高等职业教育十二五规划教材

DENG ZHI YE JIAO YU SHI ER WU GUI HUA JIAO CAI

# 高等数学实用教程

主编　许艾珍

航空工业出版社

高等职业教育“十二五”规划教材

# 高等数学实用教程

主编　许艾珍

航空工业出版社

## 内 容 提 要

本书共10章，分别介绍了函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数和MATLAB基础及其应用等内容。附录给出了常用积分表。

本书结构合理、语言简洁、详略得当，既可作为高等院校高等数学课程教材，也可作为读者学习高等数学的参考用书。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学实用教程 / 许艾珍主编．-- 北京：航空工业出版社，2013.6

ISBN 978-7-5165-0160-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①许… Ⅲ．①高等数学－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第110455号

高等数学实用教程

Gaodeng Shuxue Shiyong Jiaocheng

航空工业出版社出版发行

（北京市安定门外小关东里14号　100029）

发行部电话：010-64815615　010-64978486

北京忠信印刷有限责任公司印刷　全国各地新华书店经售

2013年6月第1版　2013年6月第1次印刷

开本：787×1092　1/16　印张：21.5　字数：537千字

印数：1—3000　定价：45.00元

# 序

高职高专教育是我国一种新的教育类型，它培养的是高素质高技能应用型人才，因而它的人才培养模式、教学体系、课程设置以及课程内容必然与本科院校有着本质的区别，与之相应的教材内容建设也势必需要具备高职高专自身特色。

数学学科一直被称为是“科学的皇后”，它的系统性、逻辑性、严密性和抽象性都让高职学生望而生畏，而本书在内容的深度和广度上遵循“以应用为目的，够用为度”的原则，特别是将大量的专业实例引进了课堂，将数学建模的思想有机地渗透进了课堂，充分地体现了高职院校需求的实践性、开放性和职业性。

本书最大的特色在于实现了课程内容的“三化”，即内容选取现代化、组织方式模块化、课程功能综合化，突破了传统课程“重知识、轻能力，重模仿、轻思维，重记忆、轻应用”的局限，发挥课程内容在知识、技能、能力、思想方法和实际应用方面的综合性功能，从而提高学生的数学素养和实践能力。

本书突破了教材的传统格局，力求用主题或项目统领整体，采用问题引领的方式引出教学内容，并较好地将数学建模的思想渗透到教学内容的每一个章节，做到了“承前启后”、“适度够用”、“学以致用”，充分体现了数学的应用性，有助于在教学过程中实现“教、学、做”一体化。

本着“百花齐放，百家争鸣”的原则，苏州工业职业技术学院的数学教师团队敢于实践，勇于探索，通过专业调研，在专家大力支持和指导下，编写了这本书。本书力求做到以服务专业为宗旨、以培养能力为重点、以掌握思想方法为主线、以实际应用为切入点、以信息技术为手段、以文化渗透为亮点、以课程资源建设为抓手，最终实现以全面提升高职学生数学素养为目的的教学目标。

在本书即将出版之际，我为此书作序，希望今后高职高专出现更多更好的数学精品教材，为高职高专的数学教学做出更大的贡献。

2013 年 6 月 22 日

# 目　录

# 第1章　函数、极限与连续性
# (Function、Limit and Continuity)

**【本章导引】**

函数是数学中的一种对应关系，是从非空集合 A 到实数集 B 的对应．简单地说，甲随乙变，甲就是乙的函数；极限是在某种变化状态下对变量变化最终趋势的描述，它既是一个重要概念，也是研究微积分学的重要工具和思想方法；连续性是许多常见函数的一种共同属性，连续函数是微积分研究的主要对象．因此，作为本章主要内容的函数、极限与连续是学习微积分的理论基础，也是学习微积分必须通过的一道门槛．读者在学习这些知识的同时，应注意提升抽象能力、逻辑推理能力和周密思考的能力，这对学好高等数学十分重要．

## 1.1　初等函数回顾(Review for Elementary Function)

**【本节导引】**

已知一个有盖的圆柱形铁桶容积为 $V$，试建立圆柱形铁桶的表面积 $S$ 与底面半径 $r$ 之间的函数关系式．

### 1.1.1　函数的概念

**定义 1.1.1　设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 $y$ 按照确定的法则总有唯一的数值与其对应，则称 $y$ 是 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$.**

数集 $D$ 称为函数 $f(x)$ 的定义域，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**. 当 $x$ 取数值 $x_0 \in D$ 时，对应的 $y$ 的数值称为函数在 $x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 $x$ 取遍 $D$ 内的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $R=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的**值域**.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在数学中，有时抽去函数的实际意义，单纯地讨论用算式表达的函数，此时函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的数集，这种定义域称为函数的**自然定义域**. 常见的函数的定义域有如下原则：

