概率论与数理统计学习指导

赵金娥　曾　黎　主编

科学出版社

概率论与数理统计学习指导

赵金娥　曾　黎　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为崔向照和李春主编的《概率论与数理统计》(科学出版社)的配套辅导书，按教材的章节次序，逐节编写内容概要及课后习题解答. 其中内容概要包含教材中各章的主要定义、相关概念与重要结果，此部分内容便于读者及时查找与复习相关概念与基本知识. 习题与解答部分给出了教材中各章习题的详细解答过程，力求解答过程书写规范，使读者从中可以理解和体会到如何思考、分析及表达问题.

本书可作为配套教材的同步学习辅导教材，也可作为非数学类专业学生学习概率论与数理统计的参考资料或参加硕士研究生入学考试的学习辅导资料.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/赵金娥，曾黎主编. —北京：科学出版社，2016.12

ISBN 978-7-03-047978-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①赵… ②曾… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 064148 号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：彭 涛

责任印制：白 洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 12 月第 一 版 开本：720×1 000 1/16

2016 年 12 月第一次印刷 印张：9

字数：182 000

定价：26.00 元

前　言

《概率论与数理统计学习指导》是为《概率论与数理统计》(崔向照、李春主编)教材编写的教学参考书. 本书按照教材的章节次序编写了内容概要和习题与解答，其中内容概要部分列出了各章节的主要定义和重要结果，实际上是一份复习提纲，是一本便于学生查找与巩固学习内容的实用手册. 习题与解答部分将习题分为A，B两组，A组题是基本训练题，目的在于帮助学生掌握概率论与数理统计的内容要点，用不同的习题帮助学生从各种不同角度思考所学内容的要点；B组题是提高题，目的是通过习题将学习内容加深和拓展，以满足学生的求知欲，使学生在概率论与数理统计内容的基础上“再向前走一点”.

初学者一般不习惯概率论与数理统计独有的思维方式，反映在做习题时常常觉得很困难，缺乏思路，难以下手，即使找到思路也无法表达清楚，习题做完也不敢肯定做对. 编者编写这本书的目的就是想从不同的角度给出示范，告诉学生应该如何思考、分析和表达，使学生一入门就能抓住问题的实质，解开概率统计世界的秘密.

本书第1章由陈灿编写，第2，3章由崔向照编写，第4，5章由李春编写，第6，7章由赵金娥编写，第8，9章由曾黎编写，全书由赵金娥进行统稿.

本书在编写时参考了大量的相关教材和文献资料，在此一并向相关作者表示感谢；同时要感谢科学出版社的编辑为本书出版所付出的辛勤劳动！

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2016年3月

目　录

前言

第 1 章　随机事件与概率 …… 1
一、内容概要 …… 1
1.1　随机事件及其运算 …… 1
1.2　概率的定义及确定方法 …… 2
1.3　条件概率 …… 3
1.4　事件的独立性 …… 4
二、习题与解答 …… 5

第 2 章　随机变量及其分布 …… 14
一、内容概要 …… 14
2.1　随机变量及其分布函数 …… 14
2.2　离散型随机变量 …… 15
2.3　连续型随机变量 …… 16
2.4　随机变量函数的分布 …… 19
二、习题与解答 …… 19

第 3 章　二维随机变量及其分布 …… 38
一、内容概要 …… 38
3.1　二维随机变量及其分布 …… 38
3.2　边际分布 …… 40
3.3　随机变量的独立性 …… 42
3.4　二维随机变量函数的分布 …… 42
*3.5　条件分布 …… 43
二、习题与解答 …… 44

