



統計學

S T A T I S T I C S

數 字 生 活 · 統 計 人 生

李 卓 偉 著

智勝
BEST-WISE

統計學（上）

STATISTICS

李卓偉 著

統計學

STATISTICS

國家圖書館出版品預行編目資料

統計學=Statistics / 李卓偉著.— 四版.-

-臺北市：智勝文化, 2003-〔民 92〕

冊； 公分

參考書目：面

含索引

ISBN 957-729-363-8 (上冊：平裝)

1. 統計學

510

92010997

作 者/李卓偉
發行人/紀秋鳳
出版/智勝文化事業有限公司
地址/台北市 100 館前路 26 號 6 樓
電話/(02)2388-6368
傳真/(02)2388-0877
郵撥/16957009 智勝文化事業有限公司
登記證/局版臺業字第 5177 號
總經銷/知識達圖書發行有限公司
傳真/(02)2312-2288
出版日期/2003 年 7 月四版
定價/420 元
ISBN 957-729-363-8



STATISTICS

By Chuo-Wei Lee

Copyright 2003 by Chuo-Wei Lee

Published by BestWise Co., Ltd

智勝網址:www.bestwise.com.tw

本書之文字、圖形、設計均係著作權所有，若有抄襲、模仿、冒用情事，依法追究。

如有缺頁、破損、裝訂錯誤，請寄回本公司調換。

序 言

當您隨手翻閱本書時，如果您是一位有心者，您應該會先看本頁，再詳讀每一章的第一節。那麼，您將會發現，每一章第一節的概論，其實也是該章的結論，因為它已透過架構表將整章的重點完整地展示與說明。如果您也修過統計學，您會很雀躍，因為它也點出該章的動機與前章的關聯，在短短數言中，讓您脈絡分明，見樹更見林。

也許，您很有經驗地，從書末的索引找出幾個您所熟悉的定義名詞，然後查到對應的頁數去加以檢驗時，您會很驚訝，因為很少統計學的書將定義與定理寫的如此嚴謹週延。請先不要誤以為這是一本數理統計學的書，因為您不但可以在該定義或定理的前段文字裏，看到它的來龍去脈，也可以在該定義或定理的後續解說段落中，清楚它們的直覺含義與用途，甚至在符號的使用上，也是前後一致而且易於聯想。

或者，您早已迫不及待地翻閱吸引您的範例的解答，那麼您將輕易地從詳解過程中，體會各種統計方法的應用與計算技巧。如果您也很細心，您更會發現，所有範例的安排都不是隨機的，它們不但用來闡述定義與定理的使用時機，也同時反映統計學在許多領域上的廣泛應用。

如果您有足夠得耐心，看完上面所說的種種，相信您會明白作者下過的苦心！

沒有錯誤，毫無贅言，這些是每一本書的基本要求，卻也很難一蹴可及，誠心期待用心的讀者不吝來函批評指正。

李卓偉 June 2003

總 目 錄

上 冊

第 一 章： 概 論

第 二 章： 敘述統計

第 三 章： 古典機率

第 四 章： 現代機率

第 五 章： 抽樣方法與抽樣分配

第 六 章： 估計

下 冊

第 七 章： 檢 定

第 八 章： 非參數檢定

第 九 章： 實驗設計與變異數分析

第 十 章： 相關分析與迴歸分析

上 冊 目 錄

第一章：概論..... 1-1~1-11

§1-1 何謂統計學.....	1-1
§1-2 變數與常數.....	1-2
§1-3 測量尺度與資料型態.....	1-2~1-3
§1-4 統計資料.....	1-4
§1-5 統計資料的搜集.....	1-4~1-5
§1-6 統計資料的整理.....	1-5~1-6
§1-7 統計資料的陳示.....	1-6~1-7
§1-8 母體與樣本.....	1-8~1-9
§1-9 統計學的分類.....	1-9~1-11

第二章：敘述統計..... 2-1~2-50

§2-1 概論.....	2-1~2-3
§2-2 次數表的編製.....	2-4~2-10
§2-3 次數圖的繪製.....	2-11~2-19
§2-4 集中趨勢量數.....	2-20~2-33
§2-5 差異量數.....	2-34~2-45
§2-6 動差體系.....	2-46~2-50

