专升本高等数学

解题策略与方法

郭培俊 主编

清华大学出版社

专升本高等数学
解题策略与方法

郭培俊 主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书根据近3年浙江省专升本高等数学考试大纲要求编写。内容包含解题策略、解题方法、专题梳理和综合训练4章。解题策略包含4种解题策略分析，即“问题转化”解题策略、换元解题策略、恒等变形解题策略、分类讨论解题策略。解题方法分5个方面介绍，即求极限方法15种、求导数方法9种、求不定积分方法6种、计算定积分方法5种、求解微分方程方法6种；典型知识应用含极限的应用8种、导数的应用8种、定积分应用4种；对相对独立的级数、向量及空间解析几何单独成节介绍。专题梳理有求距离专题、证明专题。综合训练包含综合提升题及其答案、近9年(2005—2013)浙江省专升本真题及其答案、2014年浙江省专升本高等数学仿真试卷；对于书中的“训练题”、“综合训练题”的答案，请读者从 www.tup.com.cn 下载。附录中附有高等数学考试大纲及试卷结构分析，并附有美籍匈牙利数学家波利亚的一篇著作《怎样解题》以供读者习读。

本书不仅可以作为理工、经管相关专业专科生进行专升本高等数学考试复习辅导书，也可以作为高等数学课程的教与学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

专升本高等数学解题策略与方法/郭培俊主编. —北京：清华大学出版社，2014

ISBN 978-7-302-35533-5

Ⅰ. ①专…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①高等数学—成人高等教育—题解—升学参考资料　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 034941 号

责任编辑：陈砺川
封面设计：傅瑞学
责任校对：袁　芳
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62795764
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：22.25　　**字　　数**：507 千字
版　　次：2014 年 9 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：48.00 元

产品编号：057211-01

学习数学的唯一方法是做数学。

——生于匈牙利的美国数学家保罗·哈尔莫斯

夫学算者,题从法出,法将题验,凡欲明一法,必设一题。

——中国古代数学家杨辉

解题是一种实践性的技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿和实践学到它……你想学会游泳,你就必须下水;你想成为解题高手,就必须去解题。

——美籍匈牙利数学家波利亚

因此:
学习数学的秘诀是:解题,解题,再解题。
学习解题最好的方法之一就是研究例题。
在任何时刻都不要认为自己解过的题已经足够多了。

前 言

FOREWORD

亲爱的同学，专升本是提升学历和就业质量的又一途径，是你人生的又一次智慧的选择。也许你现在正工学结合，也许你正要准备毕业设计或毕业论文，也许你正为就业找工作张罗着，在这“多事”之秋，你也许正准备报名参加专升本考试。你学习过高等数学，但学时不多，甚至从没学过，或许你已坚定专升本，但苦于时间仓促紧张，对如何复习(对有些同学而言是才开始学习)备考不知所云，无从下手。高职高专高等数学课本太简单，不能应对考试，本科教材及考研资料又太难，且许多内容超出考试范围，学习困难且效率低。下定决心专升本之后，你正为没能拥有一本针对性强的集学习与复习于一体的专升本复习资料而发愁吧。

本书就是专为你们而作，是作者从事高等数学教学20多年经验之累积，历时4届，将精心撰写的讲义反复修改而成。本书特色是：基础性与拔高性相结合，例题从简到难以梯度渐进，适合将学习与复习同步；理论知识与解题方法相照应，对重点定义、公式、定理都有阐述，对常用解题方法都归类总结；学习与练习紧密跟进，在学习一道例题一种方法之后，立即就安排同类型、同方法的模仿训练，及时巩固；思考与测试相结合。在学习过程中，为启发读者思维和创新思路，穿插有思考题，在每个专题之余，为巩固、检验所学方法和知识，编排了测试题，思考与测试均附参考答案；解答与注意相搭配，解题完毕，对要强调的、有其他解法、常见错误解法等内容，作者都用心提醒明示。

考虑到高职高专院校高等数学教学存在课时少、学习内容少、方法单一、忽略证明等缺陷，本书的特点还有：一题多解，常规方法与技巧方法相结合；一点多用，一个知识点在多处加以应用，使学生获得全面认识，透彻理解；开设证明专题，归纳了多种常用的方法模式和基本技巧；开辟了解题策略篇章，引导读者从高处把握解题精髓，领悟数学核心思想，提高解题能力和数学素养，这对将来升入本科学习也是大有裨益的。

