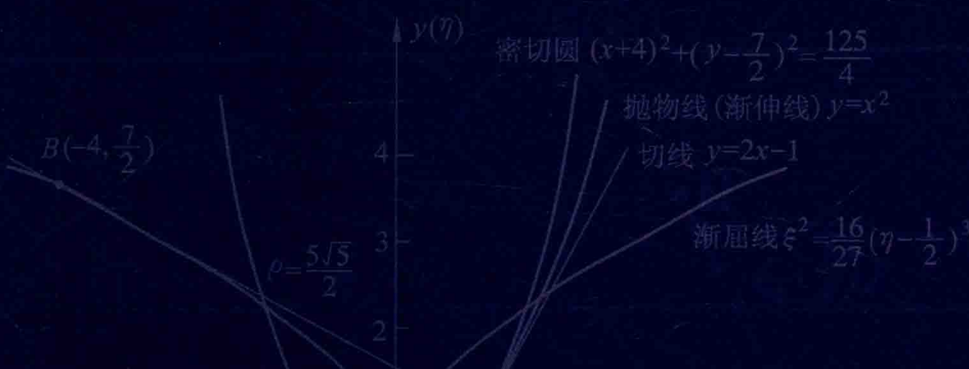
微积分中的图形解析

WEIJIFEN ZHONG DE TUXING JIEXI

李光久 钟瑜荪 编著

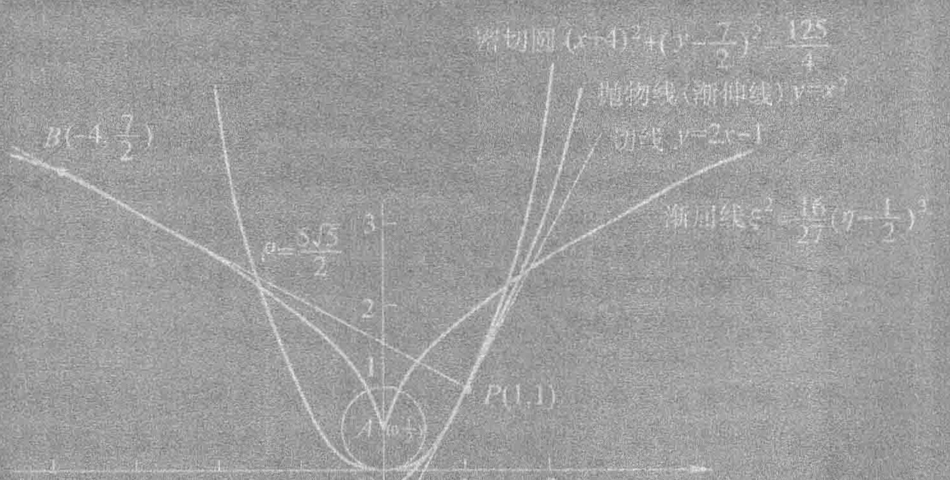


江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

微积分中的图形解析

WEIJIFEN ZHONG DE TUXING JIEXI

李光久　钟瑜荪　编　著



江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

图书在版编目(CIP)数据

微积分中的图形解析 / 李光久,钟瑜苏编著. —镇江:江苏大学出版社,2016.5
ISBN 978-7-5684-0206-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①李… ②钟… Ⅲ.①微积分 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 107575 号

微积分中的图形解析

编　　著/李光久　钟瑜苏
责任编辑/吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编:212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/虎彩印艺股份有限公司
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/718mm×1 000 mm　1/16
印　　张/10
字　　数/169 千字
版　　次/2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-5684-0206-4
定　　价/30.00 元