第三章：古典機率..... 3-1~3-37

§3-1 概論.....	3-1~3-2
§3-2 機率論定義.....	3-3~3-5
§3-3 排列組合.....	3-6~3-11
§3-4 古典機率的基本性質.....	3-12~3-19
§3-5 條件機率與獨立事件.....	3-20~3-37

第四章：現代機率..... 4-1~4-233

§4-1 概論.....	4-1~4-3
§4-2 機率空間與隨機變數.....	4-4~4-15
§4-3 常用離散隨機變數.....	4-16~4-33
§4-4 常用連續隨機變數.....	4-34~4-76
§4-5 期望值與變異數.....	4-77~4-120
§4-6 動差生成函數.....	4-121~4-133
§4-7 多變數隨機變數.....	4-134~4-157
§4-8 相關係數.....	4-158~4-168
§4-9 條件機率密度函數.....	4-169~4-195
§4-10 獨立隨機變數.....	4-196~4-221
§4-11 不等式.....	4-222~4-228
§4-12 大數法則與中央極限定理.....	4-229~4-241

第五章：抽樣方法與抽樣分配..... 5-1~5-48

§5-1 概論.....	5-1~5-3
§5-2 普查.....	5-4~5-7
§5-3 抽樣調查.....	5-8~5-9
§5-4 抽樣方法.....	5-10~5-23
§5-5 抽樣分配.....	5-24~5-42
§5-6 順序統計量.....	5-43~5-48

第六章：估計..... 6-1~6-60

§6-1 概論.....	6-1~6-2
§6-2 點估計.....	6-3~6-31
§6-3 區間估計.....	6-32~6-60

附 錄.....	A-1~A-25
----------	----------

附錄一：隨機數表(亂數表)	A-1~A-2
附錄二：二項分配累積分配表	A-3~A-7
附錄三：卜瓦松分配累積分配表	A-8~A-10
附錄四：標準常態累積分配表	A-11~A-14
附錄五：標準常態分配常用的右尾機率 α ，及所對應的尾點 $z(\alpha)$	A-15
附錄六：t 分配右尾機率的尾點	A-16~A-17
附錄七：卡方分配右尾機率的尾點	A-18~A-20
附錄八：F 分配右尾機率的尾點	A-21~A-25

參考書目	R-1~R-2
------------	---------

索引	I-1~I-14
----------	----------

第一章 概 論

§1.1 何謂統計學

我們可以將自然界所看到的現象，概分為**確定現象(deterministic phenomena)**與**不確定現象(nondeterministic phenomena)**兩大類。所謂確定現象是指在某些狀況已知之下，我們可以確定這現象將會如何演變。例如萬有引力定理告訴我們，如果已知一組描述某一運動場的微分方程式，及一些初值條件與邊界條件，則我們往往可以推知物體在未來任一時刻的運動情形。因此在自然科學中所研究的大都是確定現象，而社會科學所呈現的則大都是不確定現象。所謂不確定現象是指即使環境狀況都已知的情形下，我們仍然無法確定這現象將會如何演變。例如丟一顆骰子，即使我們知道它是一顆公正的骰子，我們仍然無法確定將會出現的點數是幾點。

統計學(Statistics)是一門研究不確定現象的科學方法，經由統計資料的搜集、整理、陳示、分析、及解釋，並透過機率理論建立描述此不確定現象的適當模型，然後從搜集的樣本統計資料推估母體的一些特性，並對這些特性做一些必要的估計、假設檢定與預測，進而利用統計決策理論評估各種決策所冒的風險，以作出最佳的決策。

在我們的生活世界裏，經常要面對無數的不確定現象，統計學正好可以提供我們一個足以信賴的決策參考。而我們又如何從每天所接觸到的令人眼花撩亂的各種數據中，解讀出隱藏在裏頭的有用訊息呢？統計學結合電腦正是目前分析資料的最有力工具。

由於統計學可以應用的範圍非常廣泛，並沒有限定的研究對象與領域，所以有許多學者直接稱呼統計學為統計方法，而把它當作一種應用的工具。配合近年來電腦軟、硬體的迅速發展，無論是自然科學或是社會科學，都可以看到統計方法在其中活躍的程度有增無減。因此，我們可以預期未來將有更多的統計理論與方法產生，而統計學也將成為一門比微積分更被廣泛應用的基礎學科。

