




“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

Xinbian
Dongli Qixiangxue

新编动力气象学

(第二版)

李国平 编著

 气象出版社
China Meteorological Press

中国气象局局校合作教

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材四川省配套建设项目


2013年四川省本科院校“专业综合改革试点”省级立项建设项目(大气科学专业)



新编动力气象学

(第二版)

李国平 编著

 气象出版社
China Meteorological Press

内 容 简 介

本书全面、系统而简要地讲述动力气象学中的基本概念和基本原理,介绍处理大气动力学问题常用的数学方法,并用一定篇幅讨论了现代动力气象学理论中一些重要的问题,反映了动力气象学的一些新进展。全书共分十四章,论述了动力气象学的基本内容,包括地球流体力学基础、大气运动的基本性质、大气运动方程组、大气边界层理论、大气能量学、准地转动力学、大气波动、波动的不稳定理论、热带大气动力学等。

全书着重物理原理的阐述,数学处理过程较完整,并注重理论和实际的相互联系。本书内容全面,安排合理,逐步深入;叙述简明扼要,物理概念清楚,简化数学推导过程,理论联系实际;叙述准确清楚,深入浅出、简明易懂,附有著名科学家小传、重要名词解释、学科发展简史和大事记以及习题选解等丰富附录材料,很有特色,切合师生实际需求。本书可作为高等院校大气科学类专业及相关专业的本科教材以及气象高等学历教育教材,也可作为大气科学类专业专科、专升本及在职进修培训的教学参考书,亦可供气象、海洋、航空、环境等部门的科研人员及业务人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

新编动力气象学/李国平编著. —2版. —北京:气象出版社,2014.9
ISBN 978-7-5029-6001-8

I. ①新… II. ①李… ②… III. ①理论气象学 IV. ①P43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 209792 号

出版发行:气象出版社

地 址:北京市海淀区中关村南大街 46 号

总 编 室:010-68407112

网 址: <http://www.cmp.cma.gov.cn>

责任编辑:杨泽彬

封面设计:博雅思企划

印 刷:三河市鑫利来印装有限公司

开 本:720 mm×960 mm 1/16

字 数:650 千字

版 次:2014 年 9 月第 2 版

印 数:1~2000

邮政编码:100081

发 行 部:010-68409198

E-mail: qxcbs@cma.gov.cn

终 审:周诗健

责任技编:吴庭芳

印 张:32

印 次:2014 年 9 月第 1 次印刷

定 价:80.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等,请与本社发行部联系调换

前 言

在大气科学学科中,动力气象学(现多称大气动力学)是一门应用物理学和流体力学定律及数学方法,研究大气运动的动力和热力过程及其相互关系的重要分支学科。传统意义上的动力气象学涉及内容很广,包括大气热力学、大气动力学、大气环流、大气湍流、数值天气预报和大气数值模拟等,随着学科的发展和不断细化,现在动力气象学的内容则主要限于大气动力学。动力气象学的发展对更深刻地认识大气运动的机理、掌握天气和气候的变化规律具有十分重要的作用,它是大气科学的理论基石。

在大学大气科学类专业的课程体系中,动力气象学是一门重要的专业基础课,属核心必修课、专业主干课。该课程系统地讲述地球旋转大气运动的基本规律,介绍研究大气运动的基本方法和重要成果,为数值天气预报等后继课程提供必要的理论基础。通过学习该课程,使学生理解旋转大气运动特别是大尺度大气运动的基本特征,能够运用动力学的基本观点和方法分析大气问题,掌握大气动力学研究的主要结论,对动力气象学的最新进展和发展趋势有所了解。

根据面向 21 世纪专业技术人才培养的基本要求,我们在教学过程中既坚持全国指导性教学大纲,又特别注重培养和发展具有自己特色的教学模式,以此作为提高教学水平和教育质量、培养有特点学生的重要手段。围绕这一教学理念,根据气象事业发展战略和业务体制改革的要求以及大气科学类专业学生的培养目标,广泛收集国内外同类课程的教学资料和教改信息,认真进行研究和论证,大胆改革相关课程体系,对大气科学专业动力学类的专业基础课进行了结构性整合。在教学手段方面,1984 年以来我们就自编有动力气象习题集及习题解答,1994 年自主开发研制出“动力气象试题库微机管理系统”;2001 年又以二次开发方式制作出“动力气象试题库管理及试卷生成系统”,现已实现题库管理自动化,试题生成智能化,试卷、答案打印规范化,成绩录入、公布网络化。2002 年制作完成电子教案,开始使用多媒体投影方式进行教学,并在学校网络教学存储空间和教师主页,免费、开放式提供教学大纲、授课计划、电子教案、电子课件、专业软件、习题集、参考书目和参考文献目录、国外相关课程资料、考研资料等丰富的教学资源,并开展了 E-mail 答疑。1995 年就被四川省教委评为省级重点建设课程,2003 年被评为四川省首批省级精品课程,2010 年被评为国家精品课程。2012 年《新编动力气象学》分别入选四川省“十二五”普通高等教育

