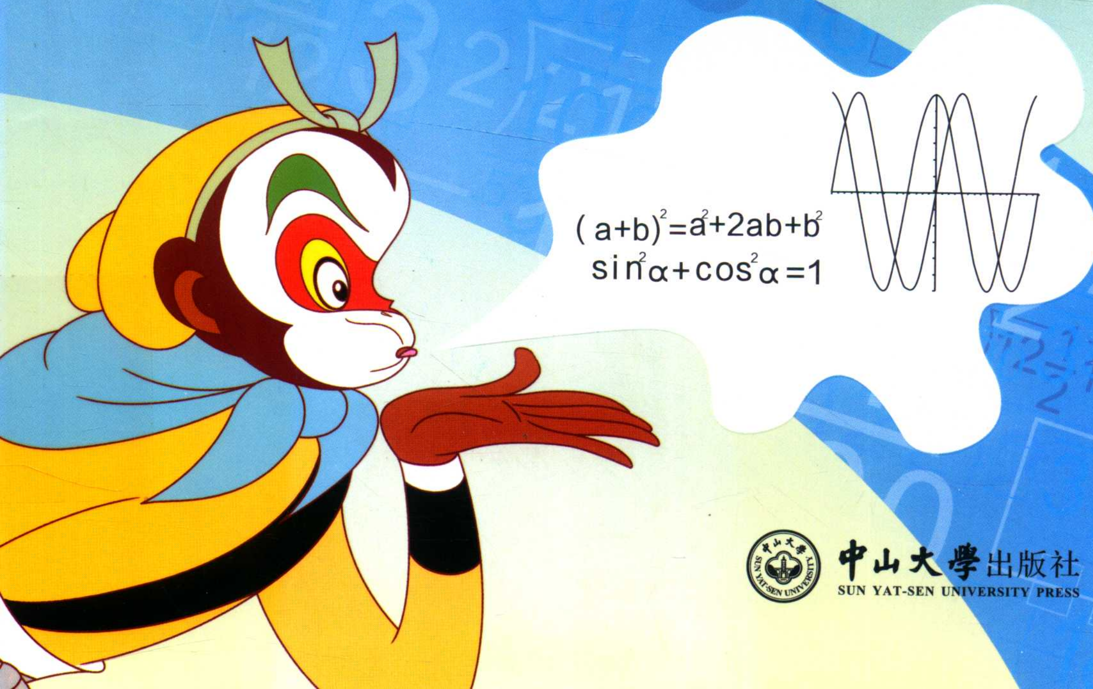
CHUDENG SHUXUE
BIANHUANFA JIQI YINGYONG

初等数学变换法及其应用

——“数学王国里的孙悟空”丛书系列

彭璋甫　彭革◆编著



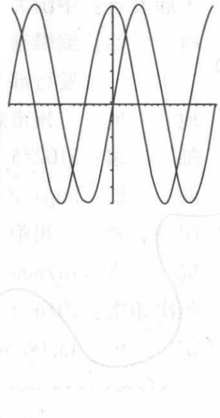
中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

CHUDENG SHUXUE
BIANHUANFA JIQI YINGYONG

初等数学变换法及其应用

——“数学王国里的孙悟空”丛书系列

彭璋甫　彭革◆编著



$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

中山大學出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

初等数学变换法及其应用/彭璋甫，彭革编著.—广州：中山大学出版社，2016.1
（数学王国里的孙悟空）
ISBN 978-7-306-05181-3

Ⅰ.①初…　Ⅱ.①彭…②彭…　Ⅲ.①中学数学课—教学参考资料　Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 023254 号

出 版 人：徐　劲
策划编辑：曾育林
责任编辑：曾育林
封面设计：曾　斌
责任校对：赵丽华
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020-84111996，84113349，84111997，84110779
　　　　　发行部 020-84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　传真：020-84036565
网　　址：http：//www.zsup.com.cn　　E-mail：zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：广州中大印刷有限公司
规　　格：787mm×1092mm　1/16　14.75 印张　335 千字
版次印次：2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

作者简介

彭璋甫　男，1940 年 6 月 23 日生，江西省莲花县人，中共党员 . 1963 年 7 月毕业于江西师范学院数学系本科，先后在江西省修水县文化教育局、江西省九江师范学校任函授教师、教研员、教研组长、教务主任、副校长 . 1987 年被评为高级讲师 . 现已退休，退休前为中共九江师范学校（现九江职业大学）党委委员，主管教学的副校长 . 参加编写的著作有：《初中数学复习资料》、《现代学生学习方法指导》（武汉大学出版社出版）. 发表《公倍数、公约数常见题型举隅》、《整数分解常见题型解法举隅》、《题组教学的作用》、《直观教学要注意科学性》等论文近十篇.

