



高等职业教育十二五规划教材

DENG ZHI YE JIAO YU SHI ER WU GUI HUA JIAO CAI

高等数学 实用教程

主编 许艾珍



航空工业出版社

高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学实用教程

主编 许艾珍

航空工业出版社

内 容 提 要

本书共 10 章, 分别介绍了函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 常微分方程, 空间解析几何, 多元函数微积分, 无穷级数和 MATLAB 基础及其应用等内容。附录给出了常用积分表。

本书结构合理、语言简洁、详略得当, 既可作为高等院校高等数学课程教材, 也可作为读者学习高等数学的参考用书。

图书在版编目 (C I P) 数据

高等数学实用教程 / 许艾珍主编. — 北京: 航空工业出版社, 2013. 6

ISBN 978-7-5165-0160-3

I. ①高… II. ①许… III. ①高等数学—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 110455 号

高等数学实用教程 Gaodeng Shuxue Shiyong Jiaocheng

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话: 010-64815615 010-64978486

北京忠信印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经售

2013 年 6 月第 1 版

2013 年 6 月第 1 次印刷

开本: 787×1092

1/16

印张: 21.5

字数: 537 千字

印数: 1—3000

定价: 45.00 元

序

高职高专教育是我国一种新的教育类型，它培养的是高素质高技能应用型人才，因而它的人才培养模式、教学体系、课程设置以及课程内容必然与本科院校有着本质的区别，与之相应的教材内容建设也势必需要具备高职高专自身特色。

数学学科一直被称为是“科学的皇后”，它的系统性、逻辑性、严密性和抽象性都让高职学生望而生畏，而本书在内容的深度和广度上遵循“以应用为目的，够用为度”的原则，特别是将大量的专业实例引进了课堂，将数学建模的思想有机地渗透进了课堂，充分地体现了高职院校需求的实践性、开放性和职业性。

本书最大的特色在于实现了课程内容的“三化”，即内容选取现代化、组织方式模块化、课程功能综合化，突破了传统课程“重知识、轻能力，重模仿、轻思维，重记忆、轻应用”的局限，发挥课程内容在知识、技能、能力、思想方法和实际应用方面的综合性功能，从而提高学生的数学素养和实践能力。

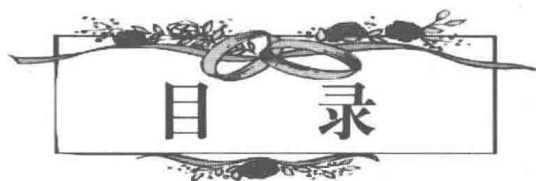
本书突破了教材的传统格局，力求用主题或项目统领整体，采用问题引领的方式引出教学内容，并较好地将数学建模的思想渗透到教学内容的每一个章节，做到了“承前启后”、“适度够用”、“学以致用”，充分体现了数学的应用性，有助于在教学过程中实现“教、学、做”一体化。

本着“百花齐放，百家争鸣”的原则，苏州工业职业技术学院的数学教师团队敢于实践，勇于探索，通过专业调研，在专家大力支持和指导下，编写了这本书。本书力求做到以服务专业为宗旨、以培养能力为重点、以掌握思想方法为主线、以实际应用为切入点、以信息技术为手段、以文化渗透为亮点、以课程资源建设为抓手，最终实现以全面提升高职学生数学素养为目的的教学目标。

