世界数学
精品译丛

1

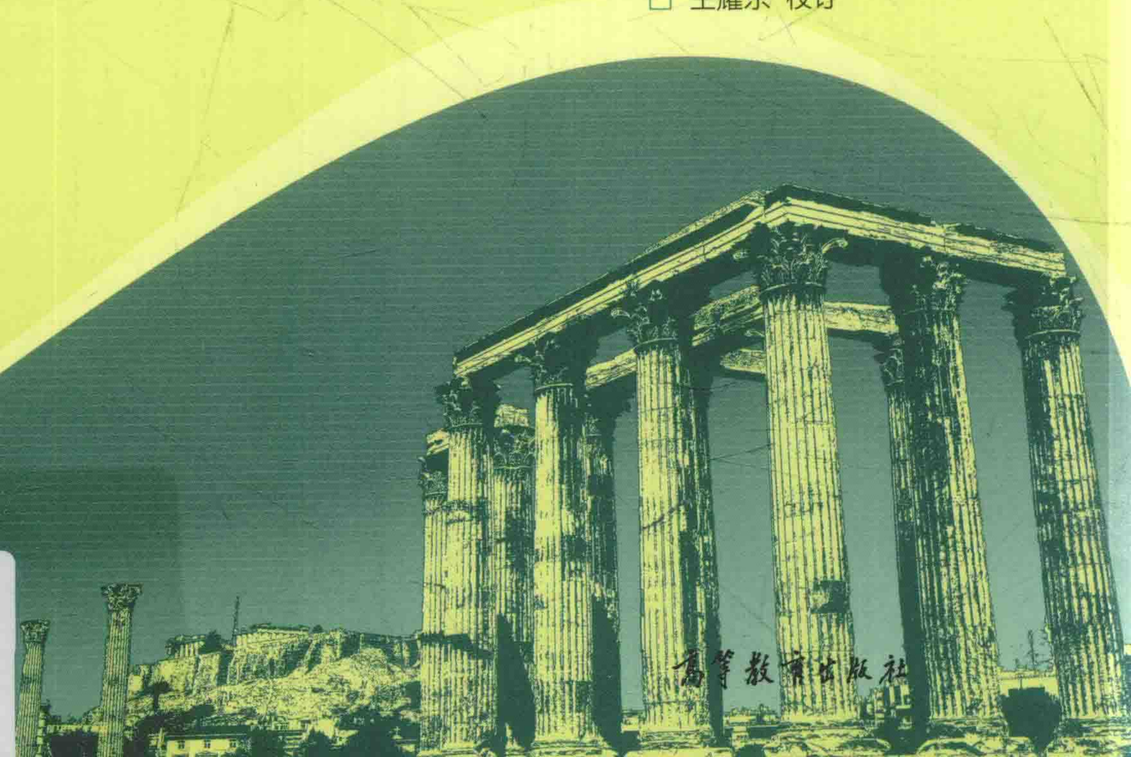
二阶椭圆型偏微分方程（第二版修订版）

Elliptic Partial Differential Equations of Second Order

□ David Gilbarg
Neil S. Trudinger 著

□ 叶其孝 王耀东 任朝佐 刘西垣
吴兰成 顾永耕 方惠中 译

□ 王耀东 校订



1

世界数学
精品译丛

Elliptic Partial Differential Equations of Second Order

二阶椭圆型偏微分方程（第二版修订版）

□ David Gilbarg
Neil S. Trudinger 著

□ 叶其孝 王耀东 任朝佐 刘西垣
吴兰成 顾永耕 方惠中 译

□ 王耀东 校订

高等教育出版社·北京

图字：01-2014-1011 号

图书在版编目（CIP）数据

二阶椭圆型偏微分方程：第二版修订版 /（美）吉尔巴格（David Gilbarg），（美）特鲁丁格（Neil S. Trudinger）著；叶其孝等译．-- 北京：高等教育出版社，2016. 11
（世界数学精品译丛）
书名原文：Elliptic Partial Differential Equations of Second Order
ISBN 978-7-04-046455-9

