

高等学校计算机教育规划教材

离散数学

解题指导

● (第2版) ●

贲可荣 袁景凌 高志华 编著
陶先平 主审



清华大学出版社

高等学校计算机教育规划教材

离散数学

解题指导

(第2版)

贲可荣 袁景凌 高志华 编著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是根据高等学校计算机教育规划教材《离散数学》(第2版)编写的配套指导用书。全书分为10章,每章包括内容提要、例题精选和习题解答三个部分。内容提要叙述了本章的主要定义、定理和重要公式等内容;例题精选包括一些典型题目及其详细的分析解答;习题解答提供了上述主教材各章习题的答案。

本书既可以作为上述主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的读者在解题能力和技巧训练方面提供有益的帮助。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学解题指导/贲可荣,袁景凌,高志华编著. —2版. —北京:清华大学出版社,2016

高等学校计算机教育规划教材

ISBN 978-7-302-44469-5

I. ①离… II. ①贲… ②袁… ③高… III. ①离散数学—高等学校—题解 IV. ①O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 171535 号

责任编辑:张瑞庆

封面设计:常雪影

责任校对:焦丽丽

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:三河市金元印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:15.75

字 数:381千字

版 次:2012年6月第1版 2016年11月第2版

印 次:2016年11月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:35.00元

产品编号:065577-01

第2版序

PREFACE

张恭庆院士在“数学的意义”一文中指出：数学既是一种文化、一种“思想的体操”，更是现代理性文化的核心。数学的基本特征是高度的抽象性和严密的逻辑性，应用的广泛性与描述的精确性，以及研究对象的多样性与内部的统一性。

数学是一门“研究数量关系与空间形式”的学科。通常根据问题的来源把数学分为纯粹数学与应用数学。研究其自身提出的是纯粹数学；研究来自现实世界中的数学问题的是应用数学。利用建立数学“模型”，使得数学研究的对象在“数”与“形”的基础之上又有扩充。各种“关系”，如“语言”、“程序”、“DNA 排序”、“选举”、“动物行为”等都能作为数学研究的对象。纯粹数学与应用数学的界限有时也并不那么明显。一方面由于纯粹数学中的许多对象，追根溯源是在解决外部问题时提出来的；另一方面，为了要研究从外部世界提出的数学问题，有时需要从更抽象、更纯粹的角度来考察才有可能解决。

数学作为现代理性文化的核心，提供了一种思维方式。这种思维方式包括：抽象化、运用符号、建立模型、逻辑分析、推理、计算，不断地改进、推广，更深入地洞察内在的联系，在更大范围内进行概括，建立更为一般的统一理论等一整套严格的、行之有效的科学方法。按照这种思维方式，数学使得各门学科的理论知识更加系统化、逻辑化。

离散数学是数学里专门用来研究离散对象的一个数学分支，是计算机专业的一门重要的基础课。它所研究的对象是离散的数量关系和离散的数学结构模型。本书共 10 章，主要包含数理逻辑、集合与关系、函数、图和树、组合计数、离散概率、数论与递归关系、代数系统、自动机、文法和语言等内容，基本上涵盖了计算机专业读者必须掌握的数学内容。离散数学这门课程主要介绍各分支的基本概念、基本理论和基本方法，这些知识将应用于数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库原理、算法分析与设计、人工智能、软件工程和计算机网络等专业课程中。

电子计算机从设想、理论设计、研制，一直到程序存储等过程，数学家在其中起着决定性的主导作用。从理论上，哥德尔创建了可计算理论和递归理论，图灵第一个设计出通用数字计算机，他们都是数学家。冯·诺

依曼是第一台电子计算机的研制者,是程序和存储的创建人,也是数学家。

信息科学与数学的关系最为密切。信息安全、信息传输、计算机视觉、计算机听觉、图像处理、网络搜索、商业广告、反恐侦破和遥测遥感等都大量地运用了数学知识。高性能科学计算被认为是最重要的科学技术进步之一,也是21世纪发展和保持核心竞争力的必备科技手段。例如,核武器、流体、星系演化、新材料和大工程等计算机模拟都要求高性能的科学计算。若要应用好高性能计算机解决科学问题,基础算法与可计算建模是关键。