在本书即将出版之际，我为此书作序，希望今后高职高专出现更多更好的数学精品教材，为高职高专的数学教学做出更大的贡献。



2013年6月22日



第1章 函数、极限与连续性	1
1.1 初等函数回顾	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 函数的几种特性	2
1.1.3 初等函数	2
1.1.4 反函数和复合函数	6
习题 1.1	7
1.2 极限的概念	8
1.2.1 数列的极限	8
1.2.2 函数的极限	10
习题 1.2	15
1.3 极限的运算法则	15
1.3.1 极限的四则运算法则	15
1.3.2 复合函数的极限法则	17
* 1.3.3 函数极限的性质	18
* 1.3.4 两个重要准则	18
习题 1.3	19
1.4 两个重要极限	20
1.4.1 第一个重要极限	20
1.4.2 第二个重要极限	21
习题 1.4	23
1.5 无穷小与无穷大	24
1.5.1 无穷小	24
1.5.2 无穷大	25
1.5.3 无穷大与无穷小的关系	26
1.5.4 无穷小的比较	27
习题 1.5	29
1.6 函数的连续性	29
1.6.1 函数的连续性	30
1.6.2 函数的间断点及其分类	32
习题 1.6	34
1.7 连续函数的四则运算与初等函数的连续性	35
1.7.1 连续函数的四则运算	35
1.7.2 复合函数的连续性	35

1.7.3 初等函数的连续性	36
1.7.4 闭区间上连续函数的性质	37
习题 1.7	38
1.8 利用极限建模	39
复习题一	41
第 2 章 导数与微分	43
2.1 导数的概念	43
2.1.1 导数的定义	44
2.1.2 导数的几何意义	46
2.1.3 可导与连续的关系	47
习题 2.1	48
2.2 导数的计算	49
2.2.1 导数的基本公式	49
2.2.2 导数的四则运算	51
2.2.3 复合函数的导数	52
2.2.4 几个求导方法	54
2.2.5 高阶导数	57
习题 2.2	60
2.3 函数的微分	62
2.3.1 微分的概念	62
2.3.2 微分的几何意义	63
2.3.3 微分运算法则	63
2.3.4 近似计算	65
习题 2.3	67
2.4 微分方程模型	68
复习题二	70
第 3 章 导数的应用	72
3.1 中值定理	72
3.1.1 罗尔定理	73
3.1.2 拉格朗日中值定理	73
习题 3.1	75
3.2 洛必达法则	76
3.2.1 洛必达法则 I: ($\frac{0}{0}$ 型)	76
3.2.2 洛必达法则 II: ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)	77
* 3.2.3 其他类型的极限求法	78
习题 3.2	80
3.3 函数的单调性、极值与最值	80



3.3.1 函数单调性的判别方法	81
3.3.2 函数的极值	83
3.3.3 函数的最大值与最小值	84
习题 3.3	86
3.4 函数的凹凸性与作图	87
3.4.1 函数的凹凸性与拐点	87
3.4.2 渐近线	88
3.4.3 作初等函数的图形	89
习题 3.4	94
3.5 利用导数建模	94
复习题三	96
第 4 章 不定积分	99
4.1 不定积分的概念	99
4.1.1 原函数与不定积分的概念	99
4.1.2 不定积分的性质	100
4.1.3 不定积分的几何意义	100
4.1.4 基本积分表	101
习题 4.1	103
4.2 凑微分法	103
4.2.1 凑微分法的概念	104
4.2.2 凑微分法举例	104
习题 4.2	107
4.3 变量代换法	108
4.3.1 变量代换法的概念	108
4.3.2 有理代换	108
4.3.3 三角代换	109
4.3.4 倒代换	112
* 4.3.5 双曲代换	113
习题 4.3	115
4.4 分部积分法	115
4.4.1 分部积分公式	115
4.4.2 被积函数为多项式与指数函数、三角函数乘积的情形	116
4.4.3 被积函数为多项式与对数函数、反三角函数之积的情形	117
4.4.4 形如 $\int e^{ax} \sin \beta x dx$, $\int e^{ax} \cos \beta x dx$ 的积分	117
4.4.5 被积函数由某些复合函数构成的情形	118
习题 4.4	120
* 4.5 其他积分方法	120
4.5.1 简单有理分式函数的积分	120