Ⅰ. ①二… Ⅱ. ①吉… ②特… ③叶… Ⅲ. ①二阶-椭圆型方程-偏微分方程 Ⅳ. ① O175.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 219232 号

策划编辑	王丽萍	责任编辑	李 鹏 吴晓丽	封面设计	王凌波
版式设计	童 丹	责任校对	陈旭颖	责任印制	朱学忠

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	高教社（天津）印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm× 1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	32.75		
字 数	610千字	版 次	2016 年11月第 1 版
购书热线	010-58581118	印 次	2016 年11月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	89.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 46455-00

本书第一版由北京大学数学系的五位同志和中国科学院数学研究所的两位同志共同翻译: 叶其孝译第 1 章和第 13—15 章; 任朝佐译第 2—4 章; 刘西垣译第 5—6 章; 吴兰成译第一版前言和第 7—8 章; 王耀东译第 10—12 章; 顾永耕、方惠中译第 16 章。(以上章号对应最新版章号。)

王耀东同志按照英文第二版的第三次印刷修订版对全书做了校订, 补译了新版前言、第 9 章、第 17 章、后记以及各章增加的内容。

第三次印刷修订版前言

该修订版是在《二阶椭圆型偏微分方程》1983 年第二版的基础上进行的，它也对应于 1989 年出版的俄文版，在该版本中我们对 1984 年之前的版本作了本质上的更新. 增加的内容关系到 Nikolai Krylov 的导数 Hölder 估计，这一估计为椭圆型 (和抛物型) 高维完全非线性方程的古典理论进一步发展提供了基本要素. 在我们的陈述中采用了 Luis Caffarelli 对于 Krylov 的方法所做的简化.

非线性二阶椭圆型方程的理论在过去的十五年内不断丰富，作为本书的简短后记，我们简要介绍了某些主要的进展. 虽然完整的论述至少需要另外一部专著，本书现在的大部分篇幅也已经问世二十多年了，我们还是希望本书能够继续充当既有和未来发展的背景资料.

自从第一版出版以来我们受惠于世界各地的众多同行. 特别高兴的是近年来我们建立和恢复了跟俄罗斯同行的友好关系，诸如 Olga Ladyzhenskaya, Nina Ural'tseva, Nina Ivochkina, Nikolai Krylov 和 Mikhail Safonov，他们在这一领域做出了如此大量的贡献. Ennico De Giorgi 四十年前的重大发现开启了高维非线性理论研究的大门，他在 1996 年与世长辞，我们谨在此表示沉痛哀悼.

1997 年 10 月　　　　David Gilbarg　　Neil S. Trudinger

第二版前言

在这一版中我们做了少许修订，增加的新材料包含了对应线性和非线性理论近来发展的两章．我们感激第一版的许多使用者，他们的评论以不同方式对本版有所贡献．Pei Hsu 和 L. F. Tam 帮助校对了清样，Gary Lieberman 给了特别的建议，我们在此向他们致谢．

1983 年 7 月

David Gilbarg　　Neil S. Trudinger
斯坦福　　堪培拉

第一版前言

本书打算写成一本基本上自足的书，阐述二阶拟线性椭圆型偏微分方程的部分理论，着重于有界区域上的 Dirichlet 问题. 它来源于作者在斯坦福大学为研究生课程所写的讲义，但出版时所包含的材料大大超出了这些课程的范围. 增加了一些预备性章节，诸如位势理论、泛函分析等题目，试图使本书能够为更广大的读者所接受. 首要的是，我们希望本书的读者能对椭圆型方程研究中发展起来并已成为分析学科组成部分的大量创造性的精致技巧获得正确的评价.

过去几年里在本书的形成过程中我们得到了许多学者的帮助. 特别地，我们要感谢 L. M. Simon 给我们的有益讨论，以及他在 15.4 节到 15.8 节中的贡献；还要感谢 J. M. Cross, A. S. Geue, J. Nash, P. Trudinger 和 B. Turkington 在评注和校正方面所给予的帮助；感谢 G. Williams 在 10.5 节，A. S. Geue 在 10.6 节的贡献；感谢斯坦福的 Isolde Field 和堪培拉的 Anna Zalucki 花了很多精力准确无误地打印了手稿. 作者与本书相关的研究工作也部分地得到 National Science Foundation 的支持.