彭　革　男，1967 年 12 月 15 日生，江西省莲花县人 . 1984 年参加全国高中数学奥林匹克竞赛获二等奖 . 1990 年 7 月毕业于复旦大学数学系本科，获学士学位 . 先后在江西省九江师范学校、广东省广告公司、南方计算机公司、深圳华为通信股份有限公司任教或任职. 1996 年被评为讲师 . 现为深圳艾默生网络能源有限责任公司员工.

邮编：511484
住址：广州市番禺区沙湾镇新碧路芷兰湾五街七座801
电话：13610215970

前　言

但凡不愿学数学的人就是怕做数学题；然而，但凡喜欢数学的人就是从酷爱做数学题开始．因为数学题浩如烟海、变幻莫测、精彩纷呈，畅游其中趣味无穷，让人留恋、让人痴迷．

其实，“变”是世界的“通性”．辩证唯物主义者认为，静止是相对的，而运动是绝对的．事物的运动意味着变化．人类从原始社会到今天，不仅社会结构、生产方式在不断变化，而且人们的思想观念、生活方式也在变化．大自然的变化更是剧烈的．第四世纪冰川使恐龙等一些动物从地球上消失．在 3 万年前，北京是一片火海，由于海陆反复变迁，大约经过 1 万年，才成为陆地．位于我国长江入海口的崇明岛，是我国的第三大岛．但崇明岛原来也不是岛．据史书记载，由于长江的江水中挟带泥沙，使长江在下游流速变缓，江水失去搬运泥沙的能力，加上海边潮水的顶托，泥沙便大量沉积下来，到了唐初始出露水面，遂成沙洲．之后泥沙越积越多，使沙洲变成了小岛，从小岛又变成了大岛．近年来，由于长江上游森林遭到严重破坏，以及人工围垦造田等原因，水土流失使长江水中含沙量急剧增加，长江口有更多的泥沙沉积，崇明岛的面积由 1954 年的 600 多平方公里，猛增到现在的 1000 多平方公里，几乎增大了一倍．

世界上的一切事物都在运动、变化中发展．数学作为反映事物发展规律的一门科学，自然它的变化也是无穷无尽的．

看过《西游记》的人对孙悟空的印象非常深刻．孙悟空辅佐唐僧上西天取经获得成功，除了对师傅的一片真心之外，他超凡的功夫是一个重要因素．而这超凡的功夫，一是在太上老君的八卦炉中练就的火眼金睛，二是那一个筋斗就是十万八千里的筋斗云，三是七十二变．

如果我们拿学习数学与孙悟空辅佐唐僧上西天取经作一个类比的话，那么，你要做数学王国里的孙悟空，就必须热爱数学，必须掌握好数学的基础知识、思维方法和思想方法．因为，掌握好了数学的基础知识，就像孙悟空炼就的火眼金睛，能看清事物的本质；掌握了数学的思维方法，就像孙悟空的筋斗云，站得高，看得远；而掌握了数学的思想方法，就有了孙悟空的七

十二变，掌握了分析、处理和解决数学问题的基本手段.

马克思讲，数学是思维的体操. 体操是讲究变化的. 所以，我们可以毫不夸张地说：学数学最根本的一点就是要学会“变”.

当然，数学的变化、发展有它自身的规律. 就像孙悟空纵有七十二变，但万变不离其宗. 有一回，孙悟空变成一座庙，它的尾巴变成一根旗杆，竖在庙的后面，结果被妖魔识别出来. 因此，我们完全可以掌握解决数学问题的基本思想和方法.