本科规划教材以及第一批“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材,2013年《新编动力气象学(第二版)》入选中国气象局局校合作教材建设项目。

作为大气科学的基础理论课,“动力气象学”教学内容丰富、信息量大,体系结构严谨、逻辑性强、数理知识要求高。因此,本书的内容涵盖动力气象学的全部内容,但任课教师可根据教学目标和学生特点灵活选择、合理组合。第1章至第7章,作为动力气象学的基础性内容也可安排在“地球流体力学”中讲授,这部分教学总学时(包括习题课、实验课)以60~70学时为宜。而第4章也可在“大气物理学基础”课中讲授;第8章可在“天气学原理”课和“天气诊断分析”课中讲授。第9章~第14章则是“动力气象学”课的核心内容,这部分教学总学时以70~80学时为宜。教学内容组织的方式有:课堂讲授(板书或多媒体投影教学)、课堂提问、讨论;课后作业、课后答疑(包括E-mail答疑);实验课(理论内容的流体力学装置模拟、计算机计算或图形演示);习题课(典型例题讲解、作业讲评)。

面向21世纪的高等教育需要包括教学手段在内的改革,动力气象学作为一门理论性较强的专业基础课,也需要重视并利用实验的方式来改进教学手段、提高教学效果。本课程传统的实践性教学环节主要为课堂布置一定数目的思考题和习题,这些问题多提炼自大气观测和天气分析实际问题,通过课堂典型例题讲解启发、学生课后完成作业(包括以程序设计或应用数学工具软件)、习题课讲评等环节,使学生加深对基本概念的理解,练习用动力学观点和数学知识分析和处理大气问题的基本方法,较直观地掌握大气动力学的基本原理和主要研究结论,鼓励本科生在二、三年级就参与课外科技活动或教师的科研课题,写科技小论文。此外,根据章节内容的需要,除了传统的理论推导、公式计算练习外,设计适当形式和数量的动力气象教学实验,通过计算机模拟实验或流体力学模型实验等形式让学生完成,应是动力气象学教学方式改革值得探索的一个方向。另外,对一些著名(动力)气象学家对本学科贡献的介绍,也是本书的特色之一,有利于学生了解学科发展的历史,培养他们追求科学,热爱专业,勇于创新的精神。

在大气科学专业的专业课学习中,动力气象学以其物理概念众多、数学推导复杂常使不少大气学子望而生畏,对学好这门课缺乏信心,产生畏难情绪。虽然1980—1991年国内编写、翻译出版了多本动力气象学教科书,但目前再版的很少,近5年仅有2本动力气象教科书问世,难以满足当前国内气象高等教育多规格、多样化人才培养的需求。因此,编写一本体系完整且简洁明了、强调物理概念、尽量简化数学推导、理论联系实际的通用型动力气象学教程很有必要,这也是编写、修订本书的初衷。

动力气象学由于其理论性强,广泛应用数学分析的知识,尤以矢量分析、场论、常微分方程和数学物理方程为主要工具。正是这些特点,初学者对求解动力气象学的习题深感困难,有无从着手之感。因此,为了帮助读者加深对课程内容的理解和巩固,启迪和开拓解题思路,提高解题能力和熟练演算技巧,应广大读者要求,本书在修

订出版时充实了一些习题,给出了几乎全部习题的答案以及 90% 习题的解答过程。但对于各章后的思考题,因为主要是在课堂上和课后看书、答疑的过程中解决,故我们没有作这部分题目的解答。限于水平和经验的关系,加之时间仓促,习题解答在解题的完备性、简捷性等方面一定有许多不足,欢迎读者批评、指正。