§1.2 變數與常數

一般而言，影響一個不確定現象的因素是非常多，例如經濟的景氣、股票的漲跌、消費者的購買行為等現象都很複雜，甚至被多種難以掌握的因素所影響，所以我們往往透過一些特徵來瞭解此不確定現象。為了使研究能夠客觀以及推演方便，我們將這些特徵加以數量化，若數量化的數值會隨著個體不同而改變，那麼這個數量化的特徵就稱為變數(variable)，在社會科學中，常稱作變量，在機率論，則稱之為隨機變數，一般是以大寫的英文字母來代表。相對地，不隨著個體不同而改變的數量化特徵，就稱為常數(constant)。

例如，考慮2003年所有台大碩士一年級新生所構成的母體，則諸如身高(X)、體重(Y)、性別(Z)、血型(U)，入學考試英文成績(V)等等，均是描述此母體特徵的一些變數，因為它們都可以數量化(例如 $Z=1$ 表示男性， $Z=0$ 表示女性)，而且會隨著個體不同而改變但是像此母體的平均身高，平均體重等則是一個固定的常數，而這類描述母體特徵的常數，特別稱為參數(parameter)，或稱為母數。另外，諸如數學上的圓周率，物理學上的光速等，都是一些普通的常數。

§1.3 測量尺度與資料型態

找出重要的變數來研究不確定現象以後，我們接著就要對這些變數加以測量。測量時，除了要注意測量的工具與測量的對象以外，更要區別測量的層次。因為變數經測量後所得到的數值會有不同的數學特性，所以按照它們具有的數學特性的多寡，由低到高可以分為四種測量層次(levels of measurement)：類別、順序、等距、和等比。而不同的測量層次就產生不同的測量尺度(measurement scales)，或稱為測量量表。

類別尺度(nominal scale)，或稱為名義尺度，是最低的層次，因為類別尺度的數字只具有分類的作用而已，其數學性質只有=與≠的關係，不能作加減乘除等運算。例如職業、性別、血型、種族等變數所取得的數值都是類別尺度。

順序尺度(ordinal scale)，或稱為序列尺度，比類別尺度多一個特性，即順序尺度的數字可以表示各類別之間的順序關係，所以除了=與≠的關係以外，還具有>與<的數學關係，但它們仍然不能作加減乘除等運算。例如教育等級，以及滿意程度、喜好程度等心理態度變數所取得的數值都是順序尺度。

等距尺度(interval scale)，或稱為間隔尺度，不但可以表示順序關係，還可以測量各順序位置之間的距離。因此可以作加(+)與減(-)的運算，但等距尺度並沒有**絕對原點(absolute zero)**或**自然原點(natural zero)**，所以等距尺度的數字不能作倍數的解釋。例如溫度、時間等變數所取得的數值都是等距尺度。

等比尺度(ratio scale)，或稱為比尺度，是最高的層次，它除了具有等距尺度的各種特性以外，它還具有絕對原點，因此可以作加減乘除等運算，也能作倍數的解釋。例如身高、體重、銷售金額等變數所取得的數值都是等比尺度。

確定我們所採用的每一個變數的測量層次，才能根據不同的尺度去選擇適當的統計方法，在統計分析後下結論時，也才能避免錯誤的解釋。

變數按照測量層次的不同，分為類別、順序、等距、和等比四種尺度。若依照測量的單位可以無限細分與否，則可分為連續變數與離散變數。所謂**連續變數(continuous variable)**，是指變數的測量單位可以無限細分，例如身高就是屬於連續變數，因為我們說一個人的身高是170公分，實際上，170公分只是一個近似值而已，如果用更精確的儀器去量測，我們可以測到更精確的170.3公分，170.36公分，170.368公分，…，亦即，變數的數值在每兩個測量單位之間(如本例中的公分)，理論上可以有無限多個實數數值在其間。然而**離散變數(discrete variable)**的測量單位卻不能再細分，例如每一戶家庭所擁有的汽車數，只能有0輛，1輛，2輛，3輛，…等離散的數值，而不能得到0.5輛之類的數值，所以每戶家庭所擁有的汽車數是一個離散變數。因為離散變數是由數計而得，所以也稱為**數計變數(enumerate variable)**。

