数学思考之美

shuxue sikao zhimei

赵士元◎著

苏州大学出版社
Soochow University Press

数学思考之美

赵士元　著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思考之美／赵士元著. — 苏州：苏州大学出版社，2016.12
ISBN 978-7-5672-1980-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①中学数学课-教学研究 Ⅳ.①G6333.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 304977 号

书　　名：数学思考之美

作　　者：赵士元
责任编辑：肖　荣
装帧设计：刘　俊

出版发行：苏州大学出版社(Soochow University Press)
社　　址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006
印　　装：江苏扬中印刷有限公司
网　　址：www.sudapress.com
邮购热线：0512-67480030
销售热线：0512-65225020

开　　本：700mm×1000mm　1/16　印张：15.5　字数：279 千
版　　次：2016 年 12 月第 1 版
印　　次：2016 年 12 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5672-1980-9
定　　价：38.00 元

美，在数学思考之中

——《数学思考之美》自序

曾有人说：数学，很枯燥，满篇都是看不懂的符号.

也有人说：数学，很难学，公式推理犹如“天书”般深奥.

曾有人说：数学，是聪明人的“玩物”，因为它具有高度的抽象性.

更有人说：数学，是一门非常态的学问，因为它有着许许多多常人读不懂的“悖论”.

数学，真如人们所说的那样让人“望而生畏”吗？非也. 笔者想说：“数学很美，数学中有美，美中有数学！数学，给人美的感觉；学数学，给人美的享受！”

有人说数学枯燥，因为他在看到数学严谨性的同时没有看到数学的内在美；有人说数学难学，因为他在看到数学抽象性的同时没有看到数学的丰富性；有人说数学是聪明人的“玩物”，因为他没有看到数学的深奥性和生活的数学性.

普洛克拉斯曾断言：哪里有数学，哪里就有美.

亚里士多德曾说过：虽然数学没有明显地提到善和美，但善和美也不能和数学完全分离. 因为美的主要形式是“秩序”“匀称”和“确定性”.

法国著名雕塑家奥古斯特·罗丹有句经典名言：“世界上不是缺少美，而是缺少发现美的眼睛.”

数学中充满着美的因素，数学之美是数学科学本质力量的呈现.

欧拉公式 $V-E+F=2$ 体现了数学的“简单美”；梯形公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$ 是数学“对称美”的代表；椭圆、双曲线或抛物线的统一定义“到定点距离与它到定直线的距离之比是常数 e 的点的轨迹”体现了数学的“统一美”；概率论和数理统计所揭示出的事物的必然性与偶然性的内在联系是数学“辩证美”的完美体现……

数学美在生活中同样也表现得淋漓尽致.

王维笔下的“大漠孤烟直”给我们以横平竖直的“线面垂直”的美景，下句“长河落日圆”所描述的一轮落日临近河面的天然合一的景象，给我们以“直线与圆相切”的美妙意境；音乐作品的高潮部分往往位于整部作品离首拍约32%的位置，体现了“黄金分割”的妙笔生花；由“车轮上的两个同心圆在相同时间内滚过了相同的水平距离”得出“任何两条线段都有相等的长度”这一“百思不得其解”的结论，让人感受到数学的奇异美……

数学美，数学思考同样也美.

面对一个数学难题，当你历经“千辛万苦”终于征服它时，你会感受到数学思考为你带来的那份无法言说的美的享受.

当你理解了基本不等式“$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$($a,b\in\mathbf{R}^*$)当且仅当$a=b$时等号成立”后，你会感受到数学思考中的“对称美”.

当你在比较三大圆锥曲线各自的性质时，你会发现数学思考中的“类比美”与“和谐美”.

当你在理解了计数过程中的多项式思想时，你会深切地感受到数学思考中的“关联美”.

当你在理解了数学解题教学的思维导图后，你会感受到数学思考中的“形态美”.

如果你对数学教学的生成性有了一定的理解，那么你会从内心深处感受到数学思考的“动态美”.

数学是美的，数学思考更美.

《数学思考之美》没有从哲学的角度去解剖数学思考的美学价值，因为笔者相信：美，需要“用心”去感受；美，需要“用情”去欣赏.

《数学思考之美》没有高深的人生哲理，它不是一本数学文化或数学哲学的专著，这是笔者长期在教学一线对数学教学的一丝思考，是笔者对数学课堂观察的一点反思，也是笔者对数学解题的一份感悟，更是笔者对数学文化的一种情怀.

《数学思考之美》没有在任何篇幅触及“美”的内容，但作者相信