作者认为解答初等数学难题的主要手段是“转化”：即将问题化繁为简、化难为易、化未知为已知. 其基本思想方法一是初等数学变换，二是构造法，三是反证法，四是类比与归纳。如果掌握了这些基本的思想方法，遇到较难的初等数学问题也能迎刃而解.

初等数学变换法是研究和解决初等数学问题时采取迂回手段达到目的的一种方法，也就是把将要解决的问题先进行变换，使之转化. 具体地讲，就是将复杂的问题通过变换转化成简单的问题，将难的问题通过变换转化成容易的问题，将未解决的问题通过变换转化成已解决的问题.

初等数学变换法是解决初等数学问题常用的一种最基本的方法. 掌握初等数学变换的一些方法不仅可以帮助同学们解决初等数学较为复杂的问题，还为今后学习高等数学变换，如射影变换、正交变换、傅立叶变换、拉普拉斯变换、拓扑变换等打下基础.

本书介绍的初等数学变换主要包括：恒等变换、分割变换、参数变换、初等几何变换和数与形的变换. 这里需要说明的是，因为高等数学中的分部积分被看作是分割变换（参考文献［4］，第105页），所以，我们把数与式的分解与组合看作是一种分割变换. 另外，有关初等数学参考书中把换元法与参数法分开来讲，笔者觉得，从变换的角度来考察，这两种方法的关键都是引入参数，只不过是消除参数的方法不同，因此，也并在一起统称参数变换. 这样做，似乎更省去一些名称，利于学生掌握.

本书在编写过程中参考了许多书目及报纸杂志，除本书末已列书目之外，难以一一列举，在此一并表示感谢. 由于作者水平有限，且有些问题尚在探索之中，书中错误和缺点必定不少，恳请广大读者多提出宝贵意见.

作　者

2015 年 10 月 1 日于顺德碧桂园

目　　录

第一章 恒 等 变 换

恒等变换就是把一个解析式变成与它恒等的另一个解析式. 使用恒等变换往往是在碰到的问题比较繁杂、一时难以下手的时候，通过恒等变换把要解决的问题简化，由未知到已知，最终解决问题. 所以，恒等变换的特点就是：将复杂的问题通过表达形式的变形转化成容易解决的简单问题.

恒等变换的哲学依据是形式与实质、矛盾与转化、未知与已知、对立与统一这些辩证思想. 数学中的很多公式，其等号两边的表达形式虽然不同，但本质是一样的. 它们都是恒等变换的结果.

我们常用公式、配凑、配方、分解因式、分子或分母有理化等方法对一个表达式进行恒等变换. 它在数学中的应用非常广泛. 下面我们着重从四个方面进行探讨.

§1－1 对条件的恒等变换

在解答给定条件的一些问题时，我们往往碰到这样一种情况：题目所给条件比较隐晦、复杂，不能直接应用已知条件得出问题的解答. 这个时候，我们就要考虑对已知条件进行适当的恒等变换，以便应用它得到问题的解答. 这种变换就叫作对条件的恒等变换.

对条件的恒等变换常用于解答求值、恒等式和不等式的证明等问题.

例1 设$\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$的整数部分是a，小数部分是b，试求$a^2+(1+\sqrt{7})ab$的值.

解： $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

$\because 2<\sqrt{7}<3$，$0<\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}<1$，$\therefore \dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+1+\sqrt{7}-1}{2}=2+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$，

$\therefore a=2$，$b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$.

故 $a^2+(1+\sqrt{7})ab=2^2+(1+\sqrt{7})\times 2\times\frac{\sqrt{7}-1}{2}=4+6=10.$

利用分母有理化，添项对已知条件进行恒等变换，求出整数部分 a 和小数部分 b，从而得到所求的值.

例 2 已知 $6x^2+12y^2=17xy(xy\neq 0)$，求 $\dfrac{x}{y-\dfrac{x}{1-\dfrac{y}{x}}}$ 的值.

解：由 $6x^2+12y^2=17xy$ 得 $(2x-3y)(3x-4y)=0$，

$\therefore 2x=3y$ 或 $3x=4y$，即 $x=\frac{3}{2}y$ 或 $x=\frac{4}{3}y$.