在離散變數中有一種特別的情形，那就是它只有兩種可能的數值，這種變數稱為**二分變數(dichotomous variable)**，例如性別(0表女性，1表男性)，婚姻狀況(0表未婚，1表已婚)等變數。此外，在時間數列中，僅有有限個可能的數值而且只當區別作用的離散變數，稱為**虛擬變數(dummy variable)**。例如季節(1表春季，2表夏季，3表秋季，4表冬季)，戰爭狀況(0表平時，1表戰時)等變數。

測量變數所獲得的**數據資料(data)**，按照上述變數的分類就分成所對應的不同的資料型態(**data type**)。如連續資料、離散資料，類別尺度資料、順序尺度資料、等距尺度資料、等比尺度資料。從事資料分析時，第一件要注意的就是資料是那一種型態，如此才能清楚：那些方法可以應用，那些方法不適用，數據所提供的訊息是到什麼層次？在第八章「非參數檢定」，我們會做進一步的探討。

§1.4 統計資料

統計資料是指對造成某一不確定現象的母體，在某個特定的時間及空間，按照母體內個體的某些特性(亦即上節所述的變數)，經由測量(數計或量測)所獲得的資料。

個體(individual)泛指能自成一個單位的人、事或物，而個體的大小則隨著研究者的目的而定。例如工商服務業普查時，每一家公司是一個個體；戶口及住宅普查時，每一戶是一個個體；調查國民平均所得時，則每一個國民是一個個體。將具有某些共同特性的若干個體集合在一起，就構成所謂的**母體(population)**，或稱**群體**，其大小則隨著共同特性的多寡而定。例如研究2003年2月7日至2003年6月30日的台灣證券市場加權指數日線圖，則此段時間內每一個交易日的指數都是一個個體，而此段時間內所有交易日的指數即構成一個母體。但是如果研究的是週指數，則每個交易週的週指數才是一個個體。因此所謂的母體與個體只不過是一種相對的概念，亦即，研究者對其研究對象所劃定的範圍就構成一個母體，而個體就是此範圍內所採用的基本單位。

由上述的定義與說明可以看出，一組統計資料包含了三個要素：時間、空間、與特性。所以統計資料一定要能明確地指出：(1)時間或時段，(2)空間或地區，(3)特性的名稱與單位，三者均不可或缺。

§1.5 統計資料的搜集

統計資料的分類，主要有下列三種：

1. 依照資料的取得方式是直接或間接而分為**初級資料(primary data)**與**次級資料(secondary data)**。
2. 依照資料所呈現的是否隨時間變動而分為**動態資料(dynamic data)**與**靜態資料(static data)**。
3. 依照資料所包括的範圍是全部或部分而分為**普查資料(census data)**與**抽查資料(sample data)**。

初級資料是由研究者按照其研究目的，直接從資料來源處搜集而來，所以也稱為原始資料或第一手資料，例如配合研究目的去設計問卷所調查而得到的資料。已被整理後出版的資料則稱為次級資料，或間接資料、第二手資料，例如政府部門定期發表的各種統計指標期刊，以及民間研究機構或廣告公司所發表的研究報告等。利用次級資料雖然比較節省人力、財力與時間，但必須留意所引用的初級資料是否合乎我們的研究目的？其中是否有遺漏值(missing value)？如果有遺漏值，是採用那一種補值(imputation)方法？資料是否有地區或時間的限制？資料的搜集過程是否有缺失？

靜態資料只表示現象在某一特定時間與空間所呈現的情況，例如臺灣地區臺灣2002年的國民平均所得。若將靜態資料按照時間的先後排列，就構成動態資料，例如自1981年迄今，臺灣地區每年的外匯存底。

普查資料是對母體中的每一個體均進行調查所獲得的資料，例如戶口及住宅普查資料、工商服務業普查資料。相對地，抽查資料是只對母體中的一部份進行調查所獲得的資料。有關普查與抽查的優缺點與適用時機，在第五章「抽樣方法與抽樣分配」會詳細說明。

搜集統計資料的方法，主要有觀察、登記、調查、和實驗等方法。觀察及調查方法，主要用於搜集原始靜態資料，按照搜集資料的範圍，又可分為普查及抽查兩種。登記方法是常川記錄所需要的統計資料，主要用於搜集原始動態資料。實驗方法則主要用於搜集自然科學的原始資料，但現在也大量應用於市場調查及其他社會科學。