前　言

你知道正弦曲线 $y=f(x)=\sin x$ 的图形，但是，你知道曲线 $y=|f(x)|=|\sin x|$，曲线 $y=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\sin x}$ 及曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sin\dfrac{1}{x}$ 的图形是什么形态吗？你知道圆的内部有一条曲线，该曲线居然以圆为渐近线吗？你知道普吕克曲面吗？你知道马鞍形曲面，但是，你知道猴鞍形曲面吗？微积分中，在我们熟知的基本初等函数的图形的基础上，通过变换和复合可以生成许多形态各异的曲线. 微积分中，一个二元函数 $z=f(x,y)$ 的空间图形是一个曲面，要能直观地认识一个曲面的空间形态，需通过曲面在 xOy 平面上的投影形成的曲面图（地形图）去解决这个问题. 上面提到的马鞍形曲面与猴鞍形曲面都是鞍子，因此两个曲面具有共性；但马鞍是给人骑的，而猴鞍是给猴骑的，猴比人多一条尾巴，得有地方放置，因此两个曲面又具有差异性. 微积分中，平面曲线与空间曲面的形态可以帮助我们直观地认识和理解微积分的基本概念和基本理论. 这些就是我们编写这本书的初衷.

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学，我们从小学、中学到大学，学习数学是从研究不变的量和直线与平面的图形开始，逐步提升到研究量与量之间的制约关系和量的动态变化及曲线曲面图形的. 微积分中，提到函数极限，就会联想到函数图形曲线（面）上动点的动态趋向；提到函数导数（微分），就会联想到函数图形曲线上的微分三角形，以及微分三角形上的 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}s$，由于 $\mathrm{d}x(=\Delta x)$ 的变化（趋于 0），$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}$ 产生函数在一点处的导数与弧微分的概念. 形与数在数学的学习研究中总是紧密联系在一起的. 而且从几何直观导向分析推理，也是数学思维的一种重要方法. 但是在以往微积分的教与学的过程中存在一个误区：大家关注的重点集中在一些抽象概念（定义）和理论（定理）上而忽视直观图形的作用. 本书收集了众多的图形实例，目的在于在抽象的概念、理论和直观图形之间架起一座桥梁，让两者实现紧密的互通，使得学习微积分能达到事半功倍的效果.

本书取材于苏联、德国、美国、日本和我国的知名的微积分教科书(详见书后参考书目).不同年代、不同国别的微积分教科书为本书的编著提供了丰富的素材和广阔的视野.编者紧扣本书突出图形的重点,对收集的素材进行剪裁和编排,至于编者自己的见解和一点点创新,只能让读者给予评说.

书稿虽然经历数载编写和修改,不足与疏漏之处恐难避免,为了加强编者与读者之间的互动交流,特留下编者 E-mail 地址:lgj@ujs.edu.cn.

敬祈读者不吝赐教.

编　者

2016 年 3 月

目　录

1 函 数

1.1 线性函数

线性(一次)函数 $y=f(x)=kx+b$ 的图形是一条直线，其中 k 表示直线的斜率，即 $k=\tan\varphi$(φ 称为直线的倾角)；b 表示直线的截距，即直线与 y 轴交点 A 的纵坐标，如图 1-1 所示.

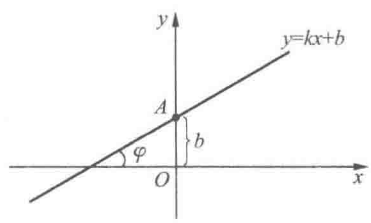


图 1-1

函数 $y=f(x)=kx+b$ 又称为直线的斜截式方程. 斜截式方程是直线的一种显函数表示方式. 直线方程还有如表 1-1 所列的多种隐函数表示方式. 表 1-1 中给出不同形式的方程表示直线的斜率 k 和截距 b.

表 1-1 多种隐函数表示方式

方程名称	方程形式	直线斜率	直线截距
两点式①	$\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$	$k=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	$b=\dfrac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}$
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	k 已知	$b=y_0-kx_0$
一般式②	$Ax+By+C=0$	$k=-\dfrac{A}{B}$	$b=-\dfrac{C}{B}$
参数式	$\begin{cases}x=at+b\\y=ct+d\end{cases}$	$k=\dfrac{c}{a}$	$b=d-\dfrac{bc}{a}$

注①：如果已知两点 $M(x_0,y_0)$，$N(x_1,y_1)$的横坐标相等 $x_0=x_1$，即两点 M,N 处于同一铅垂线上，此时斜率 $k=\infty$，倾角 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，截距 b 不存在，直线方程为 $x=x_0$.