信息的“加密”与“解密”是一种对抗,而这种对抗力量的表现全在所依靠的数学理论之上。例如,公开密钥算法大多基于计算复杂度很高的难题,要想求解,需要在高速计算机上耗费许多时日才能得到答案。这些方法通常来自于数论。RSA源于整数因子分解问题,DSA源于离散对数问题,而近年发展迅速的椭圆曲线密码学则基于与椭圆曲线相关的数学问题。

人们利用观察和试验手段获取数据,利用数据分析方法探索科学规律。数理统计学是一门研究如何有效地收集、分析数据的学科,它以概率论等数学理论为基础,是“定量分析”的关键学科。大数据事实上已成为信息主权的一种表现形式,将成为继边防、海防、空防之后大国博弈的另一个空间。“大数据”的核心是将数学算法运用到海量数据上,预测事情发生的可能性。

数学与国民经济中的很多领域休戚相关。互联网、计算机软件、高清晰电视、手机、便携式计算机、游戏机、动画、指纹扫描仪、汉字印刷和监测器等在国民经济中占有相当大的比重,成为世界经济的重要支柱产业。其中,互联网、计算机核心算法、图像处理、语音识别、云计算和人工智能等IT业主要研发领域都是以数学为基础的。

严加安院士在文章“数学的奇妙:我们身边的概率和博弈问题”中介绍了“在猜奖游戏中改猜是否增大中奖概率”问题。

这一问题出自美国的电视游戏节目Let's make a deal。问题的名字来自该节目的主持人蒙提·霍尔,20世纪90年代曾在美国引起广泛和热烈的讨论。假定在台上有三扇关闭的门,其中一扇门后面有一辆汽车,另外两扇门后面各有一只山羊。主持人是知道具体哪扇门后面有汽车的。当竞猜者选定了一扇门但尚未开启它的时候,节目主持人去开启剩下两扇门中的一扇,露出的是山羊。主持人会问参赛者要不要改猜另一扇未开启的门。问题是:改猜另一扇未开启的门是否比不改猜赢得汽车的概率要大?答案是:改猜能增大赢得汽车的概率,从原来的 $1/3$ 增大为 $2/3$ 。也许有人对此答案提出质疑,认为改猜和不改猜赢得汽车的概率都是 $1/2$ 。为消除这一质疑,不妨考虑有10扇门的情形,其中一扇门后面有一辆汽车,另外9扇门后面各有一只山羊。当竞猜者猜了某一扇门但尚未开启时,主持人去开启剩下9扇门中的8扇,露出的全是山羊。显然:原先猜的那扇门后面有一辆汽车的概率只是 $1/10$,这时改猜另一扇未开启的门赢得汽车的概率是 $9/10$ 。

在离散数学教学中我们发现,通过一些应用问题的引入和求解分析,学生能够对离散数学产生兴趣,并留下深刻印象。借修订之际,我们对每一章都增加了应用案例,以说明相应章节知识的学习可以解决什么样的典型应用问题。

需要指出的是,我们在撰写函数、离散概率及图论章节应用案例时,选用了美国伊

利诺伊大学刘炯朗教授在文章“魔术中的数学”(2015年中国计算机大会报告)中的例子。命题逻辑部分的应用案例选自我的老师康宏逵先生翻译的《这本书叫什么》。

全书分为10章,每章包含内容提要、例题精选、应用案例和习题解答四部分。

“命题逻辑”中的应用案例包括:克雷格探长案卷录,忘却林中的艾丽丝(狮子与独角兽、斤斤计与斤斤较);“谓词逻辑”中的应用案例包括:电路领域的知识工程,基于逻辑的财务顾问;“集合与关系”中的应用案例包括:同余关系在出版业中的应用,拓扑排序在建筑工序中的应用,等价关系在软件测试等价类划分中的应用;“函数”中的应用案例包括:逢黑必反魔术,生成函数在解决汉诺塔问题过程中的应用;“组合计数与离散概率”中的应用案例包括:大使馆通信的码字数,条条道路通罗马;“图论”中的应用案例包括:网络爬虫,读心术魔术,高度互联世界的行为原理;“树及其应用”中的应用案例包括:Huffman压缩算法的基本原理,一字棋博弈的极大极小过程;“代数系统”中的应用案例包括:物理世界中群的应用,群码及纠错能力;“自动机、文法和语言”中的应用案例包括:奇偶校验机,地址分析,语音识别;“初等数论”中的应用案例包括:密码系统与公开密钥,单向陷门函数在公开密钥密码系统中的应用。