大道至简,静水深流。本书是作者从事大气科学本科、专科以及培训、轮训班“流体力学”“动力气象学”教学 30 多年的总结与体会,简明、通用是编写本教材的指导思想。笔耕不辍,犁久翻新,这也是本教材在出版 8 年之后修订、充实后出第二版的初衷。在此特别感谢有关专家的审读以及本校陈权亮教授、刘海文教授、毛文书副教授和华维博士提出的宝贵意见。对本校万军等教授在教学方面的指导和培养,对本校段廷扬教授、谢明元教授、杨光崇教授、李萍研究员、何晋副教授以及南京信息工程大学孙照渤教授对本书编写的支持和鼓励,对我的学生徐进明、林蟒、母灵、张虹、倪成诚、蒋璐君、邱静雅、谢慧敏、岳俊、董元昌、范瑜越、宋雯雯、郭洁、陈婷等,在本书文字、公式录入以及图形、图表绘制等方面的辛勤付出,对我教过和正在教的学生们对我的鼓励和期待,对成都信息工程学院大气科学学院院长范广洲教授、副院长周筠珺教授对本书顺利出版给予的大力支持,对中国气象局许小峰副局长以及科技与气候变化司、气象出版社的领导对本书出版和修订再版给予的关心,作者在此一并表示衷心的感谢。

作者

2014 年夏末于蓉城锦江河畔

目 录

前 言

第 1 章 流体力学基础	(1)
1.1 研究流体的基本思想	(1)
1.2 流体速度与加速度, Lagrange 法和 Euler 法	(2)
1.3 迹线和流线	(7)
1.4 涡度、散度、环流和形变率	(9)
1.5 速度势函数和流函数	(13)
思考题 1	(15)
习题 1	(15)
第 2 章 流体运动方程组	(19)
2.1 连续方程	(19)
2.2 作用在流体上的力	(20)
2.3 流体运动方程及其简化形式	(21)
2.4 能量方程	(25)
2.5 纳维-斯托克斯方程的简单解	(28)
思考题 2	(32)
习题 2	(32)
第 3 章 大气运动坐标系与方程组	(35)
3.1 作用于大气上的力, 惯性坐标系运动方程	(35)
3.2 视示力, 旋转坐标系运动方程	(36)
3.3 连续方程和热力学方程	(39)
3.4 球坐标系大气方程组简介	(40)
3.5 局地直角坐标系的大气方程组	(43)
3.6 坐标变换, 气压坐标系的大气方程组	(49)

3.7 有关科里奥利参数 f 的三个近似	(53)
思考题 3	(55)
习题 3	(56)
第 4 章 自由大气中的平衡运动	(59)
4.1 自然坐标系	(59)
4.2 地转风	(60)
4.3 梯度风	(62)
4.4 旋衡风	(63)
4.5 惯性风与惯性振荡	(64)
4.6 热成风	(66)
思考题 4	(68)
习题 4	(68)
第 5 章 尺度分析与方程组的简化	(71)
5.1 尺度,大气运动的分类	(71)
5.2 大气方程组的尺度分析	(75)
5.3 大气方程组的简化	(76)
5.4 常见的特征无量纲参数	(80)
思考题 5	(83)
习题 5	(84)
第 6 章 量纲分析与 π 定理	(88)
6.1 相似,相似判据	(88)
6.2 量纲分析, π 定律	(90)
6.3 π 定律的应用	(92)
思考题 6	(96)
习题 6	(96)
第 7 章 环流定理与涡度方程	(98)
7.1 环流定理	(98)
7.2 涡度方程	(105)

7.3 位势涡度,位势涡度守恒原理	(113)
7.4 散度方程	(117)
思考题 7	(118)
习题 7	(119)
第 8 章 准地转动力学基础	(124)
8.1 准地转运动的分类	(124)
8.2 准地转方程组	(127)
8.3 准地转位势涡度方程	(129)
8.4 准地转位势倾向方程	(129)
8.5 准地转 ω 方程	(131)
8.6 Q 矢量形式的 ω 方程	(132)
思考题 8	(133)
习题 8	(133)
第 9 章 大气边界层	(137)
9.1 大气边界层及其特征	(137)
9.2 湍流应力与平均运动方程组	(138)
9.3 边界层中风随高度的变化规律	(141)
9.4 埃克曼抽吸,次级环流和旋转减弱	(149)
9.5 埃克曼数和理查森数	(152)
思考题 9	(156)
习题 9	(156)
第 10 章 大气能量学	(159)
10.1 大气能量的主要形式	(159)
10.2 铅直气柱中各种能量的比较	(162)
10.3 能量方程与能量守恒定律	(164)
10.4 大气中的能量转换事实	(169)
10.5 大尺度大气运动的能量循环过程	(172)
思考题 10	(174)
习题 10	(174)