注②：如果 $B=0$，此时直线斜率 $k=\infty$，倾角 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，截距不存在，直线方程为 $x=-\dfrac{C}{A}$.

综上所述，只有两点式与一般式直线方程，可以表示一条垂直于 x 轴的直线.

1.2 函数 $y=f(x)$ 图形的左右平移

已知函数 $y=f(x)$ 的图形，那么，当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x+a)$ 图形是 $y=f(x)$ 图形向左平移 a 个单位；当 $a<0$ 时，函数 $y=f(x+a)$ 图形是 $y=f(x)$ 图形向右平移 $|a|$ 个单位.

例 已知高斯(Gauss)曲线(如图 1-2 中虚线所示)，作函数 $y=e^{-(x-2)^2}$ 的图形，如图 1-2 所示.

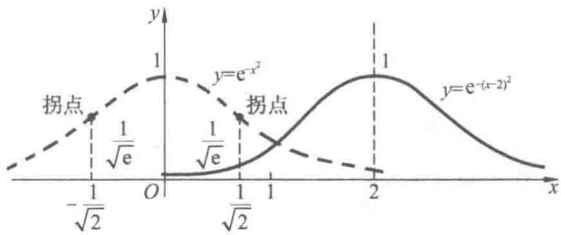


图 1-2

注释

1. 如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为 (c,d)，那么，函数 $y=f(x+a)$ 的定义域为 $(c+a,d+a)$.

2. 如果函数 $y=f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，那么，函数 $y=f(x+a)$ 也是以 l 为周期的周期函数.

1.3 函数 $y=f(x)$ 图形的上下移动

已知函数 $y=f(x)$ 的图形，那么，当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)+a$ 的图形是 $y=f(x)$ 图形向上移动 a 个单位；当 $a<0$ 时，函数 $y=f(x)+a$ 的图形是 $y=f(x)$ 图形向下移动 $|a|$ 个单位.

例 试作 $y=x^2-6x+7$ 的图形.

因为 $y=x^2-6x+7$ 是二次函数，其图形应该是抛物线. 由于

$$y=x^2-6x+7=(x-3)^2-2,$$

其图形应该是抛物线 $y=x^2$ 向右移 3 个单位，再向下移动 2 个单位就可以产生，如图 1-3 中实线所示.

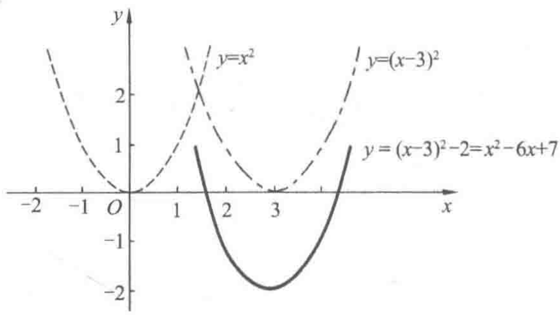


图 1-3

1.4 函数 $y=f(x)$图形的压缩、拉伸变换

已知函数 $y=f(x)$ 的图形，那么，当 $k>1$ 时，$y=f(kx)$ 的图形是 $y=f(x)$图形的压缩变换；当 $0<k<1$ 时，$y=f(kx)$的图形是 $y=f(x)$图形的拉伸变换.

例 试作 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图形.

图 1-4 中，虚线所示曲线为正弦曲线 $y=\sin x$ 图形，点划线所示曲线为 $y=\sin 2x$，点划线所示曲线是虚线所示正弦曲线压缩产生的. 实线所示曲线为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图形，即 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$的图形是点划线所示曲线向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位产生的.