本书既可以作为《离散数学》(第2版)的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的读者在解题能力和技巧训练方面提供帮助。

本书第3、4、7章由袁景凌编写,谢茜参与了部分应用案例的编写,其余章节由贲可荣、高志华编写。于嘉维绘制了部分图形,曾杰参与了样稿校对。贲可荣组织了本书的编写,南京大学陶先平教授对全书进行了审读。本书撰写过程中,参考了许多资料,特别感谢参考文献中的相关作者。同时,也欢迎读者对本书提出宝贵的修改建议。

贲可荣

2016年7月

第1版序

PREFACE

丁石孙(北京大学原校长)在为《数学与文化》(齐民友著)所作的序中写道:“钱学森同志认为在人类整个知识系统中,数学不应被看成是自然科学的一个分支,而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。”

“数学不仅在自然科学的各个分支中 useful,同时在社会科学的很多分支中也有用。近期随着科学的飞速发展,不仅数学的应用范围日益广泛,同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻。事实上,数学的重要性不只在它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系,而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式,影响着人文科学的进步。总之,数学作为一门科学有其特殊的重要性。”

理性探索有一个永恒的主题:“认识宇宙,也认识人类自己。”在这个探索中数学有着特别的作用。没有任何一门科学能像数学那样泽被天下。数学是现代科学技术的语言和工具,它的思想是许多物理学说的核心,并为它们的出现开辟了道路。现代科学之所以成为现代科学,第一个决定性的步骤是使自己数学化。

数学在人类理性思维活动中有一些特点。这些特点的形成离不开各个时代的总的文化背景,同时又是数学影响人类文化最突出之处。

首先,它追求一种完全确定、完全可靠的知识。产生这个特点的原因可以由其对象和方法两个方面来说明。从希腊的文化背景中形成的数学的对象并不只是具体问题,数学所探讨的不是转瞬即逝的知识,不是服务于某种具体物质需要的问题,而是某种永恒不变的东西。所以,数学的对象必须有明确无误的概念,而且其方法必须由明确无误的命题开始,并服从明确无误的推理规则,借以达到正确的结论。通过纯粹的思想竟能在认识宇宙上达到如此确定无疑的地步,当然会给一切需要理性思维的人以极大的启发。人们自然会要求在一切实领域中这样做。一切事物的概念都应该明确无误,绝对不允许偷换概念;作为推理出发点的一组命题必须清晰,推理过程的每一步骤都不容许有丝毫含混;整个认识 and 理论必须前后一贯而不允许自相矛盾。正是因为这样,而且也仅仅因为这样,才使得数学方法既成为人类认识方法的一个典范,也成为人在认识宇宙和人类自己时必须持有的客观态度的一个标准。就数学本身而言,达到数学真理的途

径既有逻辑的方面,也有直觉的方面,但就其与其他科学比较而言,就其影响人类文化的其他部门而言,它的逻辑方法是最突出的。这个方法发展成为人们常说的公理方法。人类知识迄今还没有哪一个部门应用公理方法获得了像数学那样大的成功。当然,我们也看不出为什么其他的知识部门需要这样高标准的公理化。