第 11 章 大气波动	(178)
11.1 波动的基本概念	(178)
11.2 群波与群速度	(181)
11.3 微扰法与方程组的线性化	(183)
11.4 大气声波	(187)
11.5 重力波	(190)
11.6 惯性波	(198)
11.7 惯性-重力波	(200)
11.8 大气长波	(202)
11.9 水平辐散条件下的长波,长波的频散效应	(207)
11.10 浅水模式中的混合波	(211)
思考题 11	(213)
习题 11	(214)
第 12 章 地转适应过程	(221)
12.1 地转偏差与地转适应过程	(222)
12.2 天气变化过程的阶段性	(224)
12.3 地转适应的机制	(228)
12.4 地转适应的尺度理论	(229)
思考题 12	(231)
习题 12	(232)
第 13 章 波动的不稳定理论	(234)
13.1 波动稳定度的概念	(234)
13.2 惯性不稳定	(236)
13.3 正压不稳定	(238)
13.4 斜压不稳定	(242)
13.5 开尔文-亥姆霍兹稳定度	(248)
思考题 13	(252)
习题 13	(252)

第 14 章 热带大气动力学基础	(255)
14.1 热带大气运动的主要特征	(255)
14.2 热带大气运动的尺度分析	(257)
14.3 热带大气波动	(257)
14.4 热带扰动发生、发展的机制	(262)
14.5 热带气旋结构的动力学分析	(263)
思考题 14	(270)
习题 14	(271)
主要参考书目	(273)
附录 1 著名科学家小传索引	(275)
附录 2 常用物理参数	(276)
附录 3 常用单位及换算表	(277)
附录 4 常用的矢量运算公式	(278)
附录 5 动力气象名词	(279)
附录 6 大气科学及动力气象学简史	(292)
附录 7 动力气象学大事记	(299)
附录 8 习题参考答案	(302)
附录 9 习题选解	(322)

第1章 流体力学基础

地球大气属于流体,如果说流体力学研究的是流体运动的一般规律,那么作为流体力学一个分支的地球流体力学研究的就是地球物理流体运动的具体规律,而动力气象学(现多称大气动力学)则是研究自转地球上的大气运动的特殊规律。因此,无论是学科发展的渊源,还是学科研究的方法,这三个学科的关系都非常密切。为了更好地学习动力气象学,有必要在本章简要介绍或复习一下流体力学研究的基本观点、基本方法以及所用的基本物理量。

- 流体:具有流动性,形状易变的物体(不同于固体、刚体),是液体和气体的统称。其典型实例有水、空气。

- 流体力学(Fluid Mechanics):研究流体运动规律以及流体和固体间相互作用的科学,不同于研究刚体的“理论力学”。

- 地球物理流体动力学(Geophysical Fluid Dynamics):以与地球相联系的大气、海洋等为主要研究对象的流体力学,国内习惯简称为地球流体力学。

- 大气流体力学(Fluid Mechanics of the Atmosphere):以地球大气为主要研究对象的流体力学。

1.1 研究流体的基本思想

质点力学中把实际物体抽象概括称为“质点”(有质量但无体积),流体力学也把实际流体抽象概括为“流点”或“连续介质”。

1.1.1 连续介质假设

把离散分子构成的实际流体,看作是由无数流体质点没有空隙、连续分布而构成的,称为“流点”,即流体质点是大量流体分子的集合,气象上称为空气微团或气块。

流体质点是连续分布的,其上的物理量(如温度、密度、速度等)也是连续分布的,从而构成各种可用连续函数表示的物理量场,可运用高等数学中矢量分析与场论的知识加以研究。

1.1.2 流点的尺度

既要充分小,以使它在流动中可当作“点”;又要足够大,能保持大量分子,具有确定的统计平均效应。其密度表示为:

$$\rho = \lim_{\delta\tau \rightarrow \delta\tau_0} \frac{\delta m}{\delta\tau} = \rho(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