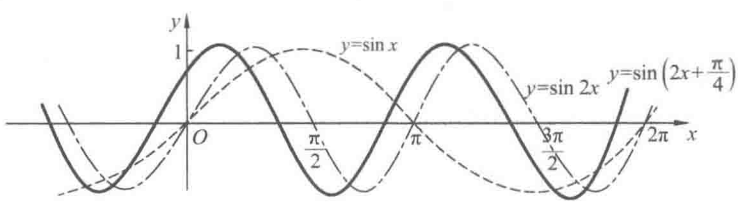


图 1-4

注释

1. 如果 $y=f(x)$是奇(或偶)函数，那么，$y=f(kx)$仍然是奇(或偶)函数.

2. 如果 $y=f(x)$是以 l 为周期的周期函数，那么，$y=f(kx)$是以$\frac{l}{k}$为

周期的周期函数.

3. 函数 $y=f(ax+b)$ 的图形是 $y=f(x)$ 的图形经压缩($a>1$)或拉伸($0<a<1$)后,再向左平移($b>0$)或向右平移($b<0$) $\left|\frac{b}{a}\right|$ 个单位而产生.

1.5 已知函数 $y=f(x)$ 的图形,试作函数 $y=|f(x)|$ 的图形

因为

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\geqslant 0, \\ -f(x), & f(x)<0, \end{cases}$$

所以,对于 $y=f(x)$ 位于 x 轴上方的图形,$y=|f(x)|$ 的图形与其保持一致;对于 $y=f(x)$ 位于 x 轴下方的图形,$y=|f(x)|$ 的图形是其绕 x 轴翻转.

例 1 设函数

$$y=f(x)=\arctan(\tan x), \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

首先在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上考虑,有

$$\tan y=\tan x, \quad -\frac{\pi}{2}<x,\ y<\frac{\pi}{2},$$

也就是说,对于 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$,有 $y=x$.

因为 $y=\arctan(\tan x)$ 是以 π 为周期的周期函数,所以将 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的直线 $y=x$ 沿 x 轴的正负方向,每隔 π 长度平行移动,就可产生函数 $y=f(x)$ 的整个图形,如图 1-5(a)所示. 那么,$y=|f(x)|$ 的图形如图 1-5(b)所示.

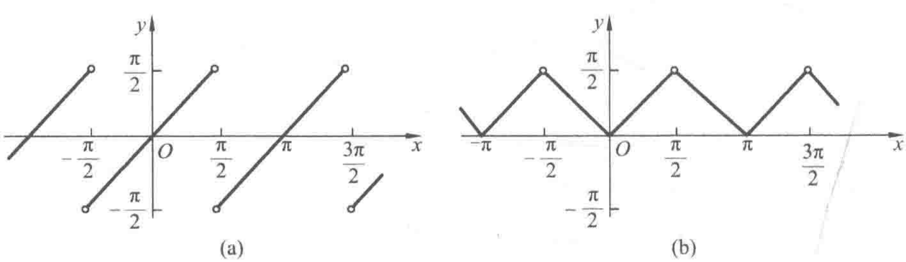


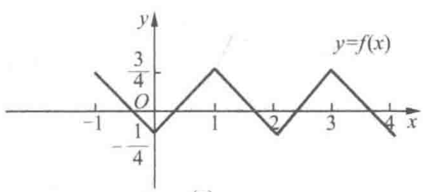
图 1-5

例 2 设

$$y=f(x)=\begin{cases}(x)-\dfrac{1}{4},\ 2k\leqslant x<2k+1, \\ \dfrac{3}{4}-(x),\ 2k+1\leqslant x<2k+2,\end{cases}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

其中，(x) 为 x 的小数部分.

$y=f(x)$的图形，如图 1-6(a)所示，那么，$y=|f(x)|$的图形，如图 1-6(b)所示.



