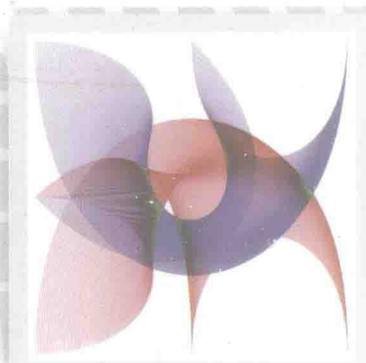
21世纪高等工科教育数学系列课程教材

线性代数与几何

张保才　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

21世纪高等工科教育数学系列课程教材

线性代数与几何

主　编　张保才

副主编　张素娟　李京艳

　　　　郭志芳　郭秀英

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是编者在多个省部级教学改革研究成果的基础上，结合多年的教学经验编写而成的。本书共7章，内容包括：行列式，矩阵，向量空间，线性方程组，相似矩阵及二次型，空间解析几何，线性空间与线性变换。每节后有习题，每章后有综合习题，并在部分章节配有适当的应用题、数学史或数学文化等内容。书后附有部分习题参考答案。

本书面向工科类学生，适合作为普通高等学校土木工程、机械工程、电气自动化工程、计算机工程、交通工程、工程管理、经济管理等本科专业的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/张保才主编．—北京：中国铁道出版社，2014.8
21世纪高等工科教育数学系列课程教材
ISBN 978-7-113-18913-6

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①线性代数—高等学校—教材②解析几何—高等学校—教材　Ⅳ．①O151.2 ②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第151676号

书　　名：线性代数与几何
作　　者：张保才　主编

策　　划：李小军　　读者热线：400-668-0820
责任编辑：李小军
编辑助理：曾露平
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任校对：汤淑梅
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市宏盛印务有限公司
版　　次：2014年8月第1版　　2014年8月第1次印刷
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16　印张：14.25　字数：340千
印　　数：1～3300册
书　　号：ISBN 978-7-113-18913-6
定　　价：28.00元

前　言

本书是在多年教学改革、教学研究的基础上，参照教育部教学指导委员会2012年颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求》(修改稿)和近年教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试》数学考试大纲的要求，通过多年的教学实践，结合编者丰富的教学经验，并在广泛征求意见的基础上编写而成的. 其总体结构、编写思想、难易度的把握等方面，以科学思维，科学方法贯穿始终，力求做到把现代的教学思想和方法渗透到整个教材中. 本书特点：

(1)以简明适用为原则，突出了对基本概念、基本方法、基本理论的介绍和训练.

(2)在内容选择与安排上，注意代数理论体系的系统性与严谨性、空间几何的直观性，将空间解析几何与线性代数做了有机的结合，使读者能够对基本概念有更深入的理解.

(3)在内容体系上努力做到结构设计合理，重点突出，重视理论联系实际.

(4)在重要的章节附有实际应用题，将数学建模思想巧妙地渗透到其中，以调动学生学习的积极性，提高学生分析问题和解决问题的能力.

(5)为培养学生学习数学的兴趣，在部分章节加入了与内容相关的数学史和数学文化，作为阅读材料供学生选读.

(6)在每节后配有精心选编的习题，各章后配有综合习题，书后附有习题答案. 书中带“*”的部分为选学内容.

全书内容包括：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、相似矩阵及二次型、空间解析几何、线性空间与线性变换等. 本书适合作为高等院校工科各专业公共数学基础课的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生的人员参考.

本书由张保才任主编，张素娟、李京艳、郭志芳、郭秀英任副主编。编者及分工如下：李京艳(第1章及第7章)，张素娟(第2章)，郭志芳(第3章及第6章)，郭秀英(第4章及第5章)，胡俊美编写了数学史和数学文化. 张保才负责总体方案的设计、具体内容安排及统稿工作. 在编写过程中，得到了顾祝全、牟卫华、刘响林、王永亮、胡荣等老师的大力支持. 石家庄铁道大学的许多任课老师提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢.

由于编者水平有限，书中疏漏和不足在所难免，不妥之处敬请读者指正.

编　者

2014年6月

目　录

第1章 行列式

行列式概念的建立源于求解线性方程组的实际需要,它作为一个重要的数学工具,在数学的各个领域和其他众多科学技术领域(如物理学、力学、工程技术等)都有着广泛的应用.

