INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

第1卷

1959～1963

● 主 编 佩 捷

● 副主编 冯贝叶

多解 推广 加强

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

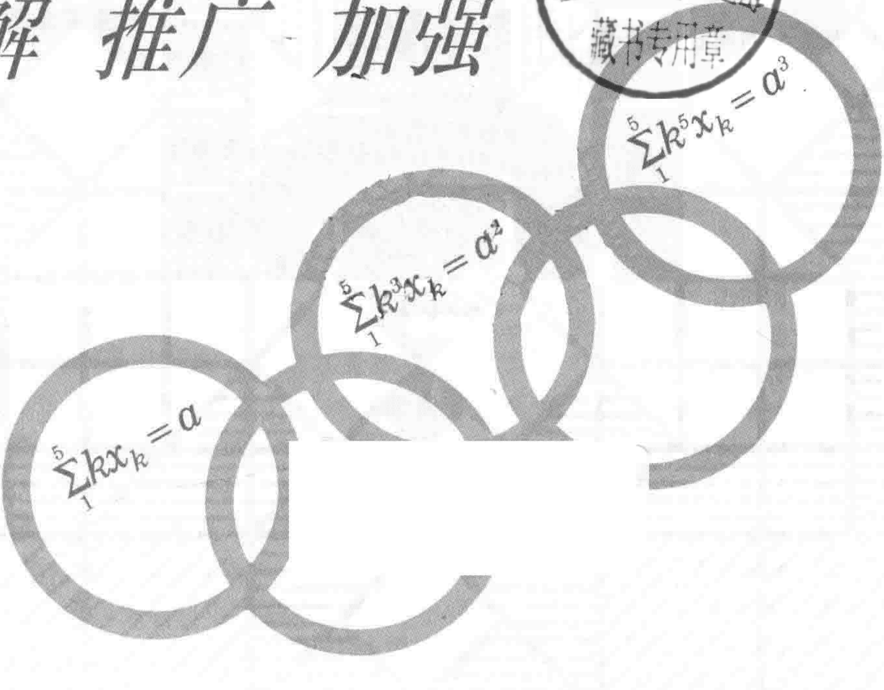
1959 ~ 1963

第1卷

● 主　编　佩　捷

● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书汇集了第1届至第5届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。该书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年. 第1卷，1959～1963/佩捷主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.11

ISBN 978－7－5603－4959－6

Ⅰ. ①I… Ⅱ. ①佩… Ⅲ. ①中学数学课—题解 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第237161号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 11 字数 204 千字
版　　次 2014年11月第1版 2014年11月第1次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－4959－6
定　　价 28.00 元

前 言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点:“若一个人不‘精通数学’,他就比别人笨吗”?

“数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病,不然的话,大家都应该是‘精通数学’的.可是,由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因,某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式.”

“我们自然不可能对任何东西都感兴趣,但数学更是一种思维的锻炼,不进行这项锻炼是很可惜的.不过,对诗歌或哲学,我们似乎也可以说同样的话.”

“不管怎样,根据学生数学上的能力来选拔‘优等生’的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的.”(阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉,译.广西师范大学出版社,2001,96)

这本题集不是为老师选拔“优等生”而准备的,而是为那些对 IMO 感兴趣,对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题,提供海量解法(最多一题提供 20 余种不同解法,如第 3 届 IMO 第 2 题),给出加强形式,尽显推广空间,是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集,从现在看,以“观止”称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了2万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999，463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近100位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979年，笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅0.29元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27年过去仍记忆犹新）.所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院（今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业读过）是我国最早介入IMO的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译1～20届题解.令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）.本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说上世纪80年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根20世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们[4],[13],[19],[20],[50].目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足.另外，现在流行的IMO题解，历经

多人之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合，有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步，这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延，而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势，他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国 IMO 研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之，使我不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候，曾有一句话讲得颇好：“一

个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于一本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰

2014 年 10 月

目录 Contest

第一编

第 1 届国际数学奥林匹克

第 1 届国际数学奥林匹克题解

罗马尼亚,1959

1 证明:分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 皆不可约.

