普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

（第二版）

赵云河　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

（第二版）

赵云河　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，结合作者的教学经验并借鉴国内外同类优秀教材的优点编写而成. 全书共7章，内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换以及一些线性代数应用案例. 除第7章外，各章的每节后均配有习题，每章后配有总习题，并在书末附有部分习题答案. 在编写中力求循序渐进、逻辑清晰、重点突出、通俗易懂，便于学生理解和教师教学.

本书可作为高等学校理工类和经济管理类各专业学生的线性代数课程教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/赵云河主编. —2版. —北京：科学出版社，2017.1
普通高等教育"十三五"规划教材
ISBN 978-7-03-051409-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①赵…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第000357号

责任编辑：王　静 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：白　洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011年6月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2017年1月第　二　版　印张：17
2017年1月第四次印刷　字数：343 000

定价：34.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，并参考了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写而成的. 经过 5 年多的使用，效果良好. 现结合教学实践中积累的一些经验，并吸取使用本教材的同行们所提出的宝贵意见，对全书作了修改和完善. 主要体现在以下几个方面：

1. 考虑到学生的学习理解和教师的讲解引入及衔接的方便，对部分内容的顺序作了适当调整. 比如二、三阶行列式、二次型标准形和规范形等内容的呈现顺序作了调整和充实.

2. 对第一版中文字描述或定理证明方式不易理解的地方作了适当的修改和补充.

3. 改写了第 5 章二次型的 5.2 节和 5.3 节的内容，增加了部分常用有定性判定的性质、定理及证明，使之叙述更为顺畅，结构更加合理.

4. 对部分章节的例题和习题进行了调整和补充.

5. 对第一版印刷和排版中的错误和不规范的地方进行了修正.

这次修订工作主要由赵云河和王刚老师负责，参与修订工作的老师还有纳静、马招丽、王云秋、马磊、杨莉、马嘉云、陈贻娟、宗琮、杜荣川、朱云、傅文玥. 本次修订得到了学校、学院领导的关心、支持，更得到了许多任课老师、同学及科学出版社编辑的帮助，在此表示感谢. 我们由衷地希望今后一如既往地得到广大老师和同学的支持和帮助，使我们的教和学更上一层楼.

作　者

2017 年 1 月

第一版前言

线性代数是理工类和经济管理类等有关专业的一门重要基础课，它不仅是学习其他数学课程的基础，也是自然科学、工程技术和经济管理等各领域应用广泛的数学工具.

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的线性代数课程教学基本要求，参考了最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，结合作者长期从事线性代数教学的经验和体会，并注意借鉴和吸收国内外优秀教材的优点，为适应不断变化的学生生源和各专业对线性代数的不同要求而编写的.为保证教材的教学适用性，在编写过程中，对教材的体系、内容的安排及例题和习题的选择作了合理的配置.在本书中，我们着重注意了如下几个问题：

(1) 作为一门数学基础课教材，本书注意保持数学学科本身的科学性和系统性.在引入概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对部分冗长、繁琐的推理则略去，突出有关理论、方法的应用，注重线性代数有关概念在实际应用方面的介绍.

(2) 注重例题和习题的合理搭配及习题的难易梯度，满足不同学习目标学生的需求.书中每节后均配有习题，每章后的总习题均分为(A)，(B)两组，其中(A)组为常规的解答题和证明题，(B)组为选择题和填空题，这样安排便于学生加强对基本概念和基本运算的理解和学习.

本书共 7 章，主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换，以及一定的线性代数应用案例.对数学要求较高的理工类专业，原则上可讲授本书的前 6 章内容；对经济管理类专业，可讲授本书的前 5 章内容.第 7 章为线性代数的四个应用案例，以窥见线性代数应用的广泛性，供教学中选用.

本书由赵云河主编，王林教授主审.参加本书编写的有王刚(第 1 章)、马嘉芸(第 2 章)、赵云河(第 3 章、第 7 章)、陈贻娟(第 4 章)、王云秋(第 5 章)、马磊(第 6 章)，全书由赵云河统稿.

在本书的编写过程中，参考了众多的国内外教材，并得到云南财经大学统计与数学学院的领导及同事的支持和协助，科学出版社也给予了大力支持，使得本书得以顺利出版.在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以期不断完善.

作　者

2011 年 5 月

目　　录

第1章　行　列　式

科学研究、工程技术和经济活动中有许多问题可归结为线性方程组，行列式正是研究线性方程组而产生的. 行列式实质是由一些数值排成的数表按一定的规则计算得到的一个数，这个数及其构成行列式的数表的重要信息，是研究线性代数的重要工具，它在自然科学、社会科学的许多领域里都有广泛的应用，特别在本课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量线性相关性的一种重要工具.