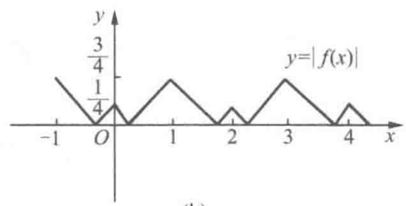


图 1-6

注释

1. 如果 $y=f(x)$是周期函数，那么 $y=|f(x)|$也是周期函数.

2. 如果 $y=f(x)$是偶函数，图形对称于 y 轴，那么 $y=|f(x)|$仍然是偶函数，图形仍然对称于 y 轴.

3. 如果 $y=f(x)$是奇函数，图形对称于原点，那么 $y=|f(x)|$却是偶函数，图形对称于 y 轴.

例如：$y=x$ 是奇函数，$y=|x|$却是偶函数.

1.6 已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$的图形，试作函数 $y=F(x)=f(x)\pm g(x)$的图形

函数 $y=F(x)=f(x)+g(x)$的图形称为函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图形的叠加. $f(x)$与 $g(x)$的图形叠加可以生成较复杂的 $F(x)$的图形. 叠加方法是：已知 $y=f(x)$图形上的点(x_0,y_1)和 $y=g(x)$图形上的点(x_0,y_2)，那么叠加生成函数 $y=F(x)$图形对应点坐标就是$(x_0,y_1\pm y_2)$，逐点连线就能够生成 $y=F(x)$的图形.

例 1 已知直线 $y=x$ 与上半部双曲线 $y=\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$的图形，试作

$y=x+\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$的图形.

直线 $y=x$ 的图形很容易绘出，如图 1-7 中虚线所示. 上半部双曲线 $y=\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$也容易绘出，如图 1-7 中点划线所示. 逐点 x_0 将直线与双曲线纵坐标 y_1 和 y_2 相加(代数和)，连线就生成 $y=x+\sqrt{x^2-a^2}$的图形，如图 1-7 中实线所示.

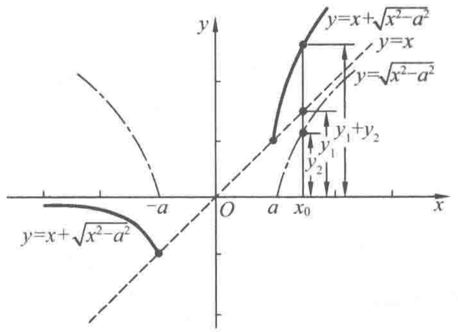


图 1-7

注释

1. 如果函数 $y=f(x)$的定义域为 I_1，函数 $y=g(x)$的定义域为 I_2，那么叠加生成的函数 $y=F(x)=f(x)+g(x)$的定义域应为 $I_1\cap I_2$. 上例中，$y=x$ 的定义域为 $I_1=(-\infty,+\infty)$，$y=\sqrt{x^2-a^2}$的定义域为 $I_2=(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$，因此 $y=x+\sqrt{x^2-a^2}$的定义域为 $I_1\cap I_2=(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$.

2. 如果 $y=f(x)$与 $y=g(x)$同为偶(或奇)函数，那么叠加生成的 $y=F(x)=f(x)+g(x)$仍为偶(或奇)函数. 上例中，$y=x$ 是奇函数，而 $y=\sqrt{x^2-a^2}$却是偶函数，结果 $y=x+\sqrt{x^2-a^2}$既不是偶函数也不是奇函数.

3. 如果 $y=f(x)$是以 l 为周期的周期函数，而 $y=g(x)$是以 r 为周期的周期函数，且 $l=kr$(k 为正整数)，那么叠加生成的函数 $y=F(x)=f(x)+g(x)$是以 l 为周期的周期函数. 例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 均是以 2π 为周期的周期函数，叠加生成的函数 $y=\sin x+\cos x$ 仍是以 2π 为周期的周期函数.

4. 一个有趣的现象：上例中，$y=x+\sqrt{x^2-a^2}$的左半支以 $y=0$ 为水平渐近线，而右半支却以 $y=2x$ 为渐近线. 其中缘由见 2.3 节斜渐近线的生成.