第 4 章　随机变量的数字特征 …… 68
一、内容概要 …… 68
4.1　随机变量的数学期望 …… 68
4.2　随机变量的方差 …… 69

4.3　协方差与相关系数 …… 70
4.4　矩 …… 71
二、习题及解答 …… 71
第 5 章　大数定理与中心极限定理 …… 84
一、内容概要 …… 84
5.1　大数定理 …… 84
5.2　中心极限定理 …… 85
二、习题及解答 …… 86
第 6 章　数理统计的基础知识 …… 90
一、内容概要 …… 90
6.1　总体与样本 …… 90
6.2　统计量及其分布 …… 90
6.3　三大抽样分布 …… 92
二、习题与解答 …… 94
第 7 章　参数估计 …… 100
一、内容概要 …… 100
7.1　点估计 …… 100
7.2　估计量的评价标准 …… 101
*7.3　区间估计 …… 102
二、习题与解答 …… 104
第 8 章　假设检验 …… 116
一、内容概要 …… 116
8.1　假设检验的基本思想 …… 116
8.2　正态总体参数的假设检验 …… 117
*8.3　分布的假设检验 …… 118
二、习题与解答 …… 118
第 9 章　方差分析与回归分析 …… 129
一、内容概要 …… 129
*9.1　方差分析 …… 129
*9.2　一元回归分析 …… 131
二、习题与解答 …… 133

第 1 章　随机事件与概率

一、内 容 概 要

1.1　随机事件及其运算

1. 随机现象

在一定条件下并不总出现相同结果的现象.

2. 样本空间

随机试验的所有可能结果构成的集合，记为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 表示基本结果，又称为**样本点**.

3. 随机事件

样本空间 Ω 中的某些样本点组成的集合称为**随机事件**，常用 $A, B, C, \cdots$ 表示. Ω 表示必然**事件**，$\varnothing$ 表示**不可能事件**.

4. 事件的关系及运算

(1) **包含关系**　若属于 A 的样本点必属于 B，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称 A **包含于** B 或称 B **包含** A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(2) **相等关系**　若事件 A 与 B 相互包含，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

(3) **互不相容**　若 A 与 B 没有相同的样本点，即事件 A 与 B 不可能同时发生，则称 A 与 B **互不相容**.

(4) **事件的并**　事件 A 与 B 至少有一个发生称为事件 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$；n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**并**，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生，则称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的**并**，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$.

(5) **事件的交**　事件 A 与 B 同时发生称为事件 A 与 B 的**交**，记为 AB；n 个事

件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**交**，记为 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生，则称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的**交**，记为 $\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i$.

(6) **事件的差**　事件 A 发生而 B 不发生称为 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$.

(7) **对立事件**　事件 A 不发生称为事件 A 的**对立事件**，记为 $\overline{A}$.

5. 事件的运算性质

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$，　$AB=BA$；

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(AB)C=A(BC)$；

(3) **分配律**　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，　$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

(4) **De Morgan 公式**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，　$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

推广：$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}$，　$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{+\infty}\overline{A_i}$.

1.2　概率的定义及确定方法

1. 确定概率的频率方法　基本思想

(1) 与考察事件 A 有关的随机试验可大量重复进行；

(2) 在 n 次重复试验中，记 n_A 为事件 A 发生的次数，称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 发生的**频率**；

(3) 频率的稳定值就是概率；

(4) 当重复次数 n 较大时，可用频率作为概率的估计值.

2. 确定概率的古典方法　基本思想

(1) 所涉及的随机试验只有有限个样本点；

(2) 每个样本点发生的可能性相等；

(3) 若样本空间包含 n 个样本点，事件 A 包含 k 个样本点，则事件 A 发生的概率为

$$p(A)=\frac{k}{n}.$$

3. 确定概率的几何方法　基本思想

(1) 随机试验的样本空间充满某个可度量的区域，其度量大小可用 S_Ω 表示；

(2) 每个样本点发生的可能性相等，则称这种随机试验为**几何概型**；

(3) 事件 A 为 Ω 中某个子区域，且其度量为 S_A，则事件 A 发生的概率为

$$p(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}.$$

4. 概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验的样本空间，若对任意事件 A，均有唯一的一个实数 $p(A)$ 与之对应，且 $p(A)$ 满足下列条件：

(1) **非负性**　对任意事件 A，有 $p(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**　$p(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性**　若 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的一列事件，则有

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}p(A_i),$$

则称 $p(A)$ 为事件 A 发生的**概率**.

