普通高等教育“十三五”规划教材
应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

大学数学（经济管理类）I

高等数学（下册）

主编　张亚东　陈学勇

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

大学数学（经济管理类） I

高等数学

(下册)

主　编　张亚东　陈学勇
副主编　张　鼎　王惠婷

科学出版社
北　京

内容简介

本书是在地方本科高校转型发展的背景下,根据培养合格高素质应用型人才目标,采用模块化教学的方式编写的经济管理类大学数学教材. 本书是高等数学部分,分上、下两册. 本册为下册,共18个模块,分别为多元函数的基本概念、多元函数的偏导数、全微分、多元函数求导法则、多元函数的极值及其应用、二重积分的概念与性质、二重积分的计算、常数项级数、幂级数与泰勒级数、函数的幂级数展开式的应用、微分方程的基本概念、一阶微分方程、高阶线性微分方程、微分方程的应用、差分方程的基本概念、一阶常系数线性差分方程的解法、二阶常系数线性差分方程、差分方程在经济学中的应用.

本书可供地方应用型本科院校经济、管理类专业的学生使用,也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学:经济管理类. Ⅰ,高等数学:全2册/张亚东等主编. —北京:科学出版社, 2016.9
普通高等教育"十三五"规划教材
应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材
ISBN 978-7-03-049680-5
Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O1②O13
中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第203158号

责任编辑:张中兴 胡海霞/责任校对:邹慧卿
责任印制:白 洋/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2016年9月第一次印刷 印张:39
字数:973 000
定价:95.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书序言

Preface to the series

本系列教材是参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求, 结合编者多年来教学实践中的经验和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成的, 其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括:《高等数学 (理工类)(上、下册)》《线性代数 (理工类)》《概率论与数理统计 (理工类)》《高等数学 (文科类)》《大学数学 (经济管理类)(Ⅰ高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》.

我们知道, 高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程, 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业, 而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前, 关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多, 这类教材主要以经典数学的理论为基础, 讲述其理论、方法与例题分析, 目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是, 这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的, 这对于非数学类专业学生学习数学课程不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外, 这类教材几乎通用于所有的非数学类专业, 而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此, 本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术, 特别是信息技术发展相适应, 强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化, 将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块, 不同的专业可根据本专业培养方案的要求, 从中选取相应的模块, 使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象, 根据各个学科专业的特点, 针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题, 以突出教学内容的应用性, 使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性, 能广泛适用于非数学类各专业的学生, 可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出, 易教易学, 突出重点, 强调案例式教学方法.

当然, 上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷, 本系列教材距这样的目标还有一

定的距离.

由于编者水平有限, 系列教材中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

丛书编委会

2016 年 6 月

前　　言

Preface

为了培养合格的高素质应用型人才, 结合多年来教学实践中的经验和应用型人才模式的探讨, 采用模块化教学的方式编写大学数学 (经济、管理类) 教材, 其目的是为应用型本科院校经济、管理类专业学生提供一本比较适合的教材或学习参考书. 本册是高等数学部分.

高等数学是经济、管理类各专业的一门重要基础课程, 该门课程不仅为后续课程提供必备的数学工具, 而且是培养经济、管理类大学生数学素养和理性思维能力的重要途径. 本书力求体现经济、管理专业的特点，培养学生的数学思维能力, 如归纳能力、演绎能力、建模能力, 为以后经济分析奠定基础.

本书的特色主要体现在以下六个方面:

(1) 在保证知识的科学性、系统性和严密性的基础上, 分模块编写;

(2) 注重实用型案例, 根据应用型高等学校学生的特征, 举例具有时代性和吸引力, 突出实用, 通俗易懂;

(3) 简化理论推演, 强调实际应用. 让学生能够直观感受所学知识的作用, 获得运用数学知识解决实际问题的技能;

(4) 加强知识的拓广, 利用数学软件和计算机技术解决复杂问题, 增强其 "做数学" 的意识和能力;

(5) 强化经济与管理中的数学模型, 提高学生的数学素养;

(6) 课后习题具有巩固数学基础, 同时和实际问题相结合的特点.

高等数学部分分为上、下两册. 下册共 18 个模块, 内容包括: 多元函数的基本概念, 多元函数的偏导数, 全微分, 多元函数求导法则, 多元函数的极值及其应用, 二重积分的概念与性质, 二重积分的计算, 常数项级数, 幂级数与泰勒级数, 函数的幂级数展开式的应用, 微分方程的基本概念, 一阶微分方程, 高阶线性微分方程, 微分方程的应用, 差分方程的基本概念, 一阶常系数线性差分方程的解法, 二阶常系数线性差分方程, 差分方程在经济学中的应用.