当 $x=\frac{3}{2}y$ 时，原式 $=\dfrac{\frac{3}{2}y}{y-\dfrac{\frac{3}{2}y}{1-\dfrac{y}{\frac{3}{2}y}}}=\dfrac{\frac{3}{2}y}{y-\frac{9}{2}y}=-\frac{3}{7}$；

当 $x=\frac{4}{3}y$ 时，原式 $=\dfrac{\frac{4}{3}y}{y-\dfrac{\frac{4}{3}y}{1-\dfrac{y}{\frac{4}{3}y}}}=\dfrac{\frac{4}{3}y}{y-\frac{16}{3}y}=-\frac{4}{13}.$

这里，利用分解因式对已知条件进行恒等变换，找到了 x 与 y 的关系，从而使问题得到解决.

例 3 已知 $0°<x<45°$，且有 $\lg\mathrm{tg}x-\lg\sin x=\lg\cos x-\lg\mathrm{ctg}x+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2$，试求 $\mathrm{sing}x-\cos x$ 的值.

解：由 $\lg\mathrm{tg}x-\lg\sin x=\lg\cos x-\lg\mathrm{ctg}x+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2$ 得 $\lg\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x}=\lg\frac{9}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos x}{\mathrm{ctg}x}$，即 $\lg\frac{1}{\cos x}=\lg\frac{9}{2\sqrt{2}}\sin x$，$\therefore\frac{1}{\cos}=\frac{9}{2\sqrt{2}}\sin x$，即 $\sin x\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

又 $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=1-2\times\frac{2\sqrt{2}}{9}=\frac{9-4\sqrt{2}}{9}=(\frac{1-2\sqrt{2}}{3})^2$，

而 $0°<x<45°$，$\therefore\sin x-\cos x<0$，故 $\sin x-\cos x=\frac{1-2\sqrt{2}}{3}.$

要求 $\sin x \pm \cos x$ 的值，只要求出 $\sin x\cos x$ 的值便可得，这是求三角函数值常用的一种技巧.

例 4　设 $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$，$x+y+z=1+\mathrm{i}$，$xy+yz+zx=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，试求 $|x^4+y^4+z^4|$ 的值.

解： $\because (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

$$
\begin{aligned}
&=x^2y+xyz+zx^2+xy^2+y^2z+xyz+xyz+yz^2+z^2x-xyz\\
&=x^2y+xy^2+z^2x+yz^2+zx^2+y^2z+2xyz\\
&=(x+y)(xy+z^2+zx+zy)\\
&=(x+y)(y+z)(z+x)=0,
\end{aligned}
$$

$\therefore x+y=0$ 或 $y+z=0$ 或 $z+x=0$.

当 $x+y=0$ 时，由 $x+y+z=1+\mathrm{i}$ 得 $z=1+\mathrm{i}$.

由 $\begin{cases}xy+yz+zx=1+\sqrt{3}\mathrm{i}\\ x+y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy+z(x+y)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}\\ x=-y\end{cases}$

$\Rightarrow -x^2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$-y^2=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，

$\therefore x^4=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$，$y^4=-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z^4=-4$，

于是 $x^4+y^4+z^4=-8+4\sqrt{3}\mathrm{i}$，

故 $|x^4+y^4+z^4|=4\sqrt{7}$.

由对称性，当 $y+z=0$ 或 $z+x=0$ 时，结果相同.

例 5　已知 $2x+3y+4z=1$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的极小值.

解： $\because 2x+3y+4z=1$，$\therefore (2x+3y+4z)^2=1$.

于是 $4x^2+9y^2+16z^2=1-12xy-24yz-16xz$.

又 $9x^2+4y^2\geqslant 12xy\Rightarrow -12xy\geqslant -(9x^2+4z^2)$，$16y^2+9z^2\geqslant 24yz\Rightarrow -24yz\geqslant -(16y^2+9z^2)$，$16x^2+4z^2\geqslant 16xz\Rightarrow -16zx\geqslant -(16x^2+4z^2)$，

$\therefore 4x^2+9y^2+16z^2\geqslant 1-(9x^2+4y^2)-(16y^2+9z^2)-(16x^2+4z^2)$，

即 $(16+4+9)(x^2+y^2+z^2)\geqslant 1$. $\therefore x^2+y^2+z^2\geqslant \dfrac{1}{29}$.