本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、行列式按行(列)展开、拉普拉斯(Laplace)展开定理以及解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

§1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶、三阶行列式

1. 二阶行列式

引例 用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}. \tag{1.1}$$

解 以 a_{22} 乘第一个方程,以 a_{12} 乘第二个方程,然后两式相减,消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,即有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

这就是二元线性方程组(1.1)的解公式,为了便于记忆,我们引入记号:$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq D$,并规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

称 D 为**二阶行列式**,其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为行列式的**元素**.这四个元素排成两行两列,横排称**行**,竖排称**列**.元素 a_{ij} 的右下角有两个下标 i 和 j,第一个下标 i 称为**行标**,它表示元素所在的行,第二个下标 j 称为**列标**,它表示元素所在的列.如 a_{12} 是位于第一行第二列上的元素,而 a_{21} 是位于第二行第一列上的元素.从行列式的左上角到右下角的连线称为行列式的**主对角线**,从行列式的右上角到左下角的连线称为行列式的**次对角线**.

从式(1.2)可知,二阶行列式是两项的代数和,一项是主对角线上两元素的乘积,取正

号；另一项是次对角线上两元素的乘积，取负号. 此规律可用对角线法则来记忆，如图 1.1 所示，二阶行列式 D 等于实线上两元素的乘积减去虚线上两元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

图 1.1

据此定义，可计算出

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

这样当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.1)的解公式便可以简洁明了地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

其中分母 D 是由方程组(1.1)的系数按它们原来在方程组中的次序所排成的二阶行列式，称为方程组(1.1)的**系数行列式**. D_j 是将系数行列式 D 的第 j 列元素依次用方程组右端的常数项替换后所得的二阶行列式 $(j = 1, 2)$.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases}.$$

解 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - 7 \times 5 = -11 \neq 0,$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - 7 \times (-3) = 29,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \times (-3) - 1 \times 5 = -14.$$

所以方程组的解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{29}{11}, x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{14}{11}$.

2. 三阶行列式

与二元线性方程组类似，对于含三个未知量 x_1, x_2, x_3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

可同样逐次消元，消去 x_2, x_3 可得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &= b_1 a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2 a_{32} - b_1 a_{23}a_{32} - a_{12}b_2 a_{33} - a_{13}a_{22}b_3. \end{aligned}$$

将上式中 x_1 的系数记为 D，则当 $D \neq 0$ 时，有

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1 a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2 a_{32} - b_1 a_{23}a_{32} - a_{12}b_2 a_{33} - a_{13}a_{22}b_3).$$

类似可得

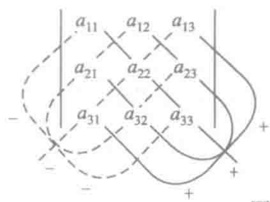
$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2 a_{33} + b_1 a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1 a_{21}a_{33} - a_{13}b_2 a_{31}),$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).$$

这是三元线性方程组(1.3)的解公式. 显然,要记住这个公式相当困难,为便于方程组的求解和记忆,引入由三行三列元素构成的三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq D$, 并规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

此规律也可借助于对角线法则来记忆,如图 1.2 所示 .



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{31}.$$

图 1.2

图中有三条实线和三条虚线,每条实线所连三个元素的乘积取正号,每条虚线所连三个元素的乘积取负号,三阶行列式等于这六个乘积的代数和.

注　计算行列式的对角线法则只适用于二阶、三阶行列式,并不能推广到更高阶的行列式.

现将方程组(1.3)中常数项 b_1,b_2,b_3 依次替换 D 中第 1 列、第 2 列、第 3 列元素所得的行列式分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

按三阶行列式定义计算 D_1,D_2,D_3, 发现三者恰为用消元法解方程组(1.3)所得 x_1,x_2,x_3 表达式的分子,而分母均为 D(称 D 为线性方程组(1.3)的系数行列式). 当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.3)有唯一的解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2　求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 \qquad\quad =1 \\ \qquad x_2-x_3=3. \\ x_1 \qquad\ +x_3=2 \end{cases}$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\times1\times1+(-1)\times(-1)\times1+0\times0\times0-1\times(-1)\times0-(-1)\times0\times1-0\times1\times1=2\neq0,$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&0\\3&1&-1\\2&0&1\end{vmatrix}=1+2+3=6, D_2=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&3&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=3-1+2=4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&3\\1&0&2\end{vmatrix}=2-3-1=-2.$$