本书模块 1—5 初稿由张鼎执笔, 模块 6—10 初稿由王惠婷执笔, 模块 11—14 初稿由陈学勇执笔, 模块 15—18 初稿由张亚东执笔. 张亚东负责全书的统稿和定稿.

由于时间仓促, 加之编者水平有限, 书中缺点和错误在所难免, 恳请广大同行、读者批评指正.

编 者

2016 年 6 月

目　录

Contents

模块1
多元函数的基本概念

一、 区域

一元函数的定义域一般是一个区间 (开区间、闭区间或半开半闭区间). 而对于多元函数的讨论, 需要把一元函数的邻域和区间等概念加以推广.

1. 邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $U(\,P_0,\ \delta\,)$, 即

$$U(\,P_0,\ \delta\,) = \left\{(x, y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$

在几何上, $U(\,P_0,\ \delta\,)$ 就是 xOy 平面上以 P_0 为中心, δ 为半径的圆的内部点 $P(x, y)$ 的全体.

若在 $U(\,P_0,\ \delta\,)$ 中去掉中心 P_0, 则该点集称为点 P_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\mathring{U}(P_0, \delta)$, 即

$$\mathring{U}(P_0, \delta) = \left\{(x, y)\middle|0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}.$$

如果不需要强调邻域的半径, 通常就用 $U(P_0)$ 或 $\mathring{U}(P_0)$ 分别表示点 P_0 的某个邻域或某个去心邻域.

2. 内点、边界点和聚点

设 E 是平面上的一个点集, 点 $P \in E$. 如果存在 P 的一个邻域 $U(P, \delta)$, 使 $U(P, \delta) \subset E$, 则称 P 为 E 的**内点**(图 1-1). 如果点 P 的任何一个邻域内既有属于 E 的点又有不属于 E 的点, 则称 P 为 E 的**边界点**(图 1-2). E 的边界点的全体, 称为 E 的**边界**, 记作 ∂E. 如果对于任意给定的 $\delta > 0$, P 的去心邻域 $\mathring{U}(P, \delta)$ 中总有 E 中的点 (P 本身可以属于 E, 也可以不属于 E), 则称 P 是 E 的**聚点**.

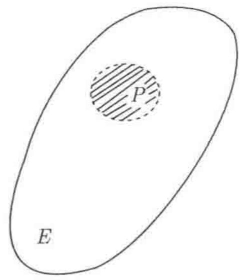

图 1-1

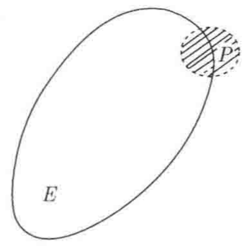

图 1-2

3. 开集与闭集

如果点集 E 上每一个点都是内点, 则称 E 为开集; 如果 E 的余集 E^C 是开集, 则称 E 是闭集.

4. 开区域与闭区域

设 E 是平面上的一个点集, 如果对于 E 内的任意两点, 都可以用折线连接起来, 且该折线上的点都属于 E, 则称 E 是连通的.

连通的开集称为区域或开区域. 开区域连同它的边界一起称为闭区域. 例如, $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 是开区域, 而 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭区域.

5. 有界集与无界集

如果存在正数 K, 使某集合 E 包含于以原点为中心, 以 K 为半径的圆内, 则称 E 是有界集. 否则为无界集.

二、 多元函数的概念

客观事物往往是由多种因素确定的. 例如, 圆柱体的体积 V 与底半径 r 及高度 h 有关, 所以 V 是两个变量 r 和 h 的函数, 若将这两个变量排个序, 那么 V 就是二元有序实数组 $(r,\ h)$ 的函数. 这种依赖于两个或者更多个变量的函数, 就是多元函数.

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集, 从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一个 n 元函数, 记作

$$f: D\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

或

$$y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{x}\in D,$$

其中, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量, y 为因变量, D 称为函数的定义域. $f(D)=\{f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

例 1　求函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解　当 $x+y>0$ 时, 函数 z 有意义, 所以函数的定义域为

$$D=\{(x,y)|x+y>0\}.$$

如图 1-3 所示.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域是 xOy 坐标面上的一个点集 D, 对于 D 上每一点 $P(x,y)$, 对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样, 在空间直角坐标系下, 以 x 为横坐标, y 为纵坐标, $z=f(x,y)$ 为竖坐标, 在空间就确定了一个点 $M(x,y,z)$. 当点 $P(x,y)$ 在 D 上变动时, 点 $M(x,y,z)$ 就相应地在空间变动, 一般说来, 它的轨迹是一个曲面, 这个曲面就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形 (图 1-4).