5. 概率的性质

(1) $p(\varnothing)=0$；

(2) **有限可加性**　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i);$$

(3) 对任意事件 A，有 $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$；

(4) 对任意两个事件 A, B，有 $p(A-B)=p(A)-p(AB)$，若 $B\subset A$，则有 $p(A-B)=p(A)-p(B)$ 且 $p(A)\geqslant p(B)$；

(5) 对任意事件 A，有 $0\leqslant p(A)\leqslant 1$；

(6) 对任意两个事件 A, B，有 $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB)$.

1.3　条件概率

1. 条件概率

设 A, B 是 Ω 中的两个事件，若 $p(A)>0$，则称

$$p(B \mid A)=\frac{p(AB)}{p(A)}$$

为**在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率**，简称**条件概率**.

2. 乘法公式

对于任意事件 A, B，若 $p(A)>0$，则有

$$p(AB)=p(A)p(B \mid A);$$

若 $p(B)>0$，则有

$$p(AB)=p(B)p(A \mid B).$$

3. 全概率公式

(1) **完备事件组** 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：

(i) $A_i A_j=\varnothing \ (i, j=1,2,\cdots,n$ 且 $i \neq j)$；

(ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个**完备事件组**.

(2) **全概率公式** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组，则对任意的事件 B，有

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i) p(B \mid A_i).$$

4. 贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一完备事件组，对任意事件 B，若 $p(B)>0$，则有

$$p(A_i \mid B)=\frac{p(A_i) p(B \mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p(A_j) p(B \mid A_j)}.$$

1.4 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

若随机事件 A, B 满足

$$p(AB)=p(A)p(B),$$

则称事件 A 与 B **相互独立**，简称事件 A 与 B **独立**.

2. 相关独立事件的性质

若随机事件 A 与 B 相互独立，则随机事件 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

3. 三个事件的独立性

对于三个随机事件 A, B, C，若同时满足：

$$p(AB)=p(A)p(B);$$

$$p(AC)=p(A)p(C);$$

$$p(BC)=p(B)p(C);$$

$$p(ABC)=p(A)p(B)p(C),$$

则称随机事件 A, B, C **相互独立**，若只有前三个等式成立，则称 A, B, C **两两独立**.

4. n 重伯努利试验

若随机试验 E 只有两种可能结果：A，$\overline{A}$，则称 E 为**伯努利试验**. 将伯努利试验在相同条件下独立地重复进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 **n 重伯努利试验**.

5. 伯努利定理

设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$p_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$$

其中 $q=1-p$；$k=0,1,2,\cdots,n$.

二、习题与解答

A　组

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛掷两颗骰子，观察两次点数之和；

(2) 连续抛掷一枚硬币，直至出现正面为止；

(3) 观察某路口一天通过的机动车车辆数；

(4) 观察某城市一天的用电量.

解　(1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$；

(2) 记抛掷出现反面为“0”，出现正面为“1”，则 $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),\cdots\}$；

(3) $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$；

(4) $\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

2．设样本空间 $\Omega=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，事件 $A=\{x \mid 0.5\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x \mid 0.8\leqslant x\leqslant 1\}$，具体写出下列各事件：(1) AB；(2) $A-B$；(3) $\overline{A-B}$；(4) $\overline{A\cup B}$.

解 (1) $AB=B=\{x \mid 0.8\leqslant x\leqslant 1\}$；

(2) $A-B=A\overline{B}=\{x \mid 0.5\leqslant x<0.8\}$；

(3) $\overline{A-B}=\{x \mid x<0.5$ 或 $x\geqslant 0.8\}$；

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}=\{x \mid x<0.5$ 或 $x>1\}$.

3．设 A, B, C 为三个事件，试表示下列事件：

(1) A, B, C 都发生或都不发生；

(2) A, B, C 中至少有一个发生；

(3) A, B, C 中不多于两个发生.

解 (1) $ABC\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(2) $A\cup B\cup C$；

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

4．一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三个产品，记 $A_i=\{$第 i 次抽取，抽到的是废品$\}$，$i=1, 2, 3$，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品；

(2) 只有第一次抽到废品；

(3) 三次都抽到废品；

(4) 至少有一次抽到合格品；

(5) 只有两次抽到废品.