数学作为人类文化组成部分的另一个特点是它不断追求最简单、最深层次的、超出人类感官所及的宇宙的根本。所有这些研究都是在极抽象的形式下进行的。这是一种化繁为简以求统一的过程。从古希腊起,人们就有一个信念,冥冥之中最深处宇宙有一个伟大的、统一的而且简单的设计图,这是一个数学设计图。在一切比较深入的科学研究后面必定有一种信念驱使我们。这个信念就是:世界是合理的、简单的,因而是可以理解的。对于数学研究则要加上一点:这个世界的合理性首先在于它可以用数学来描述。我们为世界图景的精巧和合理而欣喜,而惊异。这种感情正是人类文化精神的结晶。数学正是在这样的文化气氛中成长的,而反过来推动这种文化气氛的发展。

数学的再一个特点是它不仅研究宇宙的规律,而且也研究它自己。它在发挥自己力量的同时又研究自己的局限性,从不担心否定自己,而是不断反思,不断批判自己,并且由此开辟自己前进的道路。它不断致力于分析自己的概念,分析自己的逻辑结构(例如,希腊人把一切几何图形都分解为点、线、面,把所有几何命题的相互关系分解为公理、公设、定义、定理)。它不断地反思自己的概念、自己的方法能走多远?大家都说数学在证明一串串的定理,数学家就要问什么叫证明?数学越发展,取得的成就就越大,数学家就越要问自己的基础是不是巩固。越是在表面上看来没有问题的地方,越要找出问题来。乘法明明是可以交换的,偏偏要研究不可交换的乘法。唯有数学,时常是在理性思维感到有了问题时就要变。而且,其他科学中“变”的倾向时常是由数学中的“变”直接或间接引起的。当然,数学中许多重要的变是由于直觉地感到有变的必要,感到只有变才能直视宇宙的真面目。但无论如何,是先从思维的王国里开始变,即否定自己。这种变的结果时常是“从一无所有之中创造了新的宇宙”。

到了最后,数学开始怀疑起自己的整体,考虑自己的力量界限何在。大概是到了19世纪末,数学向自己提出的问题是:“我真是一个没有矛盾的体系吗?我真正提供了完全可靠、确定无疑的知识吗?我自认为是在追求真理,可是‘真’究竟是指什么?我证明了某些对象的存在,或者说我无矛盾地创造了自己的研究对象,可是它们的确存在吗?如果我不可能真正地把这些东西构造出来,又怎么知道它是存在的呢?我是不是一张空头支票,一张没有银行的支票呢?”

总之,数学是一株参天大树,它向天空伸出自己的枝叶,吸收阳光。它不断扩展自己的领地,在它的树干上有越来越多的鸟巢,它为越来越多的科学提供支持,也从越来越多的科学中吸取营养。它又把自己的根伸向越来越深的理性思维的土地中,使它越来越牢固地站立。从这个意义上讲,数学是人类理性发展的最高成就。

人总有一个信念:宇宙是有秩序的。数学家更进一步相信,这个秩序是可以用数学表达的,因此人应该去探索这种深层的内在秩序,以此来满足人的物质需要。

离散数学用数学语言来描述离散系统的状态、关系和变化过程,是计算机科学与技术的形式化描述语言,也是进行数量分析和逻辑推理的工具。

离散数学是计算机科学与技术专业的核心基础课,在计算机科学与技术专业课程体

系中起到重要的基础理论支撑作用。学习离散数学不仅能够帮助学生更好地理解与掌握专业课程的教学内容,同时也为学生在将来的计算机科学技术的研究和工程应用中打下坚实的理论基础。随着计算机科学与技术的日益成熟,越来越完善的分析技术被用于实践,为了更好地理解将来的计算机科学技术,学生需要对离散结构有深入的理解。

通过离散数学的学习有利于培养学生的学科素质,进一步强化对计算机科学与技术学科方法的训练。通过离散数学的教学,对培养学生获取知识、应用知识的能力和創新思维有着重要的作用。

本书与《离散数学》(第2版)(高等学校计算机教育规划教材,清华大学出版社出版)相配套。本书主要包含数理逻辑、集合与关系、函数、组合计数、图和树、代数系统、自动机和初等数论等内容。全书分为10章,每章包含内容提要、例题精选和习题解答三个部分。内容提要总结了本章的主要定义、定理以及重要的结果等;例题精选包含与上述内容配套的典型例题;习题解答与配套教材的习题对应。