例 2 已知函数 $y=f(x)=\sqrt{x+1}$(上支横卧抛物线)与函数 $y=g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$(余弦曲线)的图形,试作函数 $y=F(x)=\sqrt{x+1}-2\cos\frac{\pi}{2}x$ 的图形.

函数 $y=f(x)=\sqrt{x+1}$的图形如图 1-8 中虚线所示,函数 $y=g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$ 的图形如图 1-8 中点划线所示. 那么函数 $y=F(x)=\sqrt{x+1}-2\cos\frac{\pi}{2}x$的图形就是由上述两个图形的逐点纵坐标 y_1 和 y_2 相减,连线生成,如图 1-8 中实线所示.

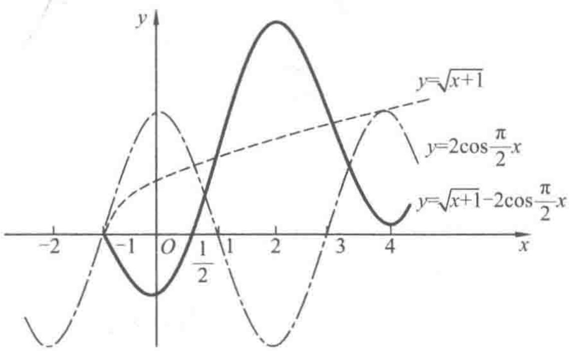


图 1-8

注释

1. $y=f(x)=\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $I_1=[-1,+\infty)$, $y=g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}x$的定义域为 $I_2=(-\infty,+\infty)$,因此, $y=F(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+1}-2\cos\frac{\pi}{2}x$ 的定义域为 $I=I_1\cap I_2=[-1,+\infty)$.

2. 从 $y=F(x)=\sqrt{x+1}-2\cos\frac{\pi}{2}x$ 的图形可以看到,方程 $\sqrt{x+1}-2\cos\frac{\pi}{2}x=0$ 有两个实根: $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$.

1.7 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，试作函数 $y=f\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 的图形

首先来研究一下 x 到 $\dfrac{1}{x}$ 倒数反转映射 F：$-\infty$ 到 $\dfrac{1}{-\infty}=0$，-1 到 $\dfrac{1}{-1}=-1$，有

$$F:(-\infty,-1)\to(-1,0).$$

同样地，有

$$F:(0,1)\to(1,+\infty).$$

其逆映射有

$$F^{-1}:(-1,0)\to(-\infty,-1),$$
$$F^{-1}:(1,+\infty)\to(0,1).$$

例 1 已知 $y=f(x)=x$ 的图形（过原点、倾角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线），试作

$$y=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$$

的图形. 显然，$y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$ 是双曲线. 倒数反转变换的图形关系，如图 1-9 所示.

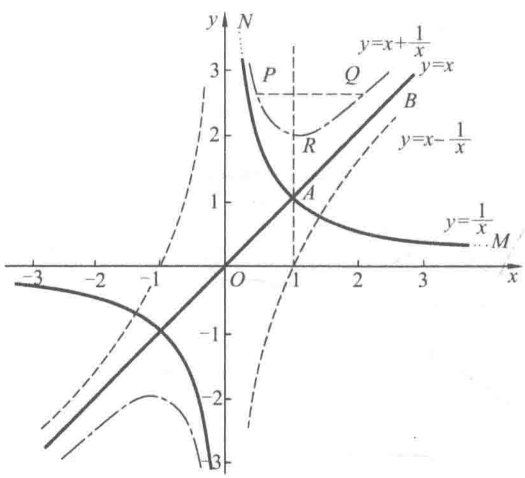


图 1-9

注意到，通过倒数反转变换，直线 $y=x$ 在第一象限内的线段 OA，变换为双曲线上 $y=\dfrac{1}{x}$ 无限弧线 $\overset{\frown}{AM}$，原点 O 变换为无限远点 M，点 A 变换为点 A.