§1.6 統計資料的整理

搜集完統計原始資料後，我們須定出分類的標準，再將資料歸類。

分類標準是依統計資料的要素：時間、空間、特性(又可細分為屬質與屬量兩類)，而將統計資料按照其中的某一要素排成一個數列，構成如下的統計數列：

- | | | | |
|------|---|------------------------------|--|
| 統計數列 | { | 1.時間數列(time series) | |
| | | 2.空間數列(spacial series) | |
| | | 3.屬質數列(series of attributes) | |
| | | 4.變量數列(series of variates) | <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> <div style="font-size: 2em; vertical-align: middle; padding-right: 5px;">{</div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> <div>(1)連續數列(continuous series)</div> <div>(2)離散數列(discrete series)</div> </div> </div> |

歸類的原則有二：周延(**inclusion**)與互斥(**exclusion**)。所謂周延是指每一個資料必歸屬於某一類，不能有例外，例如，敞開組(**open-end class**)的使用就是根據此一原則。互斥是指每一個資料恰只能屬於某一類，不能同時屬於兩類，例如，上一組上限與下一組下限相同時，依慣例將此相同數值歸入下一組，就是爲了兼顧互斥原則。

歸類方法概分如下：

1. 屬質資料 { (1) 多量：機器整理法。
(2) 少量：人工整理法，又可分爲劃記法及卡片法。
2. 變量資料 { (1) 精確者：過戶整理法。
(2) 概約者：分組次數表。

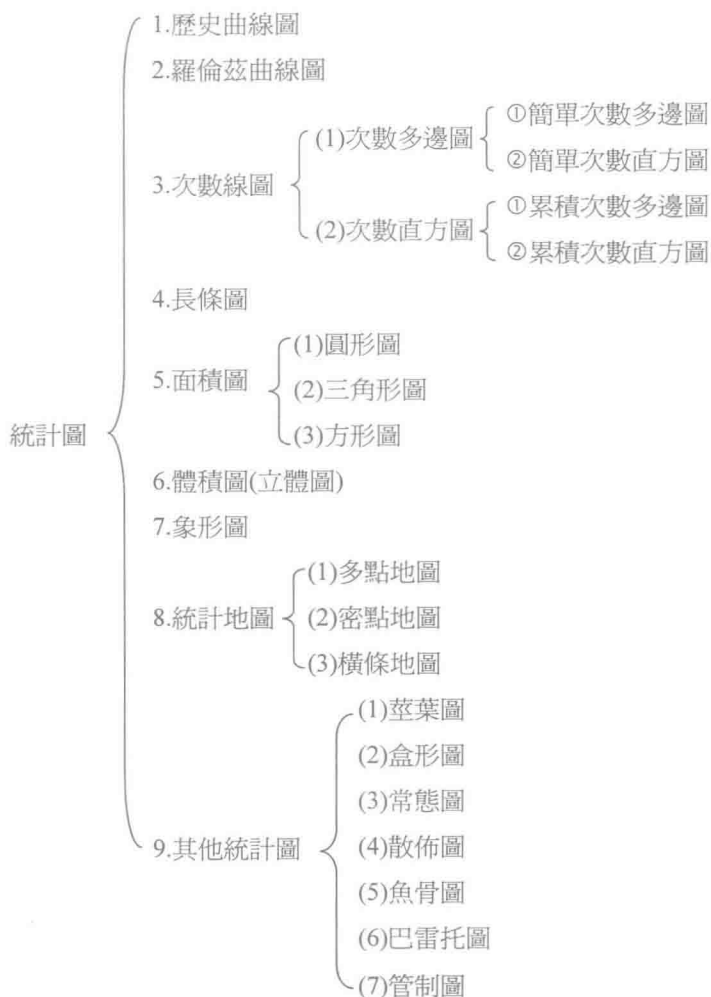
§1.7 統計資料的陳示

統計資料的陳示方法主要有四種：1. 文字說明，2. 統計表(**statistical table**)，3. 統計圖(**statistical chart**)，4. 數學方程式(**equation**)。

文字說明雖然簡單易懂，但易流於主觀，所以須再附上統計表。統計表依變數的個數及變數間是否相關而製成，一般分爲下列五種：

- | | |
|-------|------------|
| 統計表 { | 1. 單項表 |
| | 2. 雙項表統計表 |
| | 3. 雙項交叉表 |
| | 4. 多項表 |
| | 5. 多項部份交叉表 |