4.5.2 三角函数有理式的积分	121
4.5.3 无理函数的积分	122
习题 4.5	123
复习题四	123
第 5 章 定积分及其应用	126
5.1 定积分的概念与性质	126
5.1.1 定积分的概念	127
5.1.2 定积分的几何意义	128
5.1.3 定积分的性质	129
习题 5.1	130
5.2 微积分基本定理	131
5.2.1 原函数存在定理	131
5.2.2 微积分基本定理	132
习题 5.2	134
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法	135
5.3.1 凑微分法	135
5.3.2 变量代换法	135
5.3.3 分部积分法	136
* 5.3.4 三角函数积分	137
习题 5.3	137
5.4 广义积分	138
5.4.1 无穷区间上的广义积分	138
5.4.2 无界函数的广义积分	139
习题 5.4	141
5.5 定积分在几何上的应用	141
5.5.1 平面图形的面积	142
5.5.2 旋转体的体积	143
* 5.5.3 曲线的弧长	145
习题 5.5	146
5.6 积分方程模型	146
复习题五	148
第 6 章 常微分方程	152
6.1 常微分方程的基本概念	152
6.1.1 定义	153
6.1.2 可分离变量的微分方程	153
6.1.3 一阶齐次微分方程	155
6.1.4 高阶微分方程	156
习题 6.1	157
6.2 一阶线性微分方程	158

6.2.1 一阶线性微分方程与常数变易法	158
6.2.2 一阶线性微分方程求解举例	159
习题 6.2	162
6.3 可降阶的二阶微分方程	162
6.3.1 $y'' = f(x, y')$ 型	163
6.3.2 $y'' = f(y, y')$ 型	164
习题 6.3	165
6.4 二阶常系数线性微分方程	165
6.4.1 二阶常系数线性微分方程解的性质及通解结构	166
6.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	167
6.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	170
习题 6.4	172
复习题六	173
第 7 章 空间解析几何	175
7.1 空间直角坐标系和向量	175
7.1.1 空间直角坐标系	175
7.1.2 向量的基本概念	177
7.1.3 向量的线性运算	177
7.1.4 向量的坐标表示方法	179
7.1.5 用坐标表示向量的模和方向	180
习题 7.1	182
7.2 向量的数量积与向量积	182
7.2.1 向量的数量积	183
7.2.2 向量的向量积	185
习题 7.2	188
7.3 空间平面与直线的方程	188 ✓
7.3.1 平面方程	188
7.3.2 直线方程	191
7.3.3 求直线方程和平面方程的综合例题	193
7.3.4 平面、直线间的关系	195
习题 7.3	199
7.4 曲面与空间曲线	200
7.4.1 曲面方程的概念	200
7.4.2 柱面	201
7.4.3 旋转曲面	203
7.4.4 空间曲线及其方程	205 ✓
7.4.5 空间曲线在坐标面上的投影	206 ✓
习题 7.4	207
复习题七	207



第 8 章 多元函数微积分	209
8.1 多元函数的基本概念	209
8.1.1 多元函数的概念	209
8.1.2 二元函数的极限	211
8.1.3 二元函数的连续性	212
8.1.4 二元连续函数在有界闭区域上的性质	212
习题 8.1	213
8.2 偏导数	213
8.2.1 偏导数概念与计算	214
8.2.2 高阶偏导数	216
习题 8.2	218
8.3 全微分	218
8.3.1 全微分的定义	218
8.3.2 全微分在近似计算方面的应用	220
习题 8.3	221
8.4 多元复合函数与隐函数的求导	222
8.4.1 复合函数的求导法则	222
8.4.2 隐函数的求导公式	226
习题 8.4	229
8.5 多元函数的极值和最值	230
8.5.1 二元函数的极值	230
8.5.2 多元函数的最值	232
8.5.3 二元函数的条件极值	233
习题 8.5	235
8.6 二重积分的概念与性质	235
8.6.1 二重积分的概念	236
8.6.2 二重积分的性质	237
习题 8.6	239
8.7 二重积分的计算与应用	240
8.7.1 直角坐标系下二重积分的计算	240
8.7.2 极坐标系下二重积分的计算	245
8.7.3 二重积分的应用	247
习题 8.7	250
复习题八	251
第 9 章 无穷级数	254
9.1 常数项级数的概念和性质	254
9.1.1 数项级数的基本概念	254
9.1.2 无穷级数的基本性质	257
习题 9.1	258



