INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

2000～2004

第9卷

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解 推广 加强

$\sum_1^5 k x_k = a$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

2000～2004

第9卷

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第41届至第45届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答．该书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强．本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强．

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用．

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年．第9卷，2000～2004/佩捷主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.4

ISBN 978－7－5603－5302－9

Ⅰ．①I…　Ⅱ．①佩…　Ⅲ．①中学数学课－题解　Ⅳ．①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第071012号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张20.25　字数361千字
版　　次　2015年4月第1版　2015年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5302－9
定　　价　58.00元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学'，他就比别人笨吗？"

"数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病，不然的话，大家都应该是'精通数学'的.可是，由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因，某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式."

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣，但数学更是一种思维的锻炼，不进行这项锻炼是很可惜的.不过，对诗歌或哲学，我们似乎也可以说同样的话."

"不管怎样，根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."（阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉，译.广西师范大学出版社，2001:96）

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的，而是为那些对 IMO 感兴趣，对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题，提供海量解法（最多一题提供 20 余种不同解法，如第 3 届 IMO 第 2 题），给出加强形式，尽显推广空间，是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集.从现在看，以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了2万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999：463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近100位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979年，笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅0.29元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27年过去仍记忆犹新）.所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院（今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业就读过）是我国最早介入IMO的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译1～20届题解.令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制者居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）.本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说20世纪80年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根20世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们[4,13,19,20,50].目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足.另外，现在流行的IMO题

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

解，历经多人之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合．有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人．使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折．高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步，这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑．所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者．

中国数学竞赛活动的开展、普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延．而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势．他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢．

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用．北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国 IMO 研究的标志．如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础．我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现．为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意．

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意．

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生．他们四位的长篇推广文章读之，使笔者不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少．

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家．

哲学家休谟在写自传的时候,曾有一句话讲得颇好:"一个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰

2014 年 10 月

目录 Contest

第一编
第 41 届国际数学奥林匹克

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 41 届国际数学奥林匹克题解

韩国，2000

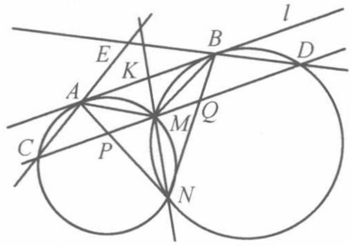
俄罗斯命题

1 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N. 设 l 是圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的那条公切线. l 与圆 Γ_1 相切于点 A，与圆 Γ_2 相切于点 B. 设经过点 M 且与 l 平行的直线与圆 Γ_1 还相交于点 C，与圆 Γ_2 还相交于点 D. 直线 CA 和 DB 相交于点 E，直线 AN 和 CD 相交于点 P，直线 BN 和 CD 相交于点 Q. 证明：$EP=EQ$.

证法 1　如图 1 所示，令 K 为 MN 和 AB 的交点. 根据圆幂定理

$$AK^2=KN\cdot KM=BK^2$$

换言之，K 是 AB 的中点. 因为 $PQ\,/\!/\,AB$，所以 M 是 PQ 的中点. 故只需证明 $EM\perp PQ$.



题 1(图 1)

因为 $CD\,/\!/\,AB$，所以点 A 是圆 Γ_1 的弧 CM 的中点，点 B 是圆 Γ_2 的弧 DM 的中点. 于是，$\triangle ACM$ 与 $\triangle BDM$ 都是等腰三角形. 从而有

$$\angle BAM=\angle AMC=\angle ACM=\angle EAB$$
$$\angle ABM=\angle BMD=\angle BDM=\angle EBA$$

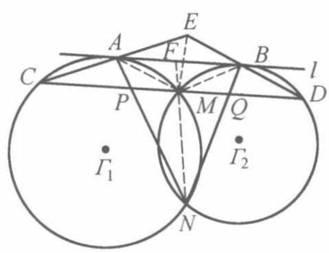
可推出

$$EM\perp AB$$

再由 $PQ\,/\!/\,AB$，即证 $EM\perp PQ$.

此证法属于张伟军

证法 2　如图 2 所示，连 MA，MB，ME，并延长 NM 交 AB 于点 F.



题 1(图 2)

因为 l 是圆 Γ_1、圆 Γ_2 的公切线，又 $CD\,/\!/\,l$，所以

$$\angle EAB=\angle C=\angle MAB,\angle EBA=\angle D=\angle MBA$$

所以

$$\triangle EAB\cong\triangle MAB$$

所以

$$MA=AE$$

由 $\angle AMC=\angle MAB=\angle C$，得

$$MA = AC$$

所以

$$EM \perp CD$$

因为

$$FA^2 = FM \cdot FN = FB^2$$

所以

$$FA = FB$$

由 $PQ \parallel AB$ 易得

$$\frac{MP}{FA} = \frac{MQ}{FB}$$

所以

$$MP = MQ$$

所以

$$PE = QE$$

注 当 l 是距离 M 较远的那条公切线时，结论同样成立，证明方法类似.