統計圖主要在使統計表能更直觀、更簡潔扼要地表現出來，依其不同用途，主要有下列多種：



統計圖表因另有專書詳細論述，故本書不加贅言。

數學方程式是比較客觀的表現方式，例如迴歸方程式等，但是因為數學方程式需要具有相當的統計知識才能瞭解，所以一般大都配合統計圖表，再用文字輔助說明，如此整體搭配，才會使統計資料清晰地展示，並且能夠被充分利用。

§1.8 母體與樣本

母體是由具有共同特性(屬質或屬量)的個體所組成，因不同的分類標準而有不同的分類，底下是三種最常用的分類標準：

1. 按照母體內個體所呈現的特性分
 - (1) 質母體(qualitative population)
 - (2) 量母體(quantitative population)
2. 按照母體內所含個體數目的多少分
 - (1) 有限母體(finite population)
 - (2) 無限母體(infinite population)
3. 按照母體是否具體存在分
 - (1) 存在母體(existent population)
 - (2) 假設母體(hypothetical population)

如果我們所研究的母體特性是屬質的，則稱此母體為質母體(或稱為屬質母體)，例如某公司職員血型所構成的集合。若特性是屬量的，則稱為量母體(或稱為屬量母體)，例如某公司職員薪資所構成的集合。

母體所含個體數目如果是有限的，稱為有限母體，例如某鞋廠今年的生產量。若母體所含個體數目是無限的，稱為無限母體，例如銀河系中的星球個數。

由具體存在的個體所構成的母體，稱為存在母體或實際母體(real population)，例如台灣股票市場的所有上市公司。母體僅是假想存在的，或未來才會出現的，稱為假設母體，例如丟一粒骰子無限多次所出現的點數，或明年台灣的每月降雨量。

雖然統計研究的對象是母體，但有時由於母體數目過大或時間經費不許可或資料的取得具有破壞性，而無法對母體中的全部個體均加以觀察(即普查，census)，只好從母體中抽取一部分來觀察(即抽查，sampling survey)，這些被抽取到的部分個體就稱為一組樣本(sample)。

樣本的分類標準，主要有下列兩種：

1. 按照樣本的數目大小分
 - (1) 大樣本(large sample)
 - (2) 小樣本(small sample)

2. 按照樣本取得的方式分

- (1) 隨機樣本(random sample)
- (2) 非隨機樣本(non-random sample)

如果變數的分配近似常態分配，一般將樣本數目超過30(或25)時，視為大樣本，但是如果變數的分配偏離常態分配，則須視情況而定。此外，在多變數的情形，樣本數至少要變數個數的十倍以上，才能視為大樣本。大樣本的好處是有許多好的機率性質及統計工具可以使用，但是在實際應用上，反而小樣本的場合比較常見。

統計學的最主要目的之一是由樣本的特性去推測母體的特性，而只有隨機樣本才能夠利用機率理論加以推論，但是在實際應用上，非隨機樣本的取得反而較常見。有關隨機樣本的理論性質，會在第五章「抽樣方法與抽樣分配」作進一步的討論。

§1.9 統計學的分類

統計學(Statistics)一詞含有三個主要的意義：統計資料，統計方法，以及統計理論。統計學按照其強調的重點又可以概分為兩大類，即數理統計學(Mathematical Statistics)與應用統計學(Applied Statistics)。數理統計學主要在探討統計學的數學原理及各種統計方法的來源；應用統計學則著重於如何將統計方法應用在各種社會學科或自然學科上面。

數理統計學的內容包含三大部分：敘述統計學(Descriptive Statistics)、推論統計學(Inference Statistics)、與統計決策理論(Statistical Decision Theory)。

敘述統計學包括統計方法中有關統計資料的搜集、整理、陳示、分析、及解釋等部份，僅就統計資料本身討論，並不將其意義推廣到更大的範圍。自從統計學家Tukey於西元1977年出版「Exploratory Data Analysis」(探查式資料分析，簡記為 E.D.A)名著後，二十多年來的研究發展已將敘述統計學賦予嶄新的面貌，配合電腦的使用，敘述統計學遂成為EDA的研究基礎。

推論統計學探討如何從樣本推論母體的一些特性，主要的內容又可分為估計(estimation)與檢定假設(testing hypothesis)兩大部分。