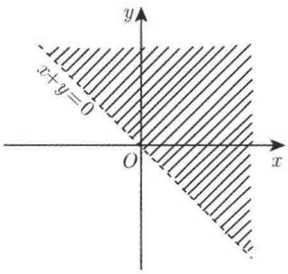

图 1-3

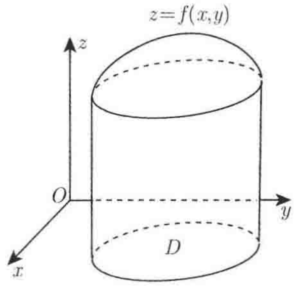

图 1-4

例 2　函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是以原点为球心, 以 1 为半径的上半球面.

我们重点讨论二元函数. 由二元函数所得出的结论很多都可以推广到多元函数.

三、 多元函数的极限

定义 2　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内有定义, $P(x,y)$ 是 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内的任意一点. 如果存在一个确定的常数 A, 点 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数 $f(x,y)$ 都无限地趋近于 A, 则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ $((x,y)\to(x_0,y_0))$ 时的极限. 记作

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A \quad \text{或} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

二元函数极限的 “ε-δ” 定义如下.

定义 2′　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内有定义, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 使得对于适合不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$ 都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ $((x,y)\to(x_0,y_0))$ 时的极限.

需要特别注意的是:

(1) 二元函数的极限存在, 是指点 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数都无限趋近于同一常数 A.

(2) 如果点 $P(x,y)$ 以一种特殊方式, 例如沿某一条直线或定曲线趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 即使函数无限趋近于某一确定的值, 我们也不能断定函数的极限存在.

(3) 如果当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数趋向于不同的数值, 则可断定函数的极限不存在.

仿此可以定义 n 元函数的极限.

例 3　设二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 讨论当 $P(x,y)\to(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限是否存在.

解　当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=\lambda x$ 趋于原点 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\lambda x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\lambda x^2}{x^2+(\lambda x)^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2},$$

可见, 当 $P(x,y)$ 沿直线 $y=\lambda x$ 趋于原点 $(0,\ 0)$ 时, 函数 $f(x,y)$ 的变化趋势与 λ 有关, 它随着 λ 的变化而变化, 所以当 $P(x,\ y)\to(0,\ 0)$ 时 $f(x,y)$ 的极限不存在.

多元函数极限的定义与一元函数极限的定义有着完全相同的形式, 因而有关一元函数的极限运算法则都可以平行地推广到多元函数上来 (洛必达法则及单调有界法则除外).

例 4　计算下列函数的极限.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1}{x+y}$;　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{xy}$.

解　(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1}{x+y}=\frac{1}{0+1}=1$;

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}x=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}x=1\cdot 0=0.$

四、 多元函数的连续性

有了多元函数极限的概念, 就可以定义多元函数的连续性.

定义 3　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(\ P_0,\ \delta\ )$ 内有定义, 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 则称它在区域 D 上连续.

函数的不连续点称为函数的间断点, 例如, $f(x,y)=\dfrac{1}{y-x^2}$ 在抛物线 $y=x^2$ 上无定义, 所以抛物线 $y=x^2$ 上的点都是函数 $f(x,y)$ 的间断点.

仿此可以定义 n 元函数的连续性和间断点.

和一元函数一样, 利用多元函数的极限运算法则可以证明, 多元连续函数的和、差、积、商 (在分母不为零处) 仍是连续函数, 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

多元连续函数有着与一元连续函数类似的性质.

性质 1　有界闭区域 D 上的多元连续函数在 D 上一定存在最大值和最小值.

性质 2　有界闭区域 D 上的多元连续函数在 D 上有界.

性质 3　有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

习　题　1

1. 求下列各函数表达式.

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$, 求 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$;

(2) $f(x,y)=x^3-2xy+3y^2$, 求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

2. 求下列函数的定义域, 并绘出定义域的图形.

(1) $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$;

(2) $z=\ln(x-2y+1)$;

(3) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$;

(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\left(\dfrac{\sin(xy)}{x}+(x+y)^2\right)$.

4. 求下列函数的间断点.

(1) $f(x,y)=\dfrac{y^2+2x}{y^2-x}$;

(2) $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$.

模块2
多元函数的偏导数

一、 偏导数的概念及其计算方法

大家知道, 一元函数的导数定义为函数增量与自变量增量的比值的极限, 它刻画了函数对于自变量的变化率. 对于多元函数来说, 由于自变量个数的增多, 函数关系就更为复杂, 但是我们仍然可以考虑函数对于某一个自变量的变化率, 也就是在其中一个自变量发生变化, 而其余自变量都保持不变的情形下, 考虑函数对于该自变量的变化率. 例如在经济学中, 某商品的销售量 Q 与该商品的广告费支出 S 及该商品的定价 P 有关. 为了研究这种联系, 我们可以观察在广告费支出 S 一定的前提下销售量 Q 对定价 P 的变化率. 多元函数对于某一个自变量的变化率引出了多元函数偏导数的概念.