1.1.3 流点概念的适用性

连续介质假设对大多数流体适用,但对个别情况不适用,如高层($z > 50$ km,即平流层中层以上)稀薄大气,因为此时流点必须取得很大,则失去了点的意义。

1.2 流体速度与加速度, Lagrange 法和 Euler 法

1.2.1 矢径

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.2)$$

其中 (x, y, z) 为直角坐标系中的位置坐标。

1.2.2 流速

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (1.3)$$

1.2.3 加速度

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (1.4)$$

1.2.4 拉格朗日(Lagrange)变量

$t = t_0$ 时,位于 $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ 的流点的位置可表示为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.5)$$

即:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (1.6)$$

则其流速为:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.7)$$

拉格朗日变量(观点):简称拉氏变量。着眼于个别流点,跟踪考察确定的个别流点在不同时刻的速度和位置。即以某一流点为对象,研究其空间位置及物理量随时间变化的规律,进而推广到整个流体中的所有流点。实例:漂流瓶、示踪剂。

著名科学家小传

拉格朗日(J. L. Lagrange, 图 1.1):1736年1月25日生于意大利西北部的都灵,1813年4月10日卒于巴黎。19岁就在都灵的皇家炮兵学校当数学教授。在探讨“等周问题”的过程中,他用纯分析的方法发展了欧拉所开创的变分法,为变分法奠定了理论基础。他的论著使他成为当时欧洲公认的一流数学家。拉格朗日科学研究所涉及的领域极其广泛。他在数学上最突出的贡献是使数学分析和几何与力学脱离开来,使数学的独立性更为清楚,从此数学不再仅仅是其他学科的工具。拉格朗日也是分析力学的创立者。拉格朗日在其名著《分析力学》中,在总结历史上各种力学基本原理的基础上,发展了达朗贝尔、欧拉等人的研究成果,引入了势和等势面的概念,进一步把数学分析应用于质点和刚体力学,提出了运用于静力学和动力学的普遍方程,引进广义坐标的概念,建立了拉格朗日方程;把力学体系的运动方程从以力为基本概念的牛顿形式,改变为以能量为基本概念的分析力学形式,奠定了分析力学的基础,为把力学理论推广应用到物理学其他领域开辟了道路。拉格朗日对流体运动的理论也有重要贡献,提出了描述流体运动的拉格朗日方法。

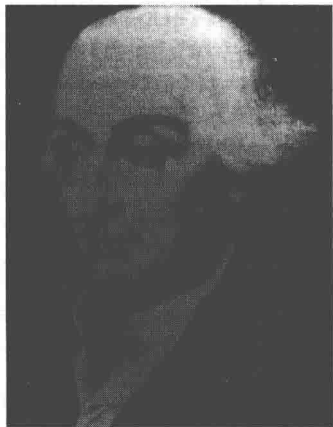


图 1.1 意大利数学和力学家拉格朗日(1736—1813)

判断流场用拉氏变量表示的特征:流场一般用位置坐标(函数)表示,变量为: x_0, y_0, z_0, t 。

1.2.5 欧拉(Euler)变量

固定在某一空间点 (x, y, z) 上考察其各个时刻的流速,表示为:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t) \quad (1.8)$$

或

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases} \quad (1.9)$$

即以流体空间某一固定体积元(空间中的固定点)为对象,研究不同时刻流体通过该固定点时的运动状态及物理量的变化规律。实例:气象站、水文站。

判断流场用欧拉变量表示的特征:流场一般用流速分量(函数)表示,变量为: x, y, z, t 。

欧拉观点的本质:把流体运动归结为物理量场的特征及变化,通过物理定律,转换为—组偏微分方程来描述。

著名科学家小传

欧拉(Leonhard Euler,图 1.2):瑞士数学家、力学家、天文学家、物理学家,变分法的奠基人,复变函数论的先驱者,理论流体力学的创始人。曾任圣彼得堡科学院教授,也是柏林科学院的创始人之一。他是刚体力学和流体力学的奠基者,弹性系统稳定性理论的开创人。他认为质点动力学微分方程可以应用于液体。他曾用两种方法来描述流体的运动,即分别根据空间固定点和根据确定的流体质点描述流体速度场。前者称为欧拉法,后者称为拉格朗日法。欧拉采用了连续介质的概念,把静力学中压力的概念推广到运动流体中,建立了欧拉方程,正确地用微分方程组描述了无黏性流体的运动,给出了反映质量守恒的连续方程和反映动量变化规律的流体动力学方程,奠定了理想流体的理论基础。