故 $x^2+y^2+z^2$ 的极小值是 $\dfrac{1}{29}$（当 $3x=2y$，$4y=3z$，$2z=4x$ 时）.

例 6　设常数 a，$b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，如果 $\log_m\dfrac{x}{a}\cdot\log_m\dfrac{x}{b}$（$m>0$，且 $m\neq 1$）的最小值是 $-\dfrac{1}{4}$，求 m.

解： $\because a$，$b\in\mathbf{R}^+$，$a\neq b$，$m>0$ 且 $m\neq 1$，令 $y=\log_m\dfrac{x}{a}\cdot\log_m\dfrac{x}{b}$，

则 $y=(\log_m x-\log_m a)(\log_m x-\log_m b)$

$$=\log_m^2 x-\log_m x(\log_m a+\log_m b)+\log_m a\cdot\log_m b$$

$$=\left(\log_m x-\frac{\log_m a+\log_m b}{2}\right)^2+\frac{4\log_m a\cdot\log_m b-(\log_m a+\log_m b)^2}{4}$$

$$=\left(\log_m x-\frac{\log_m a+\log_m b}{2}\right)^2-\frac{(\log_m a-\log_m b)^2}{4}.$$

$\because y_{\min}=-\frac{1}{4}$，$\therefore -\frac{(\log_m a-\log_m b)^2}{4}=-\frac{1}{4}$即$(\log_m a-\log_m b)^2=1$，

亦即$\left|\log_m \frac{a}{b}\right|=1$，故 $m=\frac{a}{b}$或$m=\frac{b}{a}$.

例7　已知$f(x)=2|x|+3$，$g(x)=4x-5$，且$f[p(x)]=g(x)$，求$p(3)$.

解：$\because f[p(x)]=2|p(x)|+3$，

又$f[p(x)]=g(x)=4x-5$，

$\therefore 2|p(x)|+3=4x-5\Rightarrow 2|p(x)|=4x-5-3\Rightarrow |p(x)|=2x-4$.

当$p(x)\geqslant 0$时，$|p(x)|=p(x)=2x-4$，$\therefore p(3)=2\times 3-4=2$.

当$p(x)\leqslant 0$时，$|p(x)|=-p(x)=2x-4$，$p(x)=4-2x$，

$\therefore p(3)=4-2\times 3=-2$.

例8　x，y，z为任意实数，若$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$，试证：$x=y=z$.

证明：$(y+z-2x)^2-(y-z)^2=(2y-2x)(2z-2x)=-4(x-y)(z-x)$，

同理$(z+x-2y)^2-(z-x)^2=-4(y-z)(x-y)$，即$(x+y-2z)^2-(x-y)^2=-4(z-x)(y-z)$.

由题设得：

$(x-y)(z-x)+(y-z)(x-y)+(z-x)(y-z)=0$，

又$(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$，且$[(x-y)+(y-z)+(z-x)]^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+2(x-y)(z-x)+2(y-z)(x-y)+2(z-x)(y-z)=0$，$\therefore (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$，$\therefore x-y=y-z=z-x=0$，

故$x=y=z$.

例9　设x，y，z为三个互不相等的数，且$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$，求证：$x^2y^2z^2=1$.

证明：由$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$得$yz(x-y)=y-z$.　①

由$y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$得$zx(y-z)=z-x$.　②

由 $x+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{x}$ 得 $xy(z-x)=x-y.$ ③

①×②×③，得：

$x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(z-x).$

$\because x\neq y\neq z$，$\therefore (x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$. 故 $x^2y^2z^2=1$.

例 10 已知 $\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{1}{a+b}(a,\ b>0)$，求证：$\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$.

证明： 由 $\frac{\sin^4x}{a}+\frac{\cos^4x}{b}=\frac{1}{a+b}$ 得 $\frac{(a+b)\sin^4x}{a}+\frac{(a+b)\cos^4x}{b}=1$，

即 $\sin^4x+\cos^4x+\frac{b\sin^4x}{a}+\frac{a\cos^4x}{b}=(sin^2x+\cos^2x)^2$，

即 $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\mathrm{x}-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x\right)^2=0$，$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\mathrm{x}=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2x$，$b\sin^2x=a\cos^2x$.