波兰命题

证法 1　对$\dfrac{21n+4}{14n+3}$作辗转相除法如下,即

$$\begin{array}{r|l:l|l} & 21n+4 & 14n+3 & \\ 1 & 14n+3 & 14n+2 & 2 \\ \hdashline & 7n+1 & 1 & \end{array}$$

由此可知,最后的余数为 1,即

$$(21n+4,14n+3)=1$$

所以分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 皆不可约.

证法 2　假设$\dfrac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数 n 可约,则因

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$$

故$\dfrac{7n+1}{14n+3}$可约,从而它的倒数$\dfrac{14n+3}{7n+1}$可约.

类似地,又化假分数$\dfrac{14n+3}{7n+1}$为带分数,即

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$$

于是$\dfrac{1}{7n+1}$亦必可约,但对任何自然数 n,真分数$\dfrac{1}{7n+1}$显然皆不可约,因此导致矛盾. 证毕.

证法 3　设 $21n+4$ 与 $14n+3$ 的最大公约数为 d,则

$$21n+4=pd \quad ①$$

$$14n+3=qd \quad ②$$

其中,p,q 皆为正整数.

由 ①,② 消去 n 并整理,得

$$(3q-2p)d=1 \quad ③$$

分析　显然,对任何自然数 n,关于 n 的一次式 $21n+4,14n+3$ 皆为正整数,并且 $21n+4>14n+3$,从而$\dfrac{21n+4}{14n+3}$表示一系列的假分数.

欲证分数$\dfrac{21n+4}{14n+3}$不可约,即证 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素,也就是证其最大公约数

$(21n+4,14n+3)=1$

而两正数是否互素的判别及最大公约数的求法,又可直接利用辗转相除法实现,因此得知本题的一般证法.

此外,如下述的证法 3,先设其最大公约数为 d,再证 $d=1$ 亦可.

由于 p,q 皆为正整数，所以 $3q-2p$ 为整数. 因此，要 ③ 成立，必须正整数 $d=1$. 证毕.

2 对于 x 的哪些实数值，下列等式成立：

(1) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$；

(3) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

这里根式仅表算术根.

罗马尼亚命题

解法 1 将等式左边用 y 表示，因 $x\geqslant\frac{1}{2}$，故可作如下变形

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}})=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2+2\sqrt{2x-1}+1}+$$
$$\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2-2\sqrt{2x-1}+1})=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2})=$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2x-1}+1)+|\sqrt{2x-1}-1|)$$

为去绝对值符号，下面分两种情况讨论.

ⅰ 若 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，则有

$$1\leqslant 2x\leqslant 2,0\leqslant 2x-1\leqslant 1,0\leqslant\sqrt{2x-1}\leqslant 1$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1}))=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}$$

ⅱ 若 $x>1$，则有

$$2x>2,2x-1>1,\sqrt{2x-1}>1$$

此时

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}((\sqrt{2x-1}+1)+\sqrt{2x-1}-1)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}$$

总之，我们得到：

(1) 当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

分析 由题设知，$x\geqslant\frac{1}{2}$ 是研究问题的前提，否则，二次根号下将出现负值.

在 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 的许可值范围内，可以对函数

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

进行讨论得到答案，或按根式方程求解.

由于函数表达式是含有两层根号的复合二次根式，首先考虑化简函数式是必要的.

成立；

(2) 因为在 $x \geqslant \frac{1}{2}$ 的定义域内，函数 y 的值不小于$\sqrt{2}$，故对 x 的任何实数值，等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$$

都不能成立；

(3) 当 $x>1$ 时，原等式变为

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2$$

解得

$$x=\frac{3}{2}$$

即当 $x=\frac{3}{2}$ 时，等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$$

成立.