解 (1) $A_1\cup A_2$；

(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

(3) $A_1A_2A_3$；

(4) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；

(5) $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

5．一袋中有 5 个红球和 2 个白球.从袋中任取一球，看过颜色后放回袋中，然后再从袋中任取一球.设每次取球时袋中的各个球等可能地被取到.求

(1) 第一、二次都取到红球的概率；

(2) 第一次取到红球、第二次取到白球的概率；

(3) 两次取得的球为红、白各一的概率；

(4) 第二次取到红球的概率.

解　从袋中两次有放回取球，有 7^2 种等可能取法.

(1) 设 A 为"第一、二次都取到红球"，则 A 有 5^2 种取法，于是 $p(A)=\frac{5^2}{7^2}=\frac{25}{49}$；

(2) 设 B 为"第一次取到红球、第二次取到白球"，则 B 有 $C_5^1C_2^1$ 种取法，于是 $p(B)=\frac{C_5^1C_2^1}{7^2}=\frac{10}{49}$；

(3) 设 C 为"两次取得的球为红、白各一"，则 C 有 $2C_5^1C_2^1$ 种取法，于是 $p(C)=\frac{2C_5^1C_2^1}{7^2}=\frac{20}{49}$；

(4) 设 D 为"第二次取到红球"，则 D 有 $C_5^1C_7^1$ 种取法，于是 $p(D)=\frac{C_5^1C_7^1}{7^2}=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}$.

6．一个盒子中装有 6 只晶体管，其中 2 只是不合格品，现在作不放回抽样；接连取 2 次，每次随机地取 1 只，求下列事件的概率：

(1) 两只都是合格品；

(2) 一只是合格品，一只是不合格品；

(3) 至少有一只是合格品.

解　从盒子中不放回抽取 2 次，有 C_6^2 种等可能抽取法.

(1) 设 A 为"两只都是合格品"，则 A 有 C_4^2 种取法，于是 $p(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$；

(2) 设 B 为"一只是合格品，一只是不合格品"，则 B 有 $C_4^1C_2^1$ 种取法，于是 $p(B)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$；

(3) 设 C 为"至少有一只是合格品"，则 $C=A\cup B$，且 A 和 B 互不相容，于是 $p(C)=p(A)+p(B)=\frac{14}{15}$.

7．一个口袋中装有 10 个球，分别标上号码 1 至 10，随机地从这个口袋中取 3 个球，求：

(1) 最小号码是 6 的概率；

(2) 最大号码是 6 的概率；

(3) 中间号码是 6 的概率.

解　从口袋中任取 3 个球，有 $C_{10}^3=120$ 种等可能取法.

(1) 设 A 为"最小号码是 6"，则 A 有 $C_4^2=6$ 种取法，于是 $\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$；

(2) 设 B 为“最大号码是 6”，则 B 有 $C_5^2=10$ 种取法，于是 $\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$；

(3) 设 C 为“中间号码是 6”，则 C 有 $C_5^1C_4^1=20$ 种取法，于是 $p(C)=\dfrac{C_5^1C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$.

8．在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求事件“两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$”的概率.

解　设 x,y 分别为取出的两个数，则 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，其面积 $S_\Omega=1$，记 A 为“两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$”，于是 $A=\left\{(x,y)\middle|x+y<\dfrac{6}{5}\right\}$，其面积 $S_A=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$，从而 $p(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{17}{25}=0.68$.

9．甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，若每艘船在码头停泊时间均为 6 小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率.

解　设 x,y 分别为甲乙两艘船到达码头的时刻，则 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 24\}$，其面积 $S_\Omega=24^2$，记 A 为“任何一艘都不需要码头空出”，于是 $A=\{(x,y)\mid y-x\geqslant 6$ 或 $x-y\geqslant 6\}$，其面积 $S_A=18^2$，从而 $p(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{18^2}{24^2}=\dfrac{9}{16}$.

10．已知事件 A,B 满足 $p(AB)=p(\overline{A}\,\overline{B})$，记 $p(A)=p$，求 $p(B)$.