1977 年 8 月

David Gilbarg 斯坦福

Neil S. Trudinger 堪培拉

注：第二版包含新增加的第 9 章. 因此上面提及的 15.4 节到 15.8 节是本版的 16.4 节到 16.8 节，而 10.5 节和 10.6 节分别为本版的 11.5 节和 11.6 节.

目　录

第 1 章　引论 · **1**

概要 · 1

第一部分　线 性 方 程

第 2 章　Laplace 方程 · **13**

2.1.　平均值不等式 · 14

2.2.　最大值和最小值原理 · 15

2.3.　Harnack 不等式 · 16

2.4.　Green 表示 · 17

2.5.　Poisson 积分 · 19

2.6.　收敛性定理 · 21

2.7.　导数的内估计 · 22

2.8.　Dirichlet 问题; 下调和函数方法 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 22

2.9.　容量 · 26

习题 · 27

第 3 章 古典最大值原理 · · · 29

3.1. 弱最大值原理 · · · 30

3.2. 强最大值原理 · · · 31

3.3. 先验的界 · · · 33

3.4. Poisson 方程的梯度估计 · · · 35

3.5. Harnack 不等式 · · · 39

3.6. 散度形式的算子 · · · 43

评注 · · · 44

习题 · · · 45

第 4 章 Poisson 方程和 Newton 位势 · · · 49

4.1. Hölder 连续性 · · · 49

4.2. Poisson 方程的 Dirichlet 问题 · · · 52

4.3. 二阶导数的 Hölder 估计 · · · 54

4.4. 在边界上的估计 · · · 61

4.5. 一阶导数的 Hölder 估计 · · · 64

评注 · · · 66

习题 · · · 67

第 5 章 Banach 空间和 Hilbert 空间 · · · 69

5.1. 压缩映象原理 · · · 70

5.2. 连续性方法 · · · 71

5.3. Fredholm 二择一性质 · · · 71

5.4. 对偶空间和共轭 · · · 75

5.5. Hilbert 空间 · · · 76

5.6. 投影定理 · · · 77

5.7. Riesz 表示定理 · · · 77

5.8. Lax-Milgram 定理 · · · 78

5.9. Hilbert 空间中的 Fredholm 二择一性质 · · · 79

5.10. 弱紧性 · · · 80

评注 · · · 81

习题 · · · 81

第 6 章　古典解; Schauder 方法 · · · · · · · · · · · · · · · **83**
6.1.　Schauder 内估计 · 85
6.2.　边界估计和全局估计 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 90
6.3.　Dirichlet 问题 · 96
6.4.　内部正则性和边界正则性 · · · · · · · · · · · · · · · · 104
6.5.　另一种方法 · 108
6.6.　非一致椭圆型方程 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 111
6.7.　其他边界条件; 斜导数问题 · · · · · · · · · · · · · · · 116
6.8.　附录 1: 内插不等式 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 125
6.9.　附录 2: 延拓引理 · 131
评注 · 132
习题 · 136

第 7 章　Sobolev 空间 · · · · · · · · · · · · · · · · · · **139**
7.1.　L^p 空间 · 140
7.2.　正则化和用光滑函数逼近 · · · · · · · · · · · · · · · · 141
7.3.　弱导数 · 144
7.4.　链式法则 · 145
7.5.　$W^{k,p}$ 空间 · 147
7.6.　稠密性定理 · 148
7.7.　嵌入定理 · 149
7.8.　位势估计和嵌入定理 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 152
7.9.　Morrey 和 John-Nirenberg 估计 · · · · · · · · · · · · · 157
7.10.　紧性结果 · 159
7.11.　差商 · 160
7.12.　延拓和内插 · 162
评注 · 165
习题 · 165