本章主要讨论行列式的概念、性质及计算方法，并介绍用行列式解一类特殊线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1.1.1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (1.1.2)\end{cases}$$

(1.1.1)$\times a_{22}-$(1.1.2)$\times a_{12}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\times x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \tag{1.1.3}$$

同理，(1.1.2)$\times a_{11}-$(1.1.1)$\times a_{21}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\times x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \tag{1.1.4}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，二元线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.5}$$

为便于记忆，引入下面概念.

定义 1.1　记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**. 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{ij}\,(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**. 横排叫作**行**，竖排叫作**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫作**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 叫作**列标**，表明该元素位于第 j 列. a_{ij} 表明该元素是位于第 i 行与第 j 列交叉点上的元素.

由定义 1.1 可知，二阶行列式是由 2^2 个元素按一定的规律运算所得到的一个数，这个规律性在行列式的记号中称为**"对角线法则"**，如图 1-1 所示. 把 a_{11}，a_{22} 的连线称为二阶行列式的**主对角线**，把 a_{12}，a_{21} 的连线称为**次对角线**（或**副对角线**），这样二阶行列式的值就等于主对角线上两元素的乘积减去次对角线上两元素的乘积.

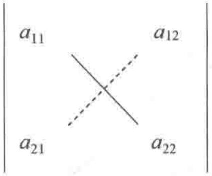

图 1-1

有了二阶行列式的定义，二元线性方程组解(1.1.5)中的分母、分子表达式可分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 D 称为二元线性方程组的**系数行列式**. 又记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

$D_j(j=1,2)$ 又称为二元线性方程组的常数项行列式，其构成是系数行列式 D 中的第 j 列元素用方程组中的常数项 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 去代替. 则(1.1.3)，(1.1.4)可写成

$$\begin{cases} Dx_1=D_1, \\ Dx_2=D_2. \end{cases}$$

于是，我们就有如下结论：对于二元线性方程组，当其系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解，且 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2)$，即

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

例 1　解方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=1, \\ x_1+3x_2=2. \end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-(-1)\times 1=4\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times 3-(-1)\times 2=5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times 2-1\times 1=1,$$

故方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{5}{4},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{4}.$$

1.1.2 三阶行列式

用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

类似于二元线性方程组的讨论,有当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\neq 0$$

时,三元线性方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

为了便于记忆,引入下面概念.

定义 1.2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称为**三阶行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由定义 1.2 可知,三阶行列式的展开式共有 6 项,每一项均为来自不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号,其运算规律可用如图 1-2 所示"**对角线法则**"来表述.

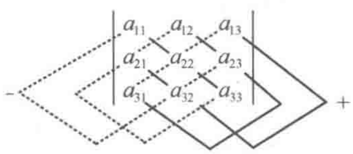

图 1-2

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}&=1\times1\times3+0\times2\times2+2\times1\times0-2\times1\times2-0\times1\times3-1\times2\times0 \\ &=3+0+0-4-0-0=-1.\end{aligned}$$

例 3 解方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=0.$

解 $$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0.$$

于是解得 $x=1$ 或 $x=3$.

根据三阶行列式的定义,可以把三元线性方程组的解用三阶行列式来表示. 首先

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

就是三元线性方程组(1.2.1)的系数行列式. x_1,x_2,x_3 的分子分别用 D_1,D_2,D_3 来表示,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

于是,对于三元线性方程组(1.2.1),当其系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2.1)有唯一解,解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,3),$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$是把 D 的第 j 列换成常数项 b_1,b_2,b_3 所得的行列式.

例 4 解三元线性方程组 $\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$

解 因为 $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$,故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-10,\quad D_3=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-5.$$

于是所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习 题 1.1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

3. 当 k 取何值时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$?

4. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

5. 解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

6. 证明下列等式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

1.2 n 阶行列式

利用二阶和三阶行列式，使二元和三元线性方程组的公式便于记忆和使用，人们自然想到把二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式，并利用 n 阶行列式来讨论线性方程组的解，使它的解有便于记忆的简捷形式. 为了得到 n 阶行列式的概念，我们先来学习全排列和逆序数的有关知识.

1.2.1 排列与逆序

定义 1.3 由 n 个不同的数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有确定顺序而无重复数码的排列称为一个 n **级排列**，简称为**排列**，一般记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，1234 和 4231 均为 4 级排列，342561 是一个 6 级排列.

注 n 级排列总共有 $n!$ 种不同排法，并且称 n 级排列中按自然数大小顺序的排列，即 $123\cdots n$ 为 n 级的**标准排列**或称为**自然排列**.