解　由 $p(AB)=p(\overline{A}\,\overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-p(A)-p(B)+p(AB)$

$$\Rightarrow 1-p(A)-p(B)=0$$

$$\Rightarrow p(B)=1-p(A)=1-p.$$

11．已知 $p(A)=0.7$，$p(A-B)=0.3$，求 $p(\overline{AB})$.

解　由 $p(A-B)=p(A)-p(AB)=0.3$ 和 $p(A)=0.7$

$$\Rightarrow p(AB)=0.4$$

$$\Rightarrow p(\overline{AB})=1-p(AB)=0.6.$$

12．某工厂的一个车间有男工 7 人、女工 4 人，现要选出 3 个代表，求选出的 3 个代表中至少有 1 个女工的概率.

解　设 A 为“选出的 3 个代表中至少有 1 个女工”，则

$$p(\overline{A})=\frac{C_7^3}{C_{11}^3}=\frac{7}{33}$$

$$\Rightarrow p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{7}{33}=\frac{26}{33}.$$

13．已知 $p(\overline{A})=0.3$，$p(B)=0.4$，$p(A\overline{B})=0.5$，求 $p(B\mid A\cup\overline{B})$.

解　由 $p(\overline{A})=0.3$，$p(B)=0.4$，$p(A\overline{B})=0.5$

$\Rightarrow p(A\cup\overline{B})=p(A)+p(\overline{B})-p(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$.

再由 $p(A\overline{B})=p(A)-p(AB)=0.7-p(AB)=0.5\Rightarrow p(AB)=0.2$，从而

$$p(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{p(B(A\cup\overline{B}))}{p(A\cup\overline{B})}=\frac{p(AB)}{p(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}.$$

14. 某班级在一次考试中数学不及格的学生占 15%，英语不及格的学生占 5%，这两门课都不及格的学生占 3%.

(1) 已知一个学生数学不及格，他英语也不及格的概率是多少？

(2) 已知一个学生英语不及格，他数学也不及格的概率是多少？

解　记 A 为"数学不及格"，B 为"英语不及格"，则

$$p(A)=0.15,\quad p(B)=0.05,\quad p(AB)=0.03.$$

(1) $p(B\mid A)=\dfrac{p(AB)}{p(A)}=\dfrac{0.03}{0.15}=0.2$；

(2) $p(A\mid B)=\dfrac{p(AB)}{p(B)}=\dfrac{0.03}{0.05}=0.6$.

15. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知其中一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

解　记 A_i 为"第 i 次取出不合格品" $(i=1,2)$，B 为"有一件不合格品"，C 为"另一件也是不合格品"，则 $B=(A_1\overline{A}_2)\cup(\overline{A}_1A_2)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2)$，于是

$$p(B)=p(A_1\overline{A}_2)+p(\overline{A}_1A_2)+p(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{4\times6}{10\times9}+\frac{6\times4}{10\times9}+\frac{4\times3}{10\times9}=\frac{2}{3},$$

$$p(BC)=\frac{4\times3}{10\times9}=\frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow p(C\mid B)=\frac{p(BC)}{p(B)}=\frac{1}{5}.$$

16. 两台车床加工固焊零件，第一台出次品的概率是 0.03，第二台出次品的概率为 0.06，加工出来的零件放在一起且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

(1) 求任取一个零件是合格品的概率；

(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率.

解　记 A 为"取到第一台车床加工的零件"，B 为"取到合格品"，则

$$p(A)=\frac{2}{3},\quad p(B\mid A)=0.97,\quad p(B\mid\overline{A})=0.94.$$

(1) $p(B)=p(A)p(B\mid A)+p(\bar{A})p(B\mid\bar{A})=\dfrac{2}{3}\times 0.97+\dfrac{1}{3}\times 0.94\approx 0.96$；

(2) $p(\bar{A}\mid\bar{B})=\dfrac{p(\bar{A}\bar{B})}{p(\bar{B})}=\dfrac{p(\bar{A})p(\bar{B}\mid\bar{A})}{1-p(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0.06}{0.04}=\dfrac{1}{2}$.