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的读者在解题能力和技巧训练方面提供帮助。

本书第3、4、7章由袁景凌编写,其余章节由高志华、贲可荣编写,全书由高志华统稿。贲可荣组织了本书的编写,南京大学陶先平教授对全书进行了审读。

本书编写中参考了许多离散数学的教材和相关资料,在此一并表示感谢。作者对本书有些方面仍感不足,错漏在所难免,敬请读者予以斧正,以便今后补充修改。

贲可荣

2011年12月

目 录

CONTENTS

第 1 章 命题逻辑	1
1.1 内容提要	1
1.2 例题精选	5
1.3 应用案例	8
1.3.1 克雷格探长案卷录	8
1.3.2 忘却林中的艾丽丝(狮子与独角兽)	12
1.3.3 忘却林中的艾丽丝(斤斤计与斤斤较)	13
1.4 习题解答	15
第 2 章 谓词逻辑	34
2.1 内容提要	34
2.2 例题精选	38
2.3 应用案例	41
2.3.1 电路领域的知识工程	41
2.3.2 一个基于逻辑的财务顾问	44
2.4 习题解答	46
第 3 章 集合与关系	60
3.1 内容提要	60
3.2 例题精选	65
3.3 应用案例	69
3.3.1 同余关系在出版业中的应用	69
3.3.2 拓扑排序在建筑工序中的应用	70
3.3.3 等价关系在软件测试等价类划分中的应用	72
3.4 习题解答	73
第 4 章 函数	92
4.1 内容提要	92

4.2	例题精选	95
4.3	应用案例	96
4.3.1	逢黑必反魔术	96
4.3.2	生成函数在解决汉诺塔问题中的应用	98
4.4	习题解答	99
第5章	组合计数与离散概率	111
5.1	内容提要	111
5.2	例题精选	115
5.3	应用案例	118
5.3.1	大使馆通信的码字数	118
5.3.2	条条道路通罗马	119
5.4	习题解答	122
第6章	图论	127
6.1	内容提要	127
6.2	例题精选	133
6.3	应用案例	135
6.3.1	网络爬虫	135
6.3.2	读心术魔术	137
6.3.3	高度互联世界的行为原理	138
6.4	习题解答	142
第7章	树及其应用	161
7.1	内容提要	161
7.2	例题精选	163
7.3	应用案例	166
7.3.1	Huffman 压缩算法的基本原理	166
7.3.2	一字棋博弈的极大极小过程	168
7.4	习题解答	170
第8章	代数系统	177
8.1	内容提要	177
8.2	例题精讲	182
8.3	应用案例	186
8.3.1	物理世界中群的应用	186
8.3.2	群码及纠错能力	189
8.4	习题解答	193

第 9 章 自动机、文法和语言	211
9.1 内容提要	211
9.2 例题精选	212
9.3 应用案例	214
9.3.1 奇偶校验机	214
9.3.2 识别地址的有限状态机	216
9.3.3 语音识别	217
9.4 习题解答	218
第 10 章 初等数论	225
10.1 内容提要	225
10.2 例题精选	226
10.3 应用案例	229
10.3.1 密码系统与公开密钥	229
10.3.2 单向陷门函数在公开密钥密码系统中的应用	233
10.4 习题解答	234
参考文献	237

第 1 章

命题逻辑

1.1 内容提要

命题 命题是一个可以判断真假的陈述句。

真值 作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值,用 T 表示命题的真值为真,用 F 表示命题的真值为假。

原子命题 不能分解为更简单的命题称为原子命题。

复合命题 由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题称为复合命题。

命题联结词

(1) 设 p 为命题,复合命题“非 p ”(或“ p 的否定”)称为 p 的否定式,记作 $\neg p$,符号 $\neg$ 称作否定联结词。并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

(2) 设 p, q 为两个命题,复合命题“ p 并且 q ”(或“ p 与 q ”)称为 p 与 q 的合取式,记作 $p \wedge q$, $\wedge$ 称作合取联结词。并规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

(3) 设 p, q 为两个命题,复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的析取式,记作 $p \vee q$, $\vee$ 称作析取联结词。并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假。