9.2 数项级数的审敛法	259
9.2.1 正项级数及其审敛法	259
9.2.2 交错级数审敛法	262
9.2.3 任意项级数的绝对收敛与条件收敛	263
习题 9.2	264
9.3 函数项级数与幂级数	264
9.3.1 函数项级数的概念	265
9.3.2 幂级数及其收敛区间的求法	265
9.3.3 幂级数的四则运算	268
9.3.4 幂级数的分析运算	269
习题 9.3	272
9.4 函数展开成幂级数	272
9.4.1 泰勒级数	273
9.4.2 函数展开成幂级数的直接展开法	274
9.4.3 函数展开成幂级数的间接展开法	275
习题 9.4	278
* 9.5 傅里叶级数	279
9.5.1 三角函数系的正交性、三角级数	279
9.5.2 函数展开成傅里叶级数	280
习题 9.5	283
复习题九	283
第 10 章 MATLAB 基础及其应用	285
10.1 MATLAB 简介	285
10.1.1 MATLAB 的基本功能	285
10.1.2 MATLAB 的特点	285
10.1.3 MATLAB 操作界面	287
10.2 MATLAB 基本运算与函数	288
10.2.1 基本运算	288
10.2.2 MATLAB 常用的函数	288
10.3 一元函数的极限、导数与积分	289
10.3.1 利用 MATLAB 求极限	289
10.3.2 利用 MATLAB 求导数	289
10.3.3 利用 MATLAB 求积分	290
习题 10.3	291
10.4 导数应用	291
10.4.1 利用 <i>diff</i> 函数求极值点和拐点	291
10.4.2 绘制函数图形	292
习题 10.4	293
10.5 常微分方程	293



习题 10.5	294
10.6 空间解析几何	294
10.6.1 向量的生成	294
10.6.2 向量的运算	294
10.6.3 向量夹角的余弦公式	295
10.6.4 绘制三维曲面图	295
习题 10.6	296
10.7 二元函数微积分	296
10.7.1 二元显函数求导	296
10.7.2 二元隐函数求导	297
10.7.3 二重积分	297
习题 10.7	298
10.8 级数	298
习题 10.8	299
附录 1 三位数学家简介	300
附录 2 积分表	303
参考答案	311

第 1 章 函数、极限与连续性

(Function, Limit and Continuity)

【本章导引】

函数是数学中的一种对应关系,是从非空集合 A 到实数集 B 的对应. 简单地说,甲随乙变,甲就是乙的函数;极限是在某种变化状态下对变量变化最终趋势的描述,它既是一个重要概念,也是研究微积分学的重要工具和思想方法;连续性是许多常见函数的一种共同属性,连续函数是微积分研究的主要对象. 因此,作为本章主要内容的函数、极限与连续是学习微积分的理论基础,也是学习微积分必须通过的一道门槛. 读者在学习这些知识的同时,应注意提升抽象能力、逻辑推理能力和周密思考的能力,这对学好高等数学十分重要.

1.1 初等函数回顾(Review for Elementary Function)

【本节导引】

已知一个有盖的圆柱形铁桶容积为 V ,试建立圆柱形铁桶的表面积 S 与底面半径 r 之间的函数关系式.