17．已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，现从男女人数相等的人群中随机挑选一人，发现恰好是色盲患者，问此人是男人的概率是多少？

解　记 A 为“选到色盲患者”，B 为“选到男人”，则

$$p(B)=\frac{1}{2},\quad p(A\mid B)=5\%,\quad p(A\mid\bar{B})=0.25\%.$$

于是，所求概率为

$$p(B\mid A)=\frac{p(B)p(A\mid B)}{p(B)p(A\mid B)+p(\bar{B})p(A\mid\bar{B})}=\frac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05+0.5\times 0.0025}\approx 0.9524.$$

18．甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，已知目标被击中，求它是甲击中的概率.

解　记 A 为“目标被击中”，B_1 为“甲击中目标”，B_2 为“乙击中目标”，则

$$p(A)=p(B_1\cup B_2)=p(B_1)+p(B_2)-p(B_1B_2)=0.6+0.7-0.6\times 0.7=0.88.$$

再由 $B_1\subset A$ 可得所求概率为

$$p(B_1\mid A)=\frac{p(B_1A)}{p(A)}=\frac{p(B_1)}{p(A)}=\frac{0.6}{0.88}\approx 0.682.$$

19．设电路由 A, B, C 三个元件组成，若元件 A, B, C 发生故障的概率分别是 0.3, 0.2, 0.2，各元件独立工作，求下列三种情况下电路发生故障的概率.

(1) A, B, C 三个元件串联；

(2) A, B, C 三个元件并联；

(3) B 与 C 并联后再与 A 串联.

解　记 A, B, C 分别表示元件 A, B, C 发生故障.

(1) 所求概率为

$$p(A\cup B\cup C)=1-p(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-p(\bar{A})p(\bar{B})p(\bar{C})=1-0.7\times 0.8\times 0.8=0.552;$$

(2) 所求概率为

$$p(ABC)=p(A)p(B)p(C)=0.3\times 0.2\times 0.2=0.012;$$

(3) 所求概率为

$$\begin{aligned}p(A\cup(BC))&=p(A)+p(BC)-p(ABC)=p(A)+p(B)p(C)-p(A)p(B)p(C)\\&=0.3+0.2\times 0.2-0.3\times 0.2\times 0.2=0.328.\end{aligned}$$

20．若 $p(A)=0.4$， $p(A\cup B)=0.7$，在下列情况下求 $p(B)$.

(1) A, B 不相容；

(2) A, B 独立；

(3) $A\subset B$.

解　(1) 由于 A, B 不相容，从而 $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$，于是

$$p(B)=p(A\cup B)-p(A)=0.7-0.4=0.3;$$

(2) 由于 A, B 独立，从而 $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A)p(B)$，于是

$$0.7=0.4+p(B)-0.4p(B)\Rightarrow p(B)=0.5;$$

(3) 由于 $A\subset B$，从而 $A\cup B=B$，于是

$$p(B)=p(A\cup B)=0.7.$$

B　组

1．把 10 本书任意放在书架上，求其中指定的 3 本书放在一起的概率.

解　把 10 本书任意放在书架上，有 $10!$ 种等可能放法，记 A 为“指定的 3 本书放在一起”，则 A 有 $3!\times 8!$ 种放法，于是

$$p(A)=\frac{3!\times 8!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

2．设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任一间去住 $(n\leqslant N)$，设每个房间可容纳 n 个人，求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 间房间里各有一个人住；

(2) 恰有 n 间房各住一人.

解　将 n 个人分配到 N 个房间中去住，有 N^n 种等可能分法.

(1) 记 A 为“指定的 n 间房间里各有一个人住”，则 A 有 $n!$ 种分法，于是

$$p(A)=\frac{n!}{N^n};$$

(2) 记 B 为“恰有 n 间房各住一人”，则 B 有 $\mathrm{C}_N^n n!$ 种分法，于是

$$p(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}.$$

3．甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，若甲船的停泊时间为一小时，乙船的停泊时间为两小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率.

解　设 x, y 分别为甲、乙两艘轮船到达码头的时间，则 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,y\leqslant 24\}$，