第 8 章　广义解和正则性 · · · · · · · · · · · · · · · · · **169**
8.1.　弱最大值原理 · 171
8.2.　Dirichlet 问题的可解性 · · · · · · · · · · · · · · · · · 173
8.3.　弱解的可微性 · 175
8.4.　全局正则性 · 178

8.5. 弱解的全局有界性 · · · · · · 179
8.6. 弱解的局部性质 · · · · · · 184
8.7. 强最大值原理 · · · · · · 189
8.8. Harnack 不等式 · · · · · · 189
8.9. Hölder 连续性 · · · · · · 190
8.10. 在边界处的局部估计 · · · · · · 192
8.11. 一阶导数的 Hölder 估计 · · · · · · 198
8.12. 特征值问题 · · · · · · 201
评注 · · · · · · 203
习题 · · · · · · 205

第 9 章 强解 · · · · · · 207

9.1. 强解的最大值原理 · · · · · · 208
9.2. L^p 估计: 初步分析 · · · · · · 213
9.3. Marcinkiewicz 内插定理 · · · · · · 214
9.4. Calderon-Zygmund 不等式 · · · · · · 216
9.5. L^p估计 · · · · · · 220
9.6. Dirichlet 问题 · · · · · · 226
9.7. 一个局部最大值原理 · · · · · · 228
9.8. Hölder 和 Harnack 估计 · · · · · · 230
9.9. 在边界上的局部估计 · · · · · · 234
评注 · · · · · · 238
习题 · · · · · · 239

第二部分 拟线性方程

第 10 章 最大值原理和比较原理 · · · · · · 243

10.1. 比较原理 · · · · · · 246
10.2. 最大值原理 · · · · · · 248
10.3. 一个反例 · · · · · · 250
10.4. 散度形式算子的比较原理 · · · · · · 251
10.5. 散度形式算子的最大值原理 · · · · · · 254
评注 · · · · · · 259

习题 · · · 259

第 11 章 拓扑不动点定理及其应用 · · · 261

11.1. Schauder 不动点定理 · · · 261
11.2. Leray-Schauder 定理: 一个特殊情形 · · · 262
11.3. 一个应用 · · · 264
11.4. Leray-Schauder 不动点定理 · · · 267
11.5. 变分问题 · · · 269
评注 · · · 274

第 12 章 两个变量的方程 · · · 275

12.1. 拟保角映射 · · · 275
12.2. 线性方程梯度的 Hölder 估计 · · · 281
12.3. 一致椭圆型方程的 Dirichlet 问题 · · · 284
12.4. 非一致椭圆型方程 · · · 289
评注 · · · 294
习题 · · · 296

第 13 章 梯度的 Hölder 估计 · · · 299

13.1. 散度形式的方程 · · · 299
13.2. 两个变量的方程 · · · 303
13.3. 一般形式的方程; 内估计 · · · 304
13.4. 一般形式的方程; 边界估计 · · · 308
13.5. 对 Dirichlet 问题的应用 · · · 311
评注 · · · 311
习题 · · · 312

第 14 章 边界梯度估计 · · · 313

14.1. 一般区域 · · · 315
14.2. 凸区域 · · · 317
14.3. 边界曲率条件 · · · 320
14.4. 非存在性结果 · · · 326
14.5. 连续性估计 · · · 331
14.6. 附录: 边界曲率和距离函数 · · · 332

评注 335
习题 335

第 15 章 梯度的内部和全局内估计 337
15.1. 梯度的最大值原理 337
15.2. 一般情形 340
15.3. 梯度的内估计 346
15.4. 散度形式的方程 350
15.5. 存在定理选讲 356
15.6. 连续边值的存在定理 361
评注 362
习题 362

第 16 章 平均曲率型方程 365
16.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面 366
16.2. 梯度的内估计 376
16.3. 在 Dirichlet 问题中的应用 381
16.4. 两个自变量的方程 383
16.5. 拟保角映射 386
16.6. 具有拟保角 Gauss 映射的图像 396
16.7. 对平均曲率型方程的应用 402
16.8. 附录: 椭圆型参数泛函 406
评注 409
习题 410