② 设 a,b,c 是正实数，且满足 $abc=1$. 证明

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1$$

美国命题

证法 1 令

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$$

其中，x,y,z 为正实数. 则原不等式变为

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leqslant xyz$$

记 $u = x-y+z, v = y-z+x, w = z-x+y$

因为这三个数中的任意两个之和都是正数，所以它们之中最多只有一个是负数.

如果恰有一个是负数，则

$$uvw \leqslant 0 < xyz$$

不等式得证.

如果这三个数都大于 0，则由算术 — 几何平均不等式可得

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \leqslant \frac{1}{2}((x-y+z)+(y-z+x)) = x$$

同理

$$\sqrt{vw} \leqslant y, \sqrt{wu} \leqslant z$$

于是，$uvw \leqslant xyz$. 不等式得证.

证法 2　由 $abc=1$，得

此证法属于张伟军

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)(b-1+ab)\left(\frac{1}{ab}-1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)b\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{a}\left(-a+1+\frac{1}{b}\right)=$$

$$\frac{1}{a\cdot 1\cdot \frac{1}{b}}\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(-a+1+\frac{1}{b}\right)$$

令 $a-1+\frac{1}{b}=2y, a+1-\frac{1}{b}=2z, -a+1+\frac{1}{b}=2x$

则 $$a=y+z>0, 1=z+x>0, \frac{1}{b}=x+y>0$$

显然 x,y,z 中至多有一个不大于 0.

(i) 若 x,y,z 中恰有一个不大于 0，则 $xyz\leqslant 0$，结论显然成立.

(ii) 若 $x>0,y>0,z>0$，则原不等式左边等于

$$\frac{8xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}\leqslant\frac{8xyz}{2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{xz}\cdot 2\sqrt{xy}}=1$$

当且仅当 $x=y=z$，即 $a=b=c=1$ 时等号成立.

注　若记 $a=u, \frac{1}{b}=v, 1=\lambda$，则该题结果等价于

$$(u+v-\lambda)(u-v+\lambda)(-u+v+\lambda)\leqslant uv\lambda$$

此为 1983 年瑞士数学奥林匹克试题.

证法 3　由题设条件易知正实数 a,b,c 中有两个不小于 1，另一个不大于 1；或者有两个不大于 1，另一个不小于 1. 此时在 $a-1+\frac{1}{b}, b-1+\frac{1}{c}, c-1+\frac{1}{a}$ 中至多有一个负值.

此证法属于段智毅、秦立

当 $a-1+\frac{1}{b}, b-1+\frac{1}{c}, c-1+\frac{1}{a}$ 中有一个负值时，原不等式显然成立，下面只要证明它们均为正值的情形.

因为 $abc=1$，所以

$$a-1+\frac{1}{b}=a-1+ac$$

即 $$a-1+\frac{1}{b}=a\left(1-\frac{1}{a}+c\right)$$

同理

$$b-1+\frac{1}{c}=b\left(1-\frac{1}{b}+a\right)$$

$$c-1+\frac{1}{a}=c(1-\frac{1}{c}+b)$$

于是应用

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,x,y\in\mathbf{R}$$

得

$$(a-1+\frac{1}{b})(c-1+\frac{1}{a})=$$

$$a(1-\frac{1}{a}+c)(c-1+\frac{1}{a})\leqslant$$

$$a\left[\frac{(1-\frac{1}{a}+c)+(c-1+\frac{1}{a})}{2}\right]^2=ac^2$$

即

$$(a-1+\frac{1}{b})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant ac^2$$

同理

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})\leqslant ba^2$$

$$(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant cb^2$$

将上面三式两边相乘,得

$$(a-1+\frac{1}{b})^2(b-1+\frac{1}{c})^2(c-1+\frac{1}{a})^2\leqslant(abc)^3=1$$

即

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant 1$$

综上,原不等式得证.

需要指出的是,本题的等价问题是:若正实数 a,b,c 满足 $abc=1$,求证

$$(1+a-\frac{1}{b})(1+b-\frac{1}{c})(1+c-\frac{1}{a})\leqslant 1$$

3 设 $n\geqslant 2$ 为正整数. 开始时,在一条直线上有 n 只跳蚤,且它们不全在同一点,对任意给定的一个正实数 λ,可以定义如下的一种移动:

(1) 选取任意两只跳蚤,设它们分别位于点 A 和点 B,且点 A 位于点 B 的左边;

(2) 令位于点 A 的跳蚤跳到该直线上位于点 B 右边的点 C,使得 $\frac{BC}{AB}=\lambda$.