令 $\frac{\sin^2x}{a}=\frac{\cos^2x}{b}=\lambda$，即 $\sin^2x=a\lambda$，$\cos^2\lambda=b\lambda$，

代入已知条件，解得 $\lambda=\frac{1}{a+b}$，$\therefore \sin^2x=\frac{a}{a+b}$，$\cos^2x=\frac{b}{a+b}$，

故 $\frac{\sin^8x}{a^3}+\frac{\cos^8x}{b^3}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}$.

例 11 若 $a\mathrm{tg}\alpha=b\mathrm{tg}\beta$，且 $a^2x^2=a^2-b^2$，则 $(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)=1-x^2$.

证明： 由 $a\mathrm{tg}\alpha=b\mathrm{tg}\beta$ 得 $\frac{a\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b\sin\beta}{\cos\beta}$，

$\therefore \frac{a^2(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{b^2(1-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}$，

即 $a^2\cos^2\beta-a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta=b^2\cos^2\alpha-b^2\cos^2\alpha\cos^2\beta$.

$\therefore \cos^2\alpha=\frac{a^2\cos^2\beta}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}$.

于是 $(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha)$

$$=\left[1-\frac{a^2-b^2}{a^2}(1-\cos^2\beta)\right]\left[1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2\cos^2\beta}{b^2+(a^2-b^2)\cos\beta}\right]$$

$$=\frac{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}{a^2}\cdot\frac{b^2}{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\beta}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-(a^2-b^2)}{a^2}=$$

$$1-\frac{(a^2-b^2)}{a^2}=1-x^2.$$

例 12 设 $a>b>c>0$，$b+c\neq a$，且 $\frac{b^2+c^2-a^2}{4bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4ab}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=1$，求证：$a$，$b$，$c$ 成等差数列.

证明： 以 $4abc$ 乘等式两边得

$(b^2+c^2-a^2)a+(a^2+b^2-c^2)c+2(a^2+c^2-b^2)b=4abc$，

$(ab^2+ac^2-a^3)+(a^2c+b^2c-c^3)+2(a^2b+c^2b-b^3)-4abc=0$，

$(ab^2-a^3-ac^2+2a^2c)+(b^2c-a^2c-c^3+2ac^2)-2b^3+2a^2b+2bc^2-4abc=0$，

$a(b^2-a^2-c^2+2ac)+c(b^2-a^2-c^2+2ac)-2b(b^2-a^2-c^2+2ac)=0$，

即$(a+c-2b)[b^2-(a-c)^2]=0$，$\therefore (a+c-2b)(b+a-c)(b-a+c)=0.$

$\because b+a>c$，即 $b+a-c\neq0$，且 $b+c\neq a$，$\therefore a+c-2b=0$，即 $a+c=2b$，故 a，b，c 成等差数列.

例 13 **证明** 若 a，b，c 为不全相等的正数，则：

$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2>6abc.$

证明： $\because a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-6abc$

$=(a^2b-2abc+bc^2)+(b^2c-2abc+a^2c)+(ab^2-2abc+ac^2)$

$=b(a-c)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2$，

而 a，b，c 为不全相等的正数. $\therefore b(a-c)^2+c(a-b)^2+ca(b-c)^2>0$，

故 $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2>6abc.$

这里，不等式的证明方法是比较法，然而，在进行比较时，应用了因式分解，配方进行恒等变换，从而得出比较结果.

例 14 设 $a>b>0$，在 a，b 间插入 n 个数 x_1，x_2，…，x_n，使 a，x_1，x_2，…，x_n，b 成等比数列，求证：$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}.$

证明： 设等比数列 a，x_1，x_2，…，x_n，b 的公比为 q，则

$x_1x_2\cdots x_n=aq\cdot aq^2\cdots aq^n=a^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}$，

$\therefore \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\sqrt[n]{a^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}}=aq^{\frac{n+1}{2}}=\sqrt{a^2q^{n+1}}=\sqrt{a\cdot aq^{n+1}}=\sqrt{ab}.$

而 $a>b>0$，$\therefore \sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$，故$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}.$

§1－2　对结论的恒等变换

与第一节我们所讨论的问题相反，在另外一些数学问题中，所给已知条件

比较明确、简洁，但得出的结论必须经过适当的恒等变换，才能用上这些已知条件，从而使问题得到解决. 我们把这种恒等变换叫作对结论的恒等变换.