所以方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=3, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1.$

1.1.2 n 阶行列式

从二、三阶行列式定义可以看出，二阶行列式是 2^2 个元素排成的二行、二列的表，它表示两项，即 2!项的代数和；三阶行列式是 3^2 个元素排成的三行、三列的表，它表示 6 项，即 3!项的代数和. 可以想象，n 阶行列式应由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的表构成，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

n 阶行列式表示多少项的代数和？每项的正负号如何确定？当 $n>3$ 时对角线法则并不适用，故为解决上述问题，需对二阶、三阶行列式做进一步研究，以便找出行列式所共有的特性，为此，下面先介绍全排列和逆序数概念.

1. 全排列及逆序数

在初等数学中，我们已经学过排列的知识.

n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的**全排列**(简称**排列**)，n 个不同元素的所有排列个数用 P_n^n 表示 .

例如，$\mathrm{P}_2^2=2!, \mathrm{P}_3^3=3!, \cdots, \mathrm{P}_n^n=n!$.

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，按标准次序排成的排列称为**标准排列**. 在 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 显然，标准排列的逆序数为 0.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面介绍求逆序数的方法.

考虑由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列. 规定由小到大为标准次序(即排列 $12\cdots n$ 为标准排列). 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

是由 $1,2,\cdots,n$ 构成的一个排列，逐个考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 小且排在 p_i 后面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i. n 个元素的逆序数之总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

就是这个排列的逆序数.

例 1.3　求排列 236154 的逆序数.

解　比 2 小且排在 2 后面的数只有一个(数 1),故 2 的逆序数为 1;

比 3 小且排在 3 后面的数只有一个(数 1),故 3 的逆序数为 1;

比 6 小且排在 6 后面的数有三个(数 1,5,4),故 6 的逆序数为 3;

比 1 小且排在 1 后面的数不存在,故 1 的逆序数为 0;

比 5 小且排在 5 后面的数只有一个(数 4),故 5 的逆序数为 1;

4 在末位,逆序数为 0.

所以,此排列的逆序数为

$$t = 1+1+3+0+1+0 = 6.$$

此排列为偶排列.

2. 对换

对于给定的一个排列,将其中任意两个元素对调,其余元素不动,得一新的排列,这种做出新排列的手续称为**对换**.将相邻两个元素对换,称**相邻对换**.如:

$$456231 \xrightarrow[\text{5 与 6 对换}]{\text{一次相邻对换}} 465231$$

$$456231 \xrightarrow[\text{5 与 3 对换}]{\text{一次相邻对换}} 436251.$$

容易算出

$$t(456231) = 11;$$
$$t(465231) = 12;$$
$$t(436251) = 10.$$

结果表明,经一次对换(无论是相邻对换还是不相邻对换),排列改变了奇偶性.此结论具有一般性.

定理 1.1　排列中任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设对换排列 $p_1 \cdots p_l p q q_1 \cdots q_m$ 中的 p 与 q,得到 $p_1 \cdots p_l q p q_1 \cdots q_m$.显然元素 $p_1, \cdots, p_l$ 与 $q_1, \cdots, q_m$ 的逆序数经过对换并不改变,而 p, q 两个元素的逆序数改变为:当 $p<q$ 时,经对换后 p 的逆序数没有改变而 q 的逆序数增加 1;当 $p>q$ 时,经对换后 p 的逆序数减少 1 而 q 的逆序数没有改变.总之,对换前后两个排列的逆序数相差 1,所以两个排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设对换排列 $p_1 \cdots p_l p q_1 \cdots q_m q r_1 \cdots r_k$ 中的 p 与 q,得到

$$p_1 \cdots p_l q q_1 \cdots q_m p r_1 \cdots r_k.$$

这个对换过程可看作先将元素 p 依次与 $q_1, \cdots, q_m, q$ 作 $m+1$ 次相邻对换,调成 $p_1 \cdots$

$p_l q_1 \cdots q_m q p r_1 \cdots r_k$，再用元素 q 依次与 $q_m, \cdots, q_1$ 作 m 次相邻对换，调成 $p_1 \cdots p_l q q_1 \cdots q_m p r_1 \cdots r_k$. 总之，排列 $p_1 \cdots p_l p q_1 \cdots q_m q r_1 \cdots r_k$ 经 $2m+1$ 次相邻对换调成排列 $p_1 \cdots p_l q q_1 \cdots q_m p r_1 \cdots r_k$，所以两个排列的奇偶性不同.