(1)对于分式函数，分母不能为零，如 $y=\dfrac{x-1}{x+1}, x \neq -1$；

(2)偶次根号下的变量不能小于零，如 $y=\sqrt{x-1}, x \geqslant 1$；

(3)对于对数函数 $y=\log_a x$，规定：底数 $a>0, a \neq 1$，真数 $x>0$；

(4)对于正切函数 $y=\tan x$，规定：$x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$；

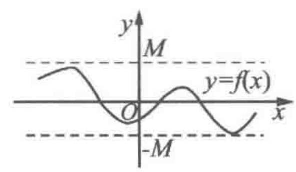
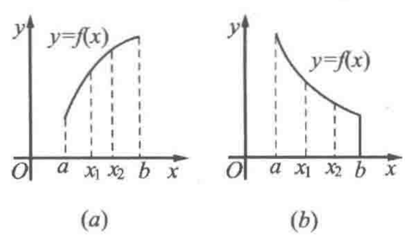
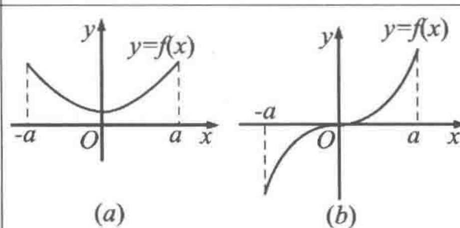
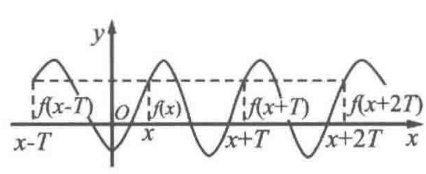
(5)对于余切函数 $y=\cot x$，规定：$x \neq k\pi, k \in Z$；

(6)对于反正弦函数 $y=\arcsin x$ 和反余弦函数 $y=\arccos x$ 规定：$-1\leqslant x\leqslant 1$.

### 1.1.2 函数的几种特性

函数的特性包括有界性、单调性、奇偶性和周期性．下面将这四种特性的定义、图形和几何意义列入表 1-1 所示中．

表 1-1

| 特性 | 定义 | 图形 | 几何意义 |
|---|---|---|---|
| 有界性 | 若有正数 $M$ 存在，使函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上恒有 $\|f(x)\|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是有界函数；否则，$f(x)$ 在区间 $D$ 上是无界函数 |   | 有界函数的图形夹在两条平行线之间 |
| 单调性 | 若对于区间 $D$ 内任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 $I$ 上单调增加，区间 $D$ 称为单调增区间；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 $D$ 上单调减少，区间 $D$ 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间 |   | 单调增加函数图形沿 $x$ 轴正向上升；单调减少函数图形沿 $x$ 轴正向下降 |
| 奇偶性 | 设 $D$ 是关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数 |   | 奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称 |
| 周期性 | 若存在不为零的数 $T$，使得对于任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数．通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期 |   | 周期函数的图形在函数定义域内的每个周期有相同的形状 |

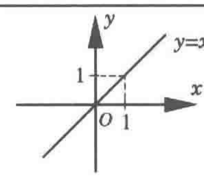
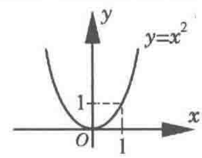
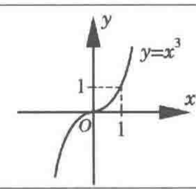
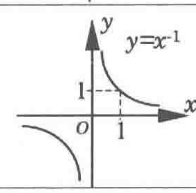
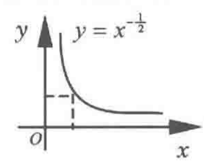
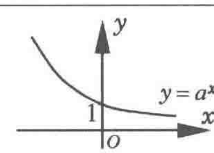
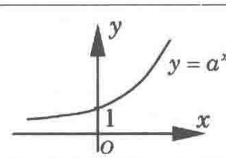
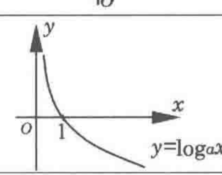
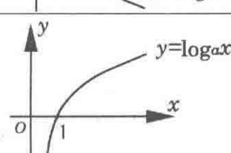
### 1.1.3 初等函数