在求值、求三角函数的周期、数与式的整除、恒等式及不等式的证明等问题中，经常会使用这种变换.

例 1 计算下列各式的值：

(1) $(\log_2 3+\log_4 9+\cdots+\log_{2^n}3^n)\log_9\sqrt[n]{32}$；

(2) $\lg^2 2+\lg 5\lg 20$.

解 (1) 原式 $=\left(\dfrac{\log_2 3}{\log_2 2}+\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}+\cdots+\dfrac{\log_2 3^n}{\log_2 2^n}\right)\dfrac{\log_2\sqrt[n]{32}}{\log_2 3^2}=n\log_2 3\cdot\dfrac{\frac{5}{n}}{2\log_2 3}=\dfrac{5}{2}$.

(2) 原式 $=\lg^2 2+\lg 5\lg(4\times 5)=\lg^2 2+\lg 5(\lg 2^2+\lg 5)=\lg^2 2+2\lg 2\lg 5+\lg^2 5=(\lg 2+\lg 5)^2=1$.

此题似乎没有给出已知条件，但已知的某些公式以及 $\lg 10=1$ 可看成已知条件.

例 2 不查表，求 $\cos 108°$.

解 $\because \cos 108°=\cos(90°+18°)=-\sin 18°$，

又 $\sin 36°=\cos 54°$，即 $\sin(2\times 18°)=\cos(3\times 18°)$，

$2\sin 18°\cos 18°=4\cos^3 18°-3\cos 18°$，$\cos 18°\neq 0$，

$\therefore 2\sin 18°=4\cos^2 18°-3=4(1-\sin^2 18°)-3$，即 $4\pm\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0$.

解之得 $\sin 18°=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$（负值舍去），故 $\cos 108°=-\sin 18°=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

例 3 若 $\mathrm{tg}A=-\dfrac{4}{3}$，求 $2\sin^2 A+\sin A\cos A-3\cos^2 A$ 的值.

解 $\because \mathrm{tg}A=-\dfrac{4}{3}$，$\therefore \cos A\neq 0$，$\therefore 2\sin^2 A+\sin A\cos A-3\cos^2 A$

$$=\cos^2 A\cdot\frac{2\sin^2 A+\sin A\cos A-3\cos^2 A}{\cos^2 A}=\frac{1}{\sec^2 A}(2\mathrm{tg}^2 A+\mathrm{tg}A-3)=\frac{2\mathrm{tg}^2 A+\mathrm{tg}A-3}{1+\mathrm{tg}^2 A}$$

$$=\frac{2\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)-3}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\frac{32}{9}-\frac{13}{3}}{\frac{25}{9}}=\frac{32-39}{25}=-\frac{7}{25}.$$

利用商数关系，把只含有正弦、余弦的齐次式化为只含正切比的式子，这是三角函数求值常用的技巧.

例 4 求 $f(x)=\cos^6 x+\sin^6 x$ 的周期.

解： $\because f(x)=\cos^6 x+\sin^6 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x)=$

$1-3\sin^2x\cos^2x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{8}(1-\cos4x)=\frac{3}{8}\cos4x+\frac{5}{8}$,

又$\because$ $\cos x$ 的周期是 2π，$\cos4x$ 的周期是$\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)$的周期是$\frac{\pi}{2}$.

例 5　若 $4x-y$ 是 3 的倍数，则 $4x^2+7xy-2y^2$ 是 9 的倍数.

证明：$\because 4x^2+7xy-2y^2=(x+2y)(4x-y)$，而 $4x-y$ 是 3 的倍数，$x+2y=(4x-y)+3(y-x)$也是 3 的倍数，

$\therefore 4x^2+7xy-2y^2=(x+2y)(4x-y)$是 9 的倍数.

例 6　求证：$7+7^2+7^3+\cdots+7^{4n}$能被 100 整除.