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U(\ P_0,\ \delta\ )$ 内有定义, 当 y 固定在 y_0, x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应地函数有偏增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数. 记为

$$z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f'_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},$$

即

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

同理, 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 y 的偏导数定义为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

也记为

$$z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad f'_y(x_0,y_0),\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内的每一点 $P(x,y)$ 处都存在偏导数 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, 则这两个偏导数仍是区域 D 上的函数, 我们称它们为函数 $z=f(x,y)$ 的偏导函数 (简称偏导

数). 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, f'_x(x,y); \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y, f'_y(x,y).$$

这里

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

且

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}; \quad f'_y(x_0,y_0) = f'_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}.$$

二元以上的多元函数的偏导数可类似定义.

由偏导数的定义可知, 求多元函数对某个自变量的偏导数时, 只需将其余自变量看作常数, 用一元函数求导法则求导即可.

例 1　求 $f(x,y) = x^2y + y^3$ 在点 (1, 2) 处的偏导数.

解　把 y 看作常数, 对 x 求导得 $f'_x(x,y) = 2xy$;
把 x 看作常数, 对 y 求导得 $f'_y(x,y) = x^2 + 3y^2$. 再把点 (1, 2) 代入得

$$f'_x(1,2) = 4, \quad f'_y(1,2) = 13.$$

例 2　求 $z = x^y$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　把 y 看作常数, 对 x 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$;

把 x 看作常数, 对 y 求导得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$.

偏导数的概念容易推广到三元及三元以上的函数中去. 例如, 三元函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数就是

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x},$$

而计算 $f(x,y,z)$ 对 x 的偏导数时, 只需视 y, z 为常数, 对 x 用一元函数求导方法即可.

例 3　已知一定量理想气体的状态方程为 $PV = RT$(R 为常数), 证明

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

证明　因为

$$P = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2},$$
$$V = \frac{RT}{P}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P},$$
$$T = \frac{PV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{P} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{PV} = -1.$$

例 3 表明, 用作偏导数记号的 $\dfrac{\partial P}{\partial V}, \dfrac{\partial V}{\partial T}, \dfrac{\partial T}{\partial P}$ 应当作整体记号来对待, 不能看作分子与分母之商.

二、 偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点, 过 M_0 作平面 $y = y_0$ 截此曲面得一曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0, \end{cases}$ 由于二元函数 $z = f(x, y)$ 在 M_0 处的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数, 所以它在几何上表示曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 关于 x 轴的斜率 (图 2-1).

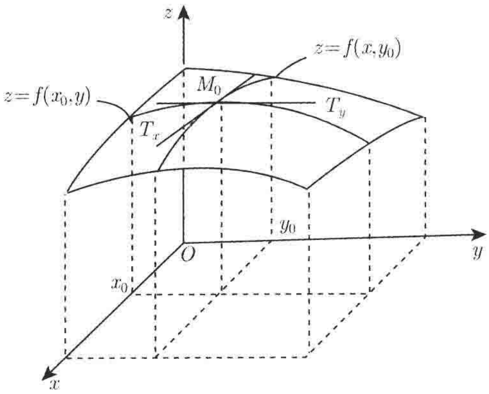

图 2-1

同理, 偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 的几何意义是曲面 $z = f(x, y)$ 被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在 M_0 处的切线 M_0T_y 关于 y 轴的斜率.

我们知道, 一元函数在某点可导, 则它在该点必连续. 但对于二元函数来说, 即使它在某点的偏导数都存在, 也不能保证它在该点连续.

例 4　设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

其在原点 (0,0) 处的偏导数为

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

即这个函数在点 (0, 0) 的两个偏导数都存在, 但由模块 1 例 3 知, 该函数在点 (0, 0) 的极限不存在. 因此, 这个函数在点 (0, 0) 处不连续.

三、 高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上具有偏导数 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$, 一般来说, 它们仍是 x, y 的函数. 如果这两个偏导数又存在对 x, y 的偏导数, 则称这两个偏导数的偏导数为二阶偏导数. 显然, 二元函数的二阶偏导数有如下四种情形:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y),$$

其中, $f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ 称为二阶混合偏导数.

$f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 称为一阶偏导数, 二阶以及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.

更高阶的偏导数也可类似定义, 如

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \cdots.$$

例 5　求 $z = x\ln(x + y)$ 的二阶偏导数.