图 1.2 瑞士数学家和力学家欧拉(1707—1783)

1.2.6 描述流体运动的两种观点的关系

拉氏观点的优点:描述流体运动直观、明了(跟踪流点),如研究大气污染扩散、高层大气中的物质输送问题。缺点:解决问题时,应用数学工具不方便。

欧拉观点的优点:把流体运动当作(流)场随时间的变化,便于应用矢量分析、场论和数理方程等数学工具,应用更为广泛,如流体力学、动力气象学研究中涉及的绝大多数问题。缺点:研究整个流场需要建立很多观测站点。

两种变量仅是考察的角度不同,即着眼于流点还是空间(场)点,其描述同一流场的结论本质应该是一致的,则两者的表示结果可以相互转换。如欧拉变量转换为拉氏变量的步骤:(1)对 t 积分;(2)利用初始条件定出积分常数。即:

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = u[x(t), y(t), z(t), t] \\ v = v[x(t), y(t), z(t), t] \\ w = w[x(t), y(t), z(t), t] \end{cases} \quad (\text{空间点} \rightarrow \text{流点}) \quad (1.10)$$

因为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{dz}{dt} = w \end{cases} \quad (1.11)$$

(1.11)代入(1.10)后对 t 积分后可解得:

$$\begin{cases} x = x(c_1, c_2, c_3, t) \\ y = y(c_1, c_2, c_3, t) \\ z = z(c_1, c_2, c_3, t) \end{cases} \quad (1.12)$$

利用初始条件: $t=t_0$ 时, $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, 可求出 (c_1, c_2, c_3) , 即可用 (x_0, y_0, z_0) 表示这些积分常数。则最后可得:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (1.13)$$

这样就由欧拉变量转换成了拉氏变量。

课堂思考题

拉氏变量又如何转换为欧拉变量?

例题

例 1: 已知流场用欧拉变量表示为 $u = -\omega y, v = \omega x, w = 0$, 其中 ω 为常数。此处 x, y, z 为同一流点在不同时刻的空间坐标(如图 1.3 所示), 试将欧拉变量转换为拉氏变量。

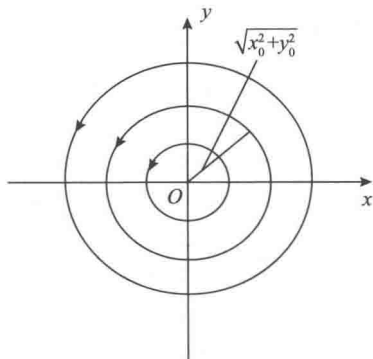


图 1.3 迹线族与流线族

解: 因为

$$u = \frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad v = \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad w = \frac{dz}{dt} = 0$$

消元后解一元二阶常微方程得:

$$x = A \cos(\omega t + \epsilon), \quad y = A \sin(\omega t + \epsilon)$$

其中 A, ϵ 为常数。设 $t=0$ 时, $x=x_0, y=y_0$ 为初始时该点的位置, 则有:

$$x_0 = A \cos \epsilon, \quad y_0 = A \sin \epsilon$$

可得:

$$A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \epsilon = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_0}{x_0}$$

则流场用拉氏变量表示为:

$$x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos\left(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_0}{x_0}\right), \quad y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin\left(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{y_0}{x_0}\right), \quad z = z_0$$

1.2.7 两种观点下的加速度表示

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (= \frac{d\mathbf{V}}{dt}) \quad (\text{拉氏观点}) \quad (1.14)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(x, y, z, t) \quad (\text{欧拉观点}) \quad (1.15)$$

两者实质上是一致的, 只是表示方法不同。若取(1.15)式中 (x, y, z) 为 t 时刻流点到达该空间点的位置坐标, 即把空间点的加速度变为该点随 t 变化的加速度时

$\left(\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt}\right)$, 有:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \quad (1.16)$$

引入 Nabla(或称 Hamilton)算子:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.17)$$

(1.16)式可改写为:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \mathbf{V} \quad (1.18)$$

此为应用 Euler 变量求流场加速度的计算公式。推广到更一般的物理量(无论矢量、标量), 有:

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\quad) \quad (1.19)$$

该式的物理意义是: 个别变化 = 局地变化 + 牵连变化(其中牵连变化 = 平流变化