(4) 设 p, q 为两个命题,复合命题“如果 p , 则 q ”称作 p 与 q 的蕴涵式,记作 $p \rightarrow q$, $\rightarrow$ 称作蕴涵联结词。并规定 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。 $p \rightarrow q$ 的逻辑关系表示 q 是 p 的必要条件。

(5) 设 p, q 为两个命题,复合命题“ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的等值式,记作 $p \leftrightarrow q$, $\leftrightarrow$ 称作等价联结词。并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件。

命题常项 有确定真值的命题称为命题常项。T、F 也是命题常项。

命题变项 命题变项取值为 T 或 F。

命题公式

(1) 单个命题常项和命题变项是合式公式,并称为原子命题公式。

(2) 若 A 是合式公式,则 $\neg A$ 也是合式公式。

(3) 若 A, B 是合式公式, 则 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 也是合式公式。

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形式的符号串才是合式公式。合式公式也称为命题公式或命题形式, 简称为公式。

公式的赋值 设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题符号, 给 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 各指定一个真值, 称为对 A 的一个赋值或解释。若指定的一组值使 A 的真值为 T , 则称这组值为 A 的成真赋值; 若使 A 的真值为 F , 则称这组值为 A 的成假赋值。

真值表 命题公式 A 在所有赋值下的取值情况所列成的表称作 A 的真值表。构造真值表, 首先要找出公式 A 中所含的全体命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$, 列出 2^n 个赋值。本书规定, 赋值从 $TT \dots T$ 开始, 依次列出所有赋值, 直到 $FF \dots F$ 为止。然后, 对应各赋值, 计算出公式的真值列成真值表。

命题公式的类型 设 A 为任一命题公式,

(1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真, 则称 A 是重言式或永真式。

(2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假, 则称 A 是矛盾式或永假式。

(3) 若 A 至少存在一个成真赋值, 则称 A 是可满足式。

逻辑等价 设有 $A: A(p_1, p_2, \dots, p_n), B: B(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 两个命题公式, 这里 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不一定在两公式中同时出现; 如果 $A \leftrightarrow B$ 是重言式, 即 A 与 B 对任何指派都有相同的真值, 则称 A 与 B 逻辑等价(等值), 记为 $A \Leftrightarrow B$, 也称为逻辑等价式。

等值演算

- | | | |
|------------|--|---|
| (1) 双重否定律 | $A \Leftrightarrow \neg \neg A$ | |
| (2) 幂等律 | $A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$ | |
| (3) 交换律 | $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ | |
| (4) 结合律 | $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ |
| (5) 分配律 | $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | ($\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律) |
| | $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | ($\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律) |
| (6) 德·摩根律 | $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ | $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ |
| (7) 吸收律 | $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ | $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ |
| (8) 零律 | $A \vee T \Leftrightarrow T$ | $A \wedge F \Leftrightarrow F$ |
| (9) 同一律 | $A \vee F \Leftrightarrow A$ | $A \wedge T \Leftrightarrow A$ |
| (10) 排中律 | $A \vee \neg A \Leftrightarrow T$ | |
| (11) 矛盾律 | $A \wedge \neg A \Leftrightarrow F$ | |
| (12) 蕴涵律 | $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ | |
| (13) 等价律 | $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ | |
| (14) 假言易位律 | $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$ | |
| (15) 等价否定律 | $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$ | |
| (16) 归谬律 | $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$ | |

对偶式 在仅含有联结词 $\neg, \vee, \wedge$ 的命题公式 A 中, 将 $\vee$ 换成 $\wedge$, 将 $\wedge$ 换成 $\vee$, 同时 T 和 F 互相替代, 所得公式 A^* 称为 A 的对偶式。显然 A 是 A^* 的对偶式。

定理 1.1 A 和 A^* 是互为对偶式, $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是出现在 A 和 A^* 的原子变元, 则

$$\neg A(p_1, p_2, \dots, p_n) \Leftrightarrow A^*(\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n)$$

$$A(\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n) \Leftrightarrow \neg A^*(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

