

定理 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

二、基本要求

掌握数列极限和函数极限的定义和性质,重点掌握左、右极限的定义及用左、右极限求函数的极限.

三、疑难解析

例 1 设 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,求 $f(1^+)$,$f(1^-)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{x}{x-1}}=0$. 从而有

$$f(1^+)=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}-1}=0,$$

$$f(1^-)=\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x+1}}-1}=-1.$$

例 2 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

证 分三种情况讨论.

(1)当 $a=1$ 时,命题显然成立.

(2)当 $a>1$ 时,对任意 $\varepsilon>0$,考察 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$,即 $a<(1+\varepsilon)^n$,两边取对数得 $n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$,于是对任意 $\varepsilon>0$,找到了 $N=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$,当 $n>N$ 时,恒有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

(3)当 $0<a<1$ 时,令 $a=\dfrac{1}{b}$,则 $b=\dfrac{1}{a}>1$,

$|\sqrt[n]{a}-1|=\left|\frac{1}{\sqrt[n]{b}}-1\right|=\frac{|\sqrt[n]{b}-1|}{\sqrt[n]{b}}<|\sqrt[n]{b}-1|$，由(2)得证.

综上所述，当 $a>0$ 时，总有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

结论　例1中当 $a=n$ 结论成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

四、典型范例

题型1　用极限定义证明极限

例1　证明：$\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{1}{10}$.

证　对任意 $\varepsilon>0$，考察 $|f(x)-A|=\left|\frac{x-5}{x^2-25}-\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}\left|\frac{x-5}{x+5}\right|<\varepsilon$，因为 x 在5附近变化，不妨令 $|x-5|<1$，即 $4<x<6$，于是

$$|f(x)-A|=\frac{1}{10}\left|\frac{x-5}{x+5}\right|<\frac{1}{10}\times\frac{|x-5|}{9}<\varepsilon,$$

即 $|x-5|<90\varepsilon$，取 $\delta=\min\{90\varepsilon,1\}$，则当 $0<|x-5|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 故 $\lim\limits_{x\to5}\frac{x-5}{x^2-25}=\frac{1}{10}$.

题型2　用左、右极限讨论函数的极限

例2　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \frac{1}{1+x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

解　左、右极限法. 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1+x}\right)=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

例3　求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}$.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}=0$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{2}{x}}}{1+e^{-\frac{3}{x}}}=0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}=0$.

五、习题选解

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；

(3) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$；　　(4) $x_n=(-1)^n n$.

解　(1)0；　　(2)0；

(3)2；　　(4)发散.

2. 根据数列极限的定义证明：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

解　(1)对任意 $\varepsilon>0$,考察 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$,即 $n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$,于是对任意 $\varepsilon>0$,找到了 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]$,当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2)对任意 $\varepsilon>0$,考察 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\dfrac{1}{4n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon}$,于是对任意 $\varepsilon>0$,找到了 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证　因为数列 $\{x_n\}$ 有界,所以存在 $M>0$,使得 $|x_n|\leqslant M$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,$|y_n|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{M}$.

所以对上述 $\varepsilon>0$ 和 N,当 $n>N$ 时,$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|\leqslant M\times\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4. 根据函数极限的定义证明:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{x^3}=1$；　　(2)$\lim\limits_{x\to 3}3x-1=8$.

解　(1)对任意 $\varepsilon>0$,考察 $\left|\dfrac{1+x^3}{x^3}-1\right|=\left|\dfrac{1}{x^3}\right|<\varepsilon$,即 $|x|>\sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$,取 $X=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$,当 $|x|>X$ 时,$\left|\dfrac{1+x^3}{x^3}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{x^3}=1$.

(2)对任意 $\varepsilon>0$,考察 $|3x-1-8|=3|x-3|<\varepsilon$,即 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,当 $0<|x-3|<\delta$ 时,$|3x-1-8|<\varepsilon$ 恒成立,所以 $\lim\limits_{x\to 3}3x-1=8$.

5. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$,左、右极限不相等,所以 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限不存在.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x+1, & x<0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+1)=1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$,左、右极限不相等,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-1$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 不存在.