本书的前期之作是作者对专升本学员辅导用的专题讲座教程，用过此教程的大量学员都以优秀成绩专升本成功，有的甚至在专升本高等数学考试中获得满分，考取了理想的本科。相信本书对你专升本考试一定有很大帮助！

对本书的学习建议是：学习少于60学时"高等数学"课程的同学，建议从第2章求极限的方法开始学习，第2章学完后反过来学第1章；学过较多学时"高等数学"的同学，按顺序从第1章解题策略开始学习；思考题与自测题不会做不要立即看答案，要动一番脑筋，自己先做一遍，哪怕做错也要做一遍后再参考答案；建议2或3人形成学习小组开展研讨式学习，互相启发，互相促进；本书与指定的考试教材，如同济大学数学系所编《高等数学》同时使用，效果会更好。

编　者

2014年6月

目录

CONTENTS

第1章 解题策略

第2章 解题方法

第4章 综合训练

第1章

解题策略

策略是总体的行动方针.解题策略是指解答数学问题时,总体上所采取的方针、原则和方案.解题策略不同于具体的解题方法,它是指导方法的原则,是对解题途径的概括性认识和宏观把握,体现了选择的机智和组合的艺术,因而是最高层次的解题方法.没有策略的解题是盲目的、无序的,有策略的解题则是有预谋的、有序的.

1.1 “问题转化”解题策略

问题转化是数学学习中一种十分重要的解题策略和思想方法. 首先,问题转化作为一种策略,它是解题前的一种心理准备活动,是思维的取向. 问题转化不仅仅是解几道题目的具体方法和技巧,而且是在更高思想层面上研究如何解题的一种知识,不仅包含数学知识,还包含情感态度等心理认知和合情推理等逻辑知识. 我国学者戴再平在《数学习题理论》(1991 年)一书中,就把问题转化作为一种重要解题策略;我国数学家罗增儒在《数学解题学引论》(1997 年)一书中也把转化作为一种解题策略. 其次,问题转化作为一种思想方法,是指在解决问题的过程中,将那些有待解决或难以解决的问题转化为已经解决或容易解决的问题来解决的一种数学思想方法. 著名数学家波利亚指出:“掌握数学意味着什么呢? 这就是说善于解题,不仅善于解一些标准题,而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题.”他还曾说过,解题的成功要靠正确的转化. 苏联数学家雅诺夫斯卡娅在回答“解题意味着什么时”也说:“解题意味着把所要解决的问题转化为已经解决的问题.”

从这些数学家和数学教育专家的话语中不难得出一个递推关系:数学—解题—转化. 就是说:掌握数学意味着解题,而解题意味着转化. 可见,转化在数学学习中,特别是在解题过程中的地位是何等重要. 美国数学家哈尔莫斯认为:“数学的真正组成部分是问题和解.”解题,就是解决问题.

但是,传统意义上的解题,比较注重结果,强调答案的确定性,偏爱形式化的题目. 而现代意义上的“问题解决”,则更注重解决问题的过程、策略以及思维的方法,更注重解决问题过程中情感、态度、价值观的培养. 近年兴起的数学情景题、数学应用题、数学开放题、数学建模等正在改变中国解题教学的环境和格局. 解决数学问题的过程是创造性的思维活动过程,其重要的特点是思维的变通性和流畅性. 当我们所接触的问题难以入手时,思维就不应停留在原问题上,而应将原问题转化为另一个比较熟悉、比较容易解决的问题,通过对新问题的解决,达到解决原问题的目的.

问题转化是数学思想方法的核心,从广义上讲,数学解题的过程就是恰当运用已知条件将问题逐步转化,从而使问题获得解决的过程. 运用转化思想解题,往往思路开阔,顿生“峰回路转,柳暗花明”之美妙感觉. 转化思想就是要求我们换一个角度去看,换一种方式去想,换一种语言去讲,换一种观点去处理,以使问题朝着有利于解决的方向不断变更,从不同的角度和特征出发,把同一问题用不同的形式在不同的水平上转化出来. 目前,有许多专家学者对中学数学中的问题转化已做了广泛的研究,但是对高等数学解题的研究则

相对冷淡得多.其实,高等数学中有更多更难的题目解答有待转化后的策略和思想,高等数学教学中更能体现问题转化的价值,即使是高职高专数学教学中也需要注重问题转化教学,专升本高等数学考试中就很能反映这一需求.