即公式的否定等值于其变元否定的对偶式。

定理 1.2 设 A^*, B^* 分别是 A 和 B 的对偶式, 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$ 。

简单析取式与简单合取式 命题变项及其否定统称为文字, 仅由有限个文字构成的析取式称为简单析取式, 仅由有限个文字构成的合取式称为简单合取式。

定理 1.3

- (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式。
- (2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及它的否定式。

范式

- (1) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式。
- (2) 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式。
- (3) 析取范式与合取范式统称为范式。

定理 1.4

- (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。
- (2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

定理 1.5(范式存在定理) 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式。

极小项与极大项 在含有 n 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中, 若每个命题变项和它的否定式不同时出现, 而二者之一必出现且仅出现一次, 且第 i 个命题变项或它的否定式出现在从左算起的第 i 位上(若命题变项无角标, 就按字典顺序排列), 称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项)。

主析取范式与主合取范式 设由 n 个命题变项构成的析取范式(合取范式)中所有的简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项), 则称该析取范式(合取范式)为主析取范式(主合取范式)。

定理 1.6 设 m_i 与 M_i 是命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 形成的极小项和极大项, 则 $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$ 。

定理 1.7 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的。

联结词的完备集 设 S 是一些联结词组成的非空集合, 如果任何的命题公式都可以用仅包含 S 中的联结词的公式表示, 则称 S 是联结词完备集。特别地, 若 S 是联结词完备集且 S 的任何真子集都不是完备集, 则称 S 是最小完备集, 又称最小联结词组。

与非和或非 设 p, q 为两个命题, 复合命题“ p 与 q 的否定式”(“ p 或 q 的否定式”)称作 p, q 的与非式(或非式), 记作 $p \uparrow q (p \downarrow q)$ 。符号 $\uparrow (\downarrow)$ 称作与非联结词(或非联结词)。 $p \uparrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 不同时为真($p \downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假)。

有效推理 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ 都是命题形式, 称推理“ $A_1, A_2, \dots, A_n$ 推出 B ”是有效的(或正确的), 如果对 $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ 中出现的命题变项的任一指派, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 都真, 则 B 亦真, 并称 B 是有效结论, 记为 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$ 。否则, 称“由 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 推出 B ”是无效的或不合理的, 记为 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \not\models B$ 。

定理 1.8 命题公式 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 推 B 的推理正确当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式。

P 规则 前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

T 规则 在推导中,如果有一个或多个公式重言蕴涵着公式 S ,则公式 S 可以引入推导之中。

形式系统 一个形式系统 I 由下面 4 个部分组成:

- (1) 非空的字符表集,记作 A ;
- (2) A 中符号构造的合式公式集,记作 E ;
- (3) E 中一些特殊的公式组成的公理集,记作 A_X ;
- (4) 推理规则集,记作 r 。

可以将 I 记为 $\langle A, E, A_X, r \rangle$ 。其中 $\langle A, E \rangle$ 是 I 的形式语言系统, $\langle A_X, r \rangle$ 为 I 的形式演算系统。

命题演算系统 命题演算系统 $P1$ 定义如下:

(1) 字母表。

① 命题变项符号: $p, q, r, \dots$

② 联结词符号: $\neg, \rightarrow$

③ 括号和逗号: $(,), ,$

(2) 合式公式参见定义 1.7,但限制联结词为 $\neg, \rightarrow$ 。

(3) 命题公理 $Ax I \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ 。

$Ax II \quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ 。

$Ax III \quad (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \alpha)$ 。

(4) 推理规则(MP): 由 α 及 $\alpha \rightarrow \beta$ 推得 β 。

在命题演算系统 $P1$ 中,以 Φ 中的公式为前提,应用公理和 MP 规则,推出 α ,记为: $\Phi \vdash \alpha$ 。

定理 1.9(命题演算系统 $P1$ 是可靠的) Φ 为有穷公式集, $\Phi \vdash \alpha \Rightarrow \Phi \models \alpha$ 。