证明：$\because 7+7^2+7^3+\cdots+7^{4n}$

$=(7+7^2+7^3+7^4)+(7^5+7^6+7^7+7^8)+\cdots+(7^{4n-3}+7^{4n-2}+7^{4n-1}+7^{4n})=(1+7+7^2+7^3)(7+7^5+\cdots+7^{4n-3})=400(7+7^5+\cdots+7^{4n-3})$,

$\therefore 7+7^2+7^3+\cdots+7^{4n}$能被 100 整除.

例 7　设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $z_1\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{z}_2=0$，其中 A 为不等于 0 的复数，证明：

(1) $|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$；

(2) $\frac{z_1+A}{z_2+A}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|$. (1987 年高考第 6 题)

证明：(1) $|z_1+A||z_2+A|=|z_1+A||\overline{z_2+A}|$

$=|(z_1+A)(\overline{z_2+A})|=|(z_1+A)(\bar{z}_2+\bar{A})|$

$=|z_1\bar{z}_2+A\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{A}|=|A\bar{A}|=|A|^2$.

(2)$\because A\neq0$，由(1)知 $z_2+A\neq0$，

$$\therefore \frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{(z_1+A)(\bar{z}_2+\bar{A})}{(z_2+A)(z_2+\bar{A})}=\frac{z_1\bar{z}+A\bar{z}_2+\bar{A}z_1+A\bar{A}}{|z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|A|^2}{|z_2+A|^2}=\frac{|z_1+A||z_2+A|}{|z_2+A|^2}=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|.$$

例 8　已知 a，b，c，d 为实数，且 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$，求证：$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$.

证明：左式 $=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$

$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

$\because a^2+b^2=c^2+d^2=1$.

$\therefore (ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$

例 9　若 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，则 $\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

证明： $\because \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$，

$\therefore \cos3\alpha + \cos3\beta + \cos3\gamma = 4(\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma) - 3(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 4(\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^2\gamma)$. ①

又 $\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma - 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - \cos\alpha\cos\beta - \cos\beta\cos\gamma - \cos\gamma\cos\alpha] = 0$，

$\therefore \cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma = 3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. ②

由①和②得：

$\cos3\alpha + \cos3\beta + \cos3\gamma = 12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

例 10　已知 $A + B + C = n\pi + \frac{\pi}{2}(n \in \mathbf{Z})$，求证：$\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B + tg\mathrm{B}tg\mathrm{C} + tg\mathrm{C}tg\mathrm{A} = 1$.

证明： $\because C = n\pi + \frac{\pi}{2} - (A + B)$，$\therefore \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}[n\pi + \frac{\pi}{2} - (A + B)] = \mathrm{ctg}(A + B) = \frac{1}{\mathrm{tg}(A + B)} = \frac{1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}$，即 $(\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B)\mathrm{tg}C = 1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B$，$\therefore \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}B\mathrm{tg}C + \mathrm{tg}C\mathrm{tg}A = 1$.

公式 $\mathrm{tg}(A + B) = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B}$ 常变形为 $\mathrm{tg}(A + B)(1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B) = \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B$，用于证明某些三角恒等式，特别是三角形内的三角恒等式.

例 11　设 $|z| \leqslant 1$，$|w| \leqslant 1$，$z \in c$，$w \in c$，求证：$|z + w| \leqslant |1 + \bar{z}w|$.

证明： $|1 + \bar{z}w|^2 - |z + w|^2 = (1 + \bar{z}w)(\overline{1 + \bar{z}w}) - (z + w)(\overline{z + w}) = (1 + \bar{z}w)(1 + z\bar{w}) - (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$

$= (1 + |z|^2|w|^2 + \bar{z}w + z\bar{w}) - (|z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w)$

$= 1 + |z|^2|w|^2 - |z|^2 - |w|^2$

$= (1 - |z|^2)(1 - |w|^2) \geqslant 0(\because |z| \leqslant 1,\ |w| \leqslant 1)$，

故 $|1 + \bar{z}w| \geqslant |z + w|$.

例 12　设 a，b，c 都是正数，且 $ab + bc + ca = 1$，求证：$a + b + c \geqslant \sqrt{3}$.

证明： $\because (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)$

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}[(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca)]$

$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geqslant 0$，

且 $ab + bc + ca = 1$，$\therefore (a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca) = 3$，

即 $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$.