解法 2 因$\sqrt{2x-1}$ 是实数，故 $x \geqslant \frac{1}{2}$. 设

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=p$$

整理得

$$x+|x-1|=\frac{p^2}{2} \quad ①$$

i 若 $p=\sqrt{2}$，则

$$x+|x-1|=1 \quad ②$$

当 $x>1$ 时，式 ② 不可能成立；当$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ 时，式 ② 恒成立.

ii 若 $p=1$，则

$$x+|x-1|=\frac{1}{2} \quad ③$$

无论 x 为何实数，式 ③ 均不成立.

iii 若 $p=2$，则

$$x+|x-1|=2 \quad ④$$

此时 x 必大于 1，故式 ④ 可写成

$$2x-1=2$$

解得 $x=\frac{3}{2}$.

因此本题解为.

(1) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

(2) 对任何实数 x，都不能使

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$$

成立；

(3) 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，等式

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$$

成立.

解法 3　设 $x-\sqrt{2x-1}$ 的平方根为 $\sqrt{s}-\sqrt{t}$，则

$$x-\sqrt{2x-1}=s+t-2\sqrt{st}$$

所以
$$s+t=x, 4st=2x-1$$

解之并把 s,t 值代入得

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mid\sqrt{2x-1}-1\mid$$

同样可得
$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-1}+1)$$

令
$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2x-1}+1)+\mid\sqrt{2x-1}-1\mid)$$

因 $\sqrt{2x-1}$ 取非负实数值，故 $x\geqslant\frac{1}{2}$. 我们分别考虑以下两种情形.

ⅰ $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$. 这时

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2x-1}+1)+(1-\sqrt{2x-1}))=\sqrt{2}$$

ⅱ $1<x<\infty$. 这时

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1))=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}$$

综合 ⅰ，ⅱ 的结果，给出本题的解答如下.

(1) 当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=\sqrt{2}$ 成立；

(2) 没有 x 的值能满足 $y=1$，因为 y 的最小值是 $\sqrt{2}$；

(3) 当 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2$ 时，即 $x=\frac{3}{2}$ 时，$y=2$ 成立.

3 设 $\cos x$(实数) 满足二次方程

$$a\cdot\cos^2 x+b\cdot\cos x+c=0$$

其中 a,b,c 是实数，求 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程. 在 $a=4,b=2$ 和 $c=-1$ 的情况下，将此二次方程进行比较.

匈牙利命题

解法 1　将题设方程

$$a\cdot\cos^2 x+b\cdot\cos x+c=0 \quad ①$$

变形,即

$$a \cdot \cos^2 x + c = -b \cdot \cos x \quad ②$$

②^2 ×4,并整理得

$$a^2(2\cos^2 x)^2 + (4ac - 2b^2)2\cos^2 x + 4c^2 = 0 \quad ③$$

将 $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$ 代入 ③,得

$$a^2(\cos 2x + 1)^2 + (4ac - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0$$

$$a^2 \cdot \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0 \quad ④$$

显然,④ 是要求的 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程.

将 $a = 4, b = 2$ 和 $c = -1$ 代入 ①,得

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \quad ⑤$$

代入 ④,得

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \quad ⑥$$

⑤ 与 ⑥ 比较易知:在该种情况下,它们都是系数完全相同的一元二次方程,只不过一个以 $\cos x$ 为元,另一个则以 $\cos 2x$ 为元.

解法 2　根据韦达(Vieta)定理,题设方程两根有如下关系,即

$$\cos x_1 + \cos x_2 = -\frac{b}{a},\ \cos x_1 \cdot \cos x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 + \cos 2x_2 &= 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 - 1) = \\ &2((\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2\cos x_1 \cdot \cos x_2 - 1) = \\ &2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} - 1\right) = \\ &\frac{-(2a^2 + 4ac - 2b^2)}{a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 \cdot \cos 2x_2 &= (2\cos^2 x_1 - 1)(2\cos^2 x_2 - 1) = \\ &4(\cos x_1 \cdot \cos x_2)^2 - 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2) + 1 = \\ &4\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}\right) + 1 = \\ &\frac{a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2}{a^2}\end{aligned}$$

因此,要求的 $\cos 2x$ 所满足的二次方程为

$$a^2 \cdot \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0$$

关于题设方程与所求方程的比较,同解法 1.