定义 1.4 若在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果 $i_s>i_t$（即一个较大的数排在一个较小数前面）时，则称这两个数构成了一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的

总数称为该排列的**逆序数**,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

由定义 1.4 知求逆序数的方法:

先考察 i_1 与后面的 $n-1$ 数 $i_2\cdots i_n$ 构成的逆序个数,记为 t_1;再先考察 i_2 与后面的 $n-2$ 数 $i_3\cdots i_n$ 构成的逆序个数,记为 t_2;以此类推,最后考察 i_{n-1} 与数 i_n 构成的逆序个数,记为 t_{n-1},而 i_n 后已没数,故 $t_n=0$,则

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1　计算排列 32514 的逆序数.

解　将数码 3 与后面的 4 个数码比较,构成 2 个逆序,即 $t_1=2$;
将数码 2 与后面的 3 个数码比较,构成 1 个逆序,即 $t_2=1$;
将数码 5 与后面的 2 个数码比较,构成 2 个逆序,即 $t_3=2$;
数码 1 与数码 4 不构成逆序,即 $t_4=0$.

所以所求排列的逆序数为

$$N(32514)=t_1+t_2+t_3+t_4=2+1+2+0=5.$$

注　$N(12\cdots n)=0$,即标准排列的逆序数为 0.

定义 1.5　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

规定:标准排列 $123\cdots n$ 为偶排列.

注　在 n 级排列的所有 $n!$ 种不同的排列中,奇偶排列各占一半.

例如,3 级排列总共有 $3!=6$ 种不同排法,其中 123,231,312 为偶排列;而 213,321,132 为奇排列.

例 2　求排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数,并讨论其奇偶性.

解
$$\begin{aligned}N(n(n-1)\cdots321)&=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

易见,当 $n=4k,4k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,该排列为偶排列;当 $n=4k+2,4k+3(k\in\mathbf{N})$ 时,该排列为奇排列.

定义 1.6　在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果交换数码 i_s 与 i_t 的位置,其他数码位置不变,得到一个新的 n 级排列,称为对排列施行了一次**对换**,记为对换 (i_s,i_t),即

$$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n\xrightarrow{(i_s,i_t)}i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n.$$

例如,$35241\xrightarrow{(2,4)}35421$. 其中 35241 为奇排列,35421 为偶排列. 关于对换有如下性质:对一个排列施行一次对换后其奇偶性改变.

1.2.2　*n* 阶行列式的定义

排列的有关结论能帮助我们将二、三阶行列式推广到 n 阶行列式.

观察三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

易见：

(1) 三阶行列式共由 6(3! =6)项之和构成，这对应于 3 级排列共有 3! 种不同的排法.

(2) 每一项均是取自不同行不同列的三个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 为 3 级排列.

(3) 每一项前面的符号，当行标是标准排列时，如果列标 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时前面带"+"号，是奇排列时前面带"−"号.

故三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中"$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$"表示对所有三阶排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

为此，我们将行列式定义推广到 n 阶情形.

定义 1.7　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 ***n* 阶行列式**. 规定其为所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 每一项的符号为：当该项各元素的行标按标准排列后，若对应的列标排列为偶排列则取正号，是奇排列则取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中"$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$"表示对所有 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和，且称 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为一般项. 行列式有时又记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

注　(1) 由于 n 级排列总共有 $n!$ 项，因此行列式展开式中有 $n!$ 项之和；

(2) 行列式中每一项是来自不同行、不同列的 n 个元素之积;

(3) 行列式每一项的符号依赖列标排列的奇偶性.

当 $n=2,3$ 时,此定义得到的二阶、三阶行列式与用对角线法则所得到的结果一致,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

对四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

其展开式共有 $4!=24$ 项之和. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 是 24 项中的一项,这是由于项中的元素是取自不同行、不同列的四个元素乘积,列标排列为 1234,项前面符号带正号;$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 也是其展开式中的项,列标排列为 1324,是奇排列,所以项前面带负号;而 $a_{11}a_{21}a_{33}a_{44}$ 虽然是四阶行列式中的四个元素之积,但它不是展开式中的项,原因是元素 a_{11},a_{21} 来自同一列.

例 3　用行列式定义计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　四阶行列式 D 的一般项是 $(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,现考察不为零的项. 要 $a_{1j_1}\neq 0$,只有 $j_1=4$;同理可得 $j_2=3,j_3=2,j_4=1$. 即行列式中不为零的项只有

$$(-1)^{N(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=(-1)^{N(4321)}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,$$

故 $D=24$.

一般地,有如下结果:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{N(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 4　称形如 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$(满足 $a_{ij}=0(j>i)$)为下三角形行列式. 用定义计算 D.