1.1.1 函数的概念

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照确定的法则总有唯一的数值与其对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量. 当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,对应的 y 的数值称为函数在 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 内的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 $R = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在数学中,有时抽去函数的实际意义,单纯地讨论用算式表达的函数,此时函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的数集,这种定义域称为函数的自然定义域. 常见的函数的定义域有如下原则:

- (1) 对于分式函数,分母不能为零,如 $y = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$;
- (2) 偶次根号下的变量不能小于零,如 $y = \sqrt{x-1}, x \geq 1$;
- (3) 对于对数函数 $y = \log_a x$,规定:底数 $a > 0, a \neq 1$,真数 $x > 0$;
- (4) 对于正切函数 $y = \tan x$,规定: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- (5) 对于余切函数 $y = \cot x$,规定: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

(6) 对于反正弦函数 $y = \arcsin x$ 和反余弦函数 $y = \arccos x$ 规定: $-1 \leq x \leq 1$.

1.1.2 函数的几种特性

函数的特性包括有界性、单调性、奇偶性和周期性. 下面将这四种特性的定义、图形和几何意义列入表 1-1 所示中.

表 1-1

特性	定义	图形	几何意义
有界性	若有正数 M 存在, 使函数 $f(x)$ 在区间 D 上恒有 $ f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 D 上是有界函数; 否则, $f(x)$ 在区间 D 上是无界函数		有界函数的图形夹在两条平行线之间
单调性	若对于区间 D 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加, 区间 D 称为单调增区间; 若当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少, 区间 D 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间		单调增加函数图形沿 x 轴正向上升; 单调减少函数图形沿 x 轴正向下降
奇偶性	设 D 是关于原点对称的区间, 若对于任意 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数		奇函数的图形关于坐标原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称
周期性	若存在不为零的数 T , 使得对于任意 $x \in D$, 有 $x+T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期		周期函数的图形在函数定义域内的每个周期有相同的形状

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

我们把幂函数 $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$)、指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)、对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)、三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \sec x, y = \csc x$ 和反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 统称为 **基本初等函数**. 为了方便, 很多时候也把多项式函数 $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 看作基本初等函数. 这些函数是我们今后研究其他各种函数的基础.



一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性如表 1-2 所示。

表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
幂函数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 单调减少
	$y = x^{-\frac{1}{2}}$	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
指数函数	$y = a^x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
	$y = a^x$ ($a > 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调增加
对数函数	$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调减少
	$y = \log_a x$ ($a > 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调增加



续表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
三角函数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少, 在 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ 内单调增加 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 单调减少 ($k \in \mathbb{Z}$)
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界

续表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
反三角函数	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成的、并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如, $y = \sin^2 x$, $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $y = \ln \cos x$, $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

例 1.1.1 函数 $y = e^{\arcsin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的?

解 令 $u = \arcsin x$, 则 $y = e^u$, 故 $y = e^{\arcsin x}$ 是由 $y = e^u$, $u = \arcsin x$ 复合而成的.

例 1.1.2 函数 $y = \tan \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的?

解 令 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, 则 $y = \tan u$; 再令 $v = \sqrt{x^2 + 1}$, 则 $u = \frac{1}{v}$; 再令 $w = x^2 + 1$, 则 $v = \sqrt{w}$; 故 $y = \tan \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 是由 $y = \tan u$, $u = \frac{1}{v}$, $v = \sqrt{w}$, $w = x^2 + 1$ 复合而成的.

3. 分段函数

若函数 $y = f(x)$ 在它的定义域内的不同区间(或不同点)上有不相同的表达式,则称它为分段函数. 例如符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

就是一个分段函数,如图 1-1 所示.

再如函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 也是一个分段函数.

注意:分段函数一般不是初等函数.

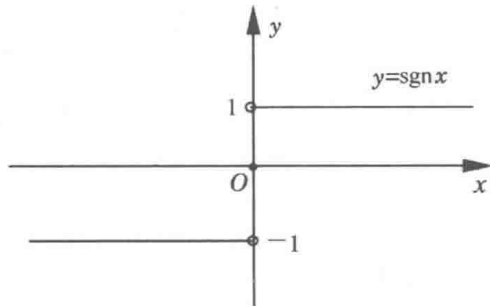


图 1-1