下面以全国部分省(市)近年来专升本高等数学考试试题为研究对象,对高等数学解题中转化策略和思想的应用,举例进行分类探讨.

1.1.1 形式转化——在特殊与一般之间转化

1. 特殊向一般转化

数学知识系统中包含许多特殊与一般的关系.如平行四边形包含矩形,矩形包含正方形.又如函数包含数列,数列是自变量取自然数的特殊函数.因此,数列极限可以转化为函数极限.二者的极限关系由海涅定理给出.由此,当一些数列的极限不易求得时,可先将其转化为相关函数的极限问题,再回归到数列.

例 1.1.1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析 先转化为函数的极限,只有函数连续且一阶可导时,才能用洛必达法则(求导一次)求极限.证明如下.

证明 因为

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

例 1.1.2 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$.

解 取对数并以 t 代$\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,因为

$$\ln l=\lim_{n\to\infty}n\ln\cos\frac{x}{\sqrt{n}}=\lim_{t\to0}t^{-2}\ln\cos tx=\lim_{t\to0}\frac{-x\sin tx}{2t\cos tx}=-\frac{x^2}{2}$$

所以 $l=e^{-\frac{x^2}{2}}$

特殊向一般转化策略,体现的是局部与整体之间的关系,子集与全集的关系,生成函数与母函数(子)的关系.所反映的不仅是逻辑学的三段论思想:对所有的 A 都成立,而 A_1 包含于 A,所以对 A_1 也成立.还有一种系统控制思想:对小系统 T_1 某定理或属性不成立,但把小系统置于大系统中后,某定理或属性却成立,完成“修炼”(实则是同化过程)后再把小系统“剥离”出来,变成新的小系统 T_1'.

特殊向一般转化,可以用调整——同化来理解.如例 1.1.1,原题不能用洛必达法则,故需要把数列调整转化为实数域上的连续函数.如不把 n 转化为 x,不做调整,则解题过程是错误的.

2. 一般向特殊转化

有的数学题涉及元素多、题面复杂,解题时如果按部就班求解,则步骤繁杂,甚至认为

是做无用功. 如果抓住核心问题,切中要害,则求解可事半功倍. 只需从一般现象中提炼、把握住特殊核心要素,问题便迎刃而解.

例 1.1.3 若函数 $f(x)=(x+1)(2x+1)\cdots(nx+1)$,试求 $f^{(n)}(2014)$.

分析 由于对多项式函数求导一次,函数幂降低一次,对多项式中低于(含)$(n-1)$次项求 n 阶导数都为 0,因此只需抓住多项式的最高次幂项(特殊项)就能解决问题.

解 $f(x)$ 中 x 的最高次幂项记为 $f_n(x)=n!x^n$,其 n 阶导数为

$$f_n^{(n)}(x)=n!n!=(n!)^2$$

从而

$$f^{(n)}(x)=(n!)^2,\quad f^{(n)}(2014)=(n!)^2$$

近年来,专升本联考数学中频频出现类似的题目.

1.1.2 内容转化——在本末之间转化

朱熹说:"原始要终,自其末以缘本,自下推而上去;执本驭末,自其本以之末,自上推而下来."大意是:有始就有终,执果可索因,由下可追上;由因导果,有根本就有结果,从上可推出下. 主旨就是讲本末、上下可以互相转化.

有些数学题,次要条件可以转化为主要条件,条件和结果可以互换(充要条件),这样,可以变被动为主动,转换一个角度,从而使问题得解.

1. 将求导数问题转化为求极限

导数的实质是极限. 相对地,极限是本,导数是末. 虽然我们学习了很多导数公式,习惯用公式法求导,但有时回归到用定义求导可收到意想不到的效果.

例 1.1.4 设 $f(x)=(x-1)(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^n-n)$,$n$ 为正整数,求 $f'(1)$.

解 由导数定义,有

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^n-n)-0}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}(x^2-2)(x^3-3)\cdots(x^n-n)=(-1)^{n-1}n! \end{aligned}$$

2. 把求导数问题转化为解微分方程

含有函数导数或微分的方程是微分方程,微分方程是导数知识的扩展,导数是本,微分方程是末. 可以运用"自其末以缘本,自下推而上去"的思维方法,通过解微分方程来求导数.