第 17 章 完全非线性方程 413
17.1. 最大值原理和比较原理 415
17.2. 连续性方法 418
17.3. 两个变量的方程 422
17.4. 对于二阶导数的 Hölder 估计 424
17.5. 一致椭圆型方程的 Dirichlet 问题 433
17.6. Monge-Ampère 方程的二阶导数估计 438
17.7. Monge-Ampère 型方程的 Dirichlet 问题 442
17.8. 二阶导数全局 Hölder 估计 445

17.9. 非线性边值问题 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 452
评注 · 456
习题 · 458

参考书目 · 461

后记 · 489

内容索引 · 493

记号索引 · 503

第 1 章 引论

概要

本书的主要目的是系统展开二阶拟线性椭圆型方程的一般理论以及为此而需要的线性理论. 这就意味着我们将要处理边值问题 (首先是 Dirichlet 问题) 的可解性以及与线性方程

$$Lu \equiv a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x), \quad i,j = 1,2,\dots,n \tag{1.1}$$

和拟线性方程

$$Qu \equiv a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du) = 0 \tag{1.2}$$

的解有关的一般性质, 这里 $Du = (D_1u,\dots,D_nu)$, 其中 $D_iu = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, D_{ij}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, 等等, 而且求和约定是不讲自明的. 这些方程的椭圆性是通过下列事实来表明的, 即在各个变元的定义域中, 系数矩阵 $[a^{ij}]$ (在每种情形中) 是正定的. 如果矩阵 $[a^{ij}]$ 的最大特征值和最小特征值的比 γ 有界, 我们就把这个方程叫作一致椭圆型的. 我们将处理非一致和一致椭圆型方程.

线性椭圆型方程的古典原型当然是 Laplace 方程

$$\Delta u = \sum D_{ii}u = 0$$

及其相应的非齐次方程 Poisson 方程 $\Delta u = f$. 拟线性椭圆型方程最著名的例子可能就是在求最小面积问题中提出来的极小曲面方程

$$\sum D_i(D_iu/(1+|Du|^2)^{1/2}) = 0.$$

这个方程为非一致椭圆型的, 因为 $\gamma = 1 + |Du|^2$. 这些例子中的微分算子的性质促进了本书中讨论的一般类型方程的许多理论.

有关的线性理论在第 2—9 章 (以及第 12 章的一部分) 中展开. 虽然这些材料有其特别的趣味, 这里把重点还是放在应用到非线性问题上去所需要的那些方面. 因此这个理论强调关于系数的弱的假定, 从而放过了许多有关线性椭圆型方程的重要的古典和近代结果.

因为我们最终感兴趣的是方程 (1.2) 的古典解, 在某些方面所需要的是相当大一类线性方程的古典解的一个基础理论. 这是由第 6 章的 Schauder 理论提供的, 对于具有 Hölder 连续系数的 (1.1) 类方程来说, Schauder 理论是一个本质上完备的理论. 对古典解而言这类方程具有确定的存在性和正则性理论, 而对于只假定系数是连续的那些方程, 相应的结果就不再成立了.

研究古典解的一个自然的出发点是 Laplace 方程和 Poisson 方程的理论. 这是第 2 章和第 4 章的内容. 为预示以后的发展, 具有连续边值的调和函数的 Dirichlet 问题是通过下调和函数*) 的 Perron 方法来解决的. 在论证中强调最大值原理以及研究边界行为时的闸函数概念, 在后面的章节中都容易推广到更一般的情形中去. 在第 4 章中我们从 Newton 位势的分析中推得了 Poisson 方程的基本 Hölder 估计. 第 4 章的主要结果是说 (见定理 4.6, 4.8): $\mathbb{R}^n$ 的区域 Ω 中 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 的所有 $C^2(\Omega)$ 解在任何子集 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 中满足一致估计

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leqslant C\left(\sup_{\Omega}|u| + \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}\right), \tag{1.3}$$

其中 C 是一个只依赖于 α $(0<\alpha<1)$, 维数 n 及 $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 的常数 (记号见 4.1 节). 对于取充分光滑边值的解, 只要边界 $\partial\Omega$ 也充分光滑, 就可以把这个*内估计* (因为 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 所以是内估计) 延拓成为*全局估计* (global estimate). 在第 4 章中只对超平面和球面边界建立了直到边界的估计, 但就以后的应用来说这些就够了.