注意到标准排列是偶排列（逆序数为 0），不难得到如下推论.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

3. 三阶行列式的结构

三阶行列式的定义式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出其结构特点：

(1) 三阶行列式由 3^2 个元素构成，定义式右端的每一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里行标排成标准排列 123，而列标排成 $p_1p_2p_3$，是自然数 1,2,3 的某个排列. 这样的排列共有 6 个（$P_3^3 = 3! = 6$），正好对应定义式右端的项数. 这说明，三阶行列式等于所有取自不同行、不同列的三个元素乘积的代数和，共有 3! 项.

(2) 6 项中带正号、负号的各 3 项：

带正号的 3 项列标排列是 123，213，312，均为偶排列；

带负号的 3 项列标排列是 132，213，321，均为奇排列.

因此各项所带正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 是列标排列的逆序数.

由以上分析，三阶行列式可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

4. n 阶行列式的定义

定义 n 阶行列式由 n^2 个元素构成，其定义式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列，t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

由定义知，n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是位于不同行、不同列的 n

个元素的乘积,每项前面所带符号 $(-1)^t$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 t 确定.

n 阶行列式 D 有时也简记作 $\Delta(a_{ij})$.

规定:一阶行列式的值就等于构成行列式的元素,如 $|-1|=-1$. 注意不要与绝对值记号混淆.

下面给出另一形式的 n 阶行列式定义.

定理 1.2 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证 由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的全排列,因此 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 是取自不同行、不同列的元素的乘积.

若交换 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 中两个元素 a_{p_ii} 与 a_{p_jj},则其行标排列由 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 变为 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$,同时其列标由排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 变为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$,由定理 1.1,二者逆序数的奇偶性均改变. 由定理 1.1 推论知,如果 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列,则经过偶数次对换可换成标准排列,同时其列标由标准排列 $12\cdots n$ 变为 $q_1q_2\cdots q_n$,为偶排列;如果 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列,则经过奇数次对换可换成标准排列,同时其列标由标准排列 $12\cdots n$ 变为 $q_1q_2\cdots q_n$,为奇排列. 即 $(-1)^t=(-1)^s$,其中 s 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 故 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 中每一项 $(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 均可经过有限次对换变为 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$,即 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=D$.

例 1.4 根据定义可知,对角行列式(主对角线上可能有非零元,其余元素全为 0)

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.5 证明

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 记 $\lambda_1=a_{1n},\lambda_2=a_{2,n-1},\cdots,\lambda_n=a_{n1}$. 则由 n 阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,故

$$t=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.6 计算 n 阶上三角行列式(主对角线以下的元素全为零)：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 该行列式的特点是主对角线以下的元素皆为零,即当 $j<i$ 时, $a_{ij}=0$.

n 阶行列式的每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 而该行列式除主对角线上 n 个元素乘积之外,其余各项中至少有一个元素为零,故

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中 $t=t(12\cdots n)=0$.

同样,下三角行列式(主对角线以上元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习 题 1.1

1. 用定义计算下列行列式 .

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

2. 按自然数从小到大的标准次序,求下列各排列的逆序数 .

(1) 4132; (2) 2431; (3) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$; (4) $24\cdots(2n)(2n-1)\cdots31$;

(5) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$;

(6) 如果排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 有 s 个逆序,求排列 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 的逆序数.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{24}$ 的项,并确定这些项的符号.

4. 在六阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 与 $a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}a_{66}a_{25}$ 各应取什么符号?

5. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零,证明:该行列式为零.

6. 用定义计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

§1.2 行列式的性质与计算

一般情况下，由定义计算高阶行列式工作量很大，且符号确定比较麻烦. 若行列式中零元素较多，则计算会简单得多. 如果能够通过适当的变换将行列式中某些元素变为零，则会简化行列式的计算. 为此，我们介绍行列式的性质.

1.2.1 行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为行列式 D 的**转置行列式**. 显然，D 也是 D^{T} 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义，有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

根据定理 1.2 又有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$