定理 1.10(命题演算系统 $P1$ 是一致的) 如果 Φ 是可满足公式集,则 Φ 是一致的。

定理 1.11(命题演算系统 $P1$ 是完备的) Φ 为有穷公式集, $\Phi \models \alpha \Rightarrow \Phi \vdash \alpha$ 。特别地, $\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$ 。

自然推理系统 自然推理系统 $P2$ 定义如下:

(1) 字母表。

① 命题变项符号: $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$

② 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

③ 括号和逗号: $(,), ,$

(2) 合式公式。

① 单个命题常项和命题变项是合式公式,并称为原子命题公式。

② 若 A 是合式公式,则 $\neg A$ 也是合式公式。

③ 若 A, B 是合式公式,则 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 也是合式公式。

④ 只有有限次地应用①~③形式的符号串才是合式公式。

(3) 推理规则。

① 前提引入规则: 在证明的任何步骤上都可以引入前提。

② 结论引入规则: 在证明的任何步骤上所得到的结论都可以作为后继证明的前提。

③ 置换规则: 在证明的任何步骤上,命题公式中的子公式都可以用与之等值的公式

置换,得到公式序列中的又一个公式。

④ 假言推理规则(或称分离规则):由 $A \rightarrow B$ 和 A ,可得 B 。

⑤ 附加规则:由 A ,可得 $A \vee B$ 。

⑥ 化简规则:由 $A \wedge B$,可得 A 。

⑦ 拒取式规则:由 $A \rightarrow B$ 和 $\neg B$,可得 $\neg A$ 。

⑧ 假言三段论规则:由 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow C$,可得 $A \rightarrow C$ 。

⑨ 析取三段论规则:由 $A \vee B$ 和 $\neg B$,可得 A 。

⑩ 构造性二难推理规则:由 $A \rightarrow B, C \rightarrow D$ 和 $A \vee C$,可得 $B \vee D$ 。

⑪ 破坏性二难推理规则:由 $A \rightarrow B, C \rightarrow D$ 和 $\neg B \vee \neg D$,可得 $\neg A \vee \neg C$ 。

⑫ 合取引入规则:由 A 和 B ,可得 $A \wedge B$ 。

子句与子句集 一个子句(Clause)是一组文字的析取,一个文字或者是一个原子(正文字),或者是一个原子的否定(负文字)。一个子句的合取范式(CNF形式)常常表示为一个子句的集合,称为子句集。

子句上的归结 命题逻辑的归结规则可以陈述如下:设有两个子句:, $C_1 = P \vee C'_1$, $C_2 = \neg P \vee C'_2$ (其中 C'_1, C'_2 是子句, P 是文字),从中消去互补对(即 P 和 $\neg P$),所得的新子句 $R(C_1, C_2) = C'_1 \vee C'_2$ 便称作子句 C_1, C_2 的归结式,原子 P 称为被归结的原子,这个过程称为归结。没有互补对的两子句没有归结式。

定理 1.12 子句 C_1 和 C_2 的归结式是 C_1 和 C_2 的逻辑推论。

归结反演 为了从一个合式公式集合 KB 中证出某一公式 w ,可以采用下述的归结反演过程:

(1) 把 KB 中的合式公式转换成子句形式,得到子句集合 S_0 。

(2) 把待验证的结论 w 的否定转换为子句形式,并加入到子句集合 S_0 中得到新的子句集合 S 。

(3) 反复对 S 中的子句应用归结规则,并且把归结式也加入到 S 中,直到再没有子句可以进行归结,如果产生空子句,则说明可以从 KB 推出 w ,否则说明 KB 无法推出 w 。

(4) 证毕。

定理 1.13 归结反演是合理的。

定理 1.14 归结反演是完备的。即从 $S \models \alpha$ 可推出 $S \vdash \alpha$,其中 α 为一公式, S 为子句集。

1.2 例题精选

例 1.1 判断下列语句哪些是命题。在是命题的语句中,哪些是真命题?哪些是假命题?

(1) 5 是素数吗?

(2) 13 只能被 1 和它本身整除。

(3) 请勿吸烟!

(4) $2+3=6$ 。

(5) 宇宙间只有地球上生命。