线性二阶椭圆型方程古典解理论的最高峰是在 Schauder 理论中达到的, 这个理论以修改过的而且发展了的形式在第 6 章中展开. 本质上说, 这个理论是把

*) 译者注: 在本书中我们统一采用下述译名:

harmonic	调和
subharmonic	下调和
superharmonic	上调和
subsolution	下解
supersolution	上解
subfunction	下函数
superfunction	上函数

位势理论的结果推广到具有 Hölder 连续系数的方程类 (1.1) 中去. 它是通过一个简单然而基本的方法来完成的, 这个方法是: 在单个点上固定首项系数的值, 得到一个常系数方程, 把原方程局部地看作是这个常系数方程的扰动. 基于上面提到的 Poisson 方程的估计进行仔细地计算就得出 (1.1) 的任何 $C^{2,\alpha}$ 解的同一不等式 (1.3), 其中常数 C 现在还依赖于系数的界和 Hölder 常数. 此外还依赖于系数矩阵 $[a^{ij}]$ 在 Ω 中的最大和最小特征值. 这些结果被叙述为以加权内部范数表示的内估计 (定理 6.2), 而在边界数据充分光滑的情形, 则被叙述为以全局范数表示的全局估计 (定理 6.6). 这里我们遇到了先验估计这个重要且经常用到的概念; 也就是说, 对一类问题的所有可能的解都成立 (以给定的数据表出) 的一个估计, 即使前提并不保证这样的解的存在性. 本书的主要部分就是专门用来建立各种问题的先验的界.

在第 6 章的一些应用中可以看到这些先验估计的重要性, 其中包括用连续性的方法建立 Dirichlet 问题的可解性 (定理 6.8) 以及在适当的光滑性假定下证明 C^2 解的更高阶的正则性 (定理 6.17, 6.19). 在这两种情形中这种估计对于某类解提供了必需的紧致性, 由此就容易推出所要的结果.

我们评述一下第 6 章的另外几个特征, 虽然它们对本书后面的发展说来并不需要, 但却扩大了基本 Schauder 理论的范围. 在 6.5 节中我们看到对于连续边值问题以及适当广泛的一类区域, (1.1) 的 Dirichlet 问题可解性的证明可以完全用内估计来完成, 从而简化了理论的结构. 6.6 节的结果把 Dirichlet 问题的存在性理论推广到了某类非一致椭圆型方程. 这里我们看到边界的几何性质和在边界处的退化椭圆性之间的一些关系如何确定边值的连续性假定. 基于闸函数论证的这些方法预示着第二部分中非线性方程的类似的 (但更深入的) 结果. 在 6.7 节中我们把 (1.1) 的理论推广到正则斜导数问题上去. 这个方法基本上是对早先处理 Poisson 方程的边界条件和 Schauder 理论 (但是不用闸函数的论证) 的外推.

在上述考虑中, 特别是在存在性理论和闸函数论证中, 算子 L (当 $c \leqslant 0$ 时) 的最大值原理起着本质的作用. 这是二阶椭圆型方程的一个特别的特征, 它简化并加强了二阶椭圆型方程的理论. 关于最大值原理的基本事实, 以及比较方法的例证性应用都包括在第 3 章中. 最大值原理提供了一般理论的最早和最简单的先验估计. 相当重要的是第 4 和第 6 章中所有的先验估计完全可以从基于最大值原理的比较论证中推得, 而不用任何 Newton 位势或积分.

线性问题的另一种而且是更一般的不用位势理论的方法可以像第 8 章所讲的那样用基于广义解或弱解的 Hilbert 空间方法来得到. 更具体地说, 设 L' 是由

$$L'u \equiv D_i(a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u) + c^i(x)D_iu + d(x)u$$