4 试作一直角三角形,其斜边 c 给定,且使 c 边上的中线为二直角边的几何中项.

匈牙利命题

解法 1 由分析得到如下的作法(图 1.2).

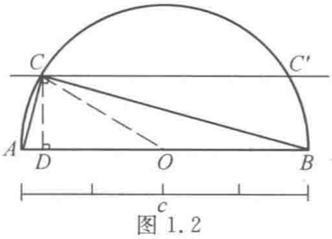


图 1.2

1) 作线段 $AB=c$(已知的);

2) 以 AB 为直径作圆 O;

3) 作直线 $CC'\ /\!/\ AB$,使 CC' 与 AB 的距离为$\frac{c}{4}$,CC' 与圆 O 交于 C,C';

4) 联结 AC,BC(或 AC',BC'),则 $\triangle ABC$(或 $\triangle ABC'$) 即为所求.

事实上,由 1),2) 可知 $\triangle ABC$ 显然是斜边为 c 的直角三角形;接下来只需证明"Rt$\triangle ABC$ 斜边上的中线为二直角边的几何中项"即可.

联结 OC,则 $OC=\frac{AB}{2}=\frac{c}{2}$;又过 C 作 $CD\perp AB$,D 为垂足,则由 3) 知 $CD=\frac{c}{4}$. 于是,我们有

$$OC^2=(\frac{c}{2})^2=\frac{c}{4}\cdot c=CD\cdot AB=AC\cdot BC$$

对作图无误的证明至此结束.

解法 2 用代数法作图. 在 Rt$\triangle ABC$ 中,斜边 $AB=c$,斜边上的中线 $OC=\frac{c}{2}$ 为已知,设 $AC=t$,$BC=u$,如图 1.3 所示,则有

$$tu=(\frac{c}{2})^2 \quad ①$$

$$t^2+u^2=c^2 \quad ②$$

2 × ① + ② 可得

$$(t+u)^2=\frac{3}{2}c^2$$

两边开平方取正值,得

$$t+u=\frac{\sqrt{6}}{2}c \quad ③$$

①,③ 联立,t,u 分别是一元二次方程

$$x^2-(\frac{\sqrt{6}}{2}c)x+(\frac{c}{2})^2=0 \quad ④$$

分析 求作的是一直角三角形,因斜边 c 已知,故问题在于确定第三顶点 C(即直角顶点).

本题解法不止一种,这里着重分析一种作法.

设图已完成,即 Rt$\triangle ABC$ 符合要求,如图 1.1 所示,易知点 C 在以 AB ($AB=c$) 为直径的圆 O 的圆周上. 为进一步弄清点 C 的确切位置,作斜边 AB 上的中线 OC($OC=\frac{c}{2}$) 和高 CD,则

$$(\frac{c}{2})^2=AC\cdot BC$$

$$AC\cdot BC=c\cdot CD$$

所以 $CD=\frac{c}{4}$,即点 C 又在平行于 AB 并与 AB 相距$\frac{c}{4}$的直线 CC' 上. 因此,直角三角形的直角顶点就是圆 O 与直线 CC' 的交点.

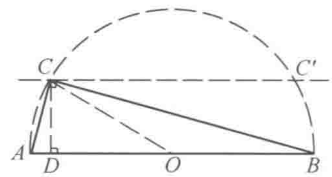


图 1.1

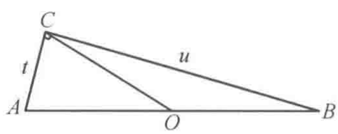


图 1.3