例 1.1.5 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$,求 $y(1)$.

分析 求解此题的关键是利用一元函数微分定义,把增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$ 转化为微分方程 $\mathrm{d}y=\dfrac{y\mathrm{d}x}{1+x^2}$,从而求得 $y=y(x)$.

解 因为$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且$\alpha=o(\Delta x)$,$\Delta x\to 0$,根据微分定义,得

$$dy=\frac{ydx}{1+x^2}$$

解此微分方程,得$y=Ce^{\arctan x}$.由$y(0)=\pi$,得$C=\pi$,从而有

$$y=\pi e^{\arctan x}$$

故
$$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$$

3. 把级数转化为导数、积分

通过下列公式,可以在级数与导数、级数与积分之间相互转化.

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad x\in(-\mathbf{R},\mathbf{R})$$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-\mathbf{R},\mathbf{R})$$

例 1.1.6 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$的和函数.

解 因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2n+1)|x|^n}=|x|$,当$|x|<1$时,级数收敛.

令$x=1$,原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$,发散;

令$x=-1$,原级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$,发散,故收敛域为$(-1,1)$.

$$\begin{aligned}s(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'+\frac{1}{1-x}\\&=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}\\&=\frac{1+x}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1)\end{aligned}$$

1.1.3 数量转化——在有限与无限之间转化

高等数学中与无穷大有关的概念往往是通过有限集和极限共同定义的,这里包含了无限与有限之间的依附关系,如级数中的和函数$s(x)$与前n项和$s_n(x)$之间的极限关系以及定积分的定义等.

1. 利用数列部分和讨论级数的收敛性

例 1.1.7 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的收敛性,并求其和.

解 因为$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,于是得

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=1$，由定义知级数收敛，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

2. 把求极限问题转化为求定积分

例 1.1.8 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$.

解 将区间$[0,\pi]$进行 n 等分，则有 $\Delta x_i=\frac{\pi}{n}$，从而和式

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}$$

而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}$ 是函数 $\sqrt{1+\cos x}$在$[0,\pi]$上将区间 n 等分，并且选择 $\xi_i\left(=\frac{i\pi}{n}\right)$为小区间右端点时的积分和，故

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\end{aligned}$$

概念是思维的细胞，是浓缩的知识点. 利用概念或定义进行解题，把复杂问题退化到最原始的定义，可以起到“峰回路转，柳暗花明”的效果，体现了最简单就是最好的理念. 此题虽然是求极限的，最终却用计算定积分来解决，初学者恐始料不及，大有“文见于此，其义在彼”(《春秋》)的意境，对参加专升本的同学还要多加训练.

1.1.4 结构转化——位置之间的相互转化

1. 取对数，把高级运算转化为低级运算

当出现连乘连除、高次幂、幂指函数有关运算时，往往通过对原式取对数，可起到降低运算级别的作用.

例 1.1.9 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解 取对数，类似例 1.1.1 解法，得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$.

例 1.1.0 设 $f(x)=\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x-3)}{(2x+1)(3x-1)}}$，求 $f'(x)$.

解 两边同时取对数后转化为

$$\ln f(x)=\frac{1}{3}[\ln(x-2)+\ln(x-3)-\ln(2x+1)-\ln(3x-1)]$$

两边对 x 求导可得结果，解略.

2. 取对数对题目进行转化

比较下列两道例题，找出其关系.

例 1.1.11 若 $x>0$，试证明：$e^x-1>x$.

例 1.1.12 若 $x>0$，试证明：$x>\ln(1+x)$.

不难发现，例 1.1.12 可直接由例 1.1.11 移项后取对数得到.

除以上转化方式外，还可以进行正向—逆向或正向—侧向之间的转化；高维—低维之间的转化. 如空间曲线积分与平面曲线积分之间的转化；曲线积分与曲面积分之间的转化. 格林公式、斯托克斯公式就是积分间相互转化最好的桥梁. 限于篇幅，在此不再赘述.

无论何种方式和途径的转化，转化所遵循的一般原则是：化生为熟、化繁为简、化未知为已知、化抽象为具体，直到把问题解决.