试确定所有可能的正实数 λ,使得对于直线上任意给定的点 M 以及这 n 只跳蚤的任意初始位置,总能够经过有限多次移动之后令所有的跳蚤都位于点 M 的右边.

白俄罗斯命题

解 要使跳蚤尽可能远地跳向右边，一个合理的策略是在每一个移动中都选取最左边的跳蚤所处的位置作为点 A，最右边的跳蚤所处的位置作为点 B. 按照这一策略，假设在 k 次移动之后，这些跳蚤之间距离的最大值为 d_k，而任意两只相邻跳蚤之间距离的最小值为 δ_k. 显然有

$$d_k \geqslant (n-1)\delta_k$$

经过第 $k+1$ 次移动，会产生一个新的两只相邻跳蚤之间的距离 λd_k. 如果这是新的最小值，则有

$$\delta_{k+1} = \lambda d_k$$

如果它不是最小值，则显然有

$$\delta_{k+1} \geqslant \delta_k$$

无论哪种情形，总有

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geqslant \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \geqslant \min\{1, (n-1)\lambda\}$$

因此，只要 $\lambda \geqslant \frac{1}{n-1}$，就有 $\delta_{k+1} \geqslant \delta_k$ 对任意 k 都成立. 这意味着任意两只相邻跳蚤之间距离的最小值不会减小. 故每次移动之后，最左边的跳蚤所处的位置都以不小于某个正的常数的步伐向右平移. 最终，所有的跳蚤都可以跳到任意给定的点 M 的右边.

下面证明：如果 $\lambda < \frac{1}{n-1}$，则对任意初始位置都存在某个点 M，使得这些跳蚤无法跳到点 M 的右边.

将这些跳蚤的位置表示成实数，考虑任意的一系列移动. 令 s_k 为第 k 次移动之后，表示跳蚤所在位置的所有实数之和，再令 w_k 为这些实数中最大的一个（即最右边的跳蚤的位置）. 显然有 $s_k \leqslant nw_k$. 我们要证明序列 $\{w_k\}$ 有界.

在第 $k+1$ 次移动时，一只跳蚤从点 A 跳过点 B 落在点 C，分别用实数 a, b, c 表示这三个点，则

$$s_{k+1} = s_k + c - a$$

根据移动的定义

$$c - b = \lambda(b - a)$$

进而得到

$$\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$$

于是

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$$

如果 $c > w_k$，则刚跳过来的这只跳蚤占据了新的最右边位置

$$w_{k+1} = c$$

再由 $b \leqslant w_k$ 可得

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geqslant \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)$$

如果 $c \leqslant w_k$,则有

$$w_{k+1} - w_k = 0, s_{k+1} - s_k = c - a > 0$$

故上式仍然成立.

考虑下列数列

$$z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k, k = 0, 1, 2, \cdots$$

则有

$$z_{k+1} - z_k \leqslant 0$$

即该数列是不升的.

因此,对所有的 k 总有

$$z_k \leqslant z_0$$

假设 $\lambda < \frac{1}{n-1}$,则

$$1 + \lambda > n\lambda$$

可以把 z_k 写成

$$z_k = (n + \mu) w_k - s_k$$

其中

$$\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$$

于是得到不等式

$$z_k = \mu w_k + (n w_k - s_k) \geqslant \mu w_k$$

故对于所有的 k,总有

$$w_k \leqslant \frac{z_0}{\mu}$$

这意味着最右边跳蚤的位置永远不会超过一个常数,这个常数与 n,λ 和这些跳蚤的初始位置有关,而与如何移动无关.最终得到结论:所求 λ 的可能值为所有不小于 $\frac{1}{n-1}$ 的实数.

4 一位魔术师有 100 张卡片,分别写有数字 1 到 100.他把这 100 张卡片放入三个盒子里,一个盒子是红色的,一个是白色的,一个是蓝色的,每个盒子里至少都放入了一张卡片.

一位观众从三个盒子中挑出两个,再从这两个盒子里各选取一张卡片,然后宣布这两张卡片上的数字之和.知道这个和之后,魔术师便能够指出哪一个是没有从中选取卡片的盒子.

问:共有多少种放卡片的方法,使得这个魔术总能够成功?(两种方法被认为是不同的,如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子)

匈牙利命题

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com