#### 1. 基本初等函数

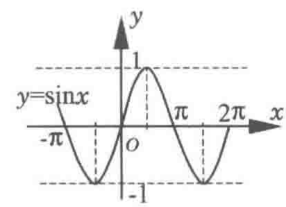
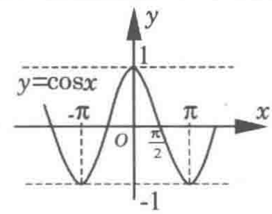
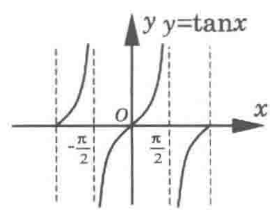
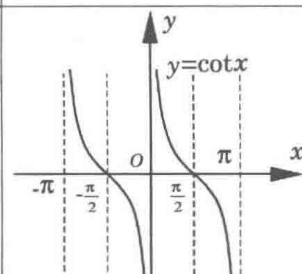
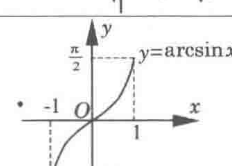
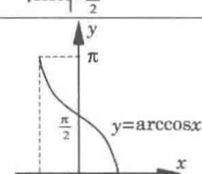
我们把幂函数 $y=x^a(a\in R)$、指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$、对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$、三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**. 为了方便，很多时候也把多项式函数 $y=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数. 这些函数是我们今后研究其他各种函数的基础.

一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性如表 1-2 所示．

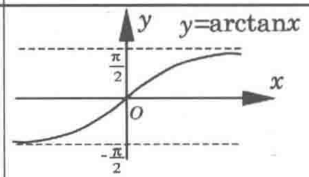
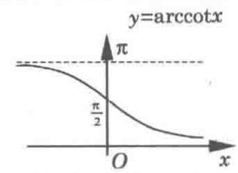
表 1-2

| 函数类型 | 函数 | 定义域与值域 | 图形 | 特性 |
|---|---|---|---|---|
| 幂函数 | $y=x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数<br>单调增加 |
| | $y=x^2$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[0,+\infty)$ |  | 偶函数，在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加 |
| | $y=x^3$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数<br>单调增加 |
| | $y=x^{-1}$ | $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ |  | 奇函数<br>单调减少 |
| | $y=x^{-\frac{1}{2}}$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 单调减少 |
| 指数函数 | $y=a^x$<br>$(0<a<1)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 单调减少 |
| | $y=a^x$<br>$(a>1)$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,+\infty)$ |  | 单调增加 |
| 对数函数 | $y=\log_a x$<br>$(0<a<1)$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 单调减少 |
| | $y=\log_a x$<br>$(a>1)$ | $x\in(0,+\infty)$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 单调增加 |

续表 1-2

| 函数类型 | 函数 | 定义域与值域 | 图形 | 特性 |
|---|---|---|---|---|
| 三角函数 | $y=\sin x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,1]$ |  | 奇函数，周期 $2\pi$，有界，在$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$内单调增加，在$(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$内单调减少$(k\in Z)$ |
| | $y=\cos x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,1]$ |  | 偶函数，周期 $2\pi$，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加$(k\in Z)$ |
| | $y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期 $\pi$，在$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$内单调增加$(k\in Z)$ |
| | $y=\cot x$ | $x\neq k\pi$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数，周期 $\pi$，在$(k\pi,k\pi+\pi)$单调减少$(k\in Z)$ |
| 反三角函数 | $y=\arcsin x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ |  | 奇函数，单调增加，有界 |
| | $y=\arccos x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[0,\pi]$ |  | 单调减少，有界 |

续表 1-2

| 函数类型 | 函数 | 定义域与值域 | 图形 | 特性 |
|---|---|---|---|---|
| 反三角函数 | $y=\arctan x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |  | 奇函数，单调增加，有界 |
| | $y=\operatorname{arccot} x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,\pi)$ |  | 单调减少，有界 |

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成的、并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$，$y=\ln\cos x$，$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

**例 1.1.1**　函数 $y=\mathrm{e}^{\arcsin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

**解**　令 $u=\arcsin x$，则 $y=\mathrm{e}^u$，故 $y=\mathrm{e}^{\arcsin x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arcsin x$ 复合而成的.

**例 1.1.2**　函数 $y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

**解**　令 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，则 $y=\tan u$；再令 $v=\sqrt{x^2+1}$，则 $u=\dfrac{1}{v}$；再令 $w=x^2+1$，则 $v=\sqrt{w}$；故 $y=\tan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\tan u$，$u=\dfrac{1}{v}$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$ 复合而成的.

3. 分段函数

若函数 $y=f(x)$ 在它的定义域内的不同区间（或不同点）上有不相同的表达式，则称它为**分段函数**. 例如符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

就是一个分段函数，如图 1-1 所示.

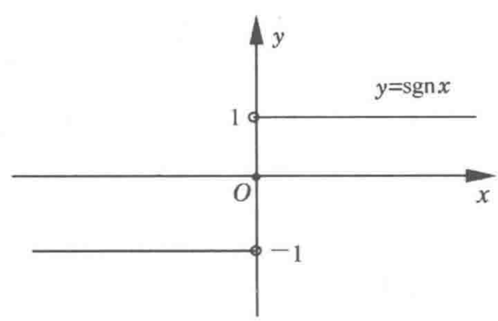



图 1-1

再如函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 也是一个分段函数.

**注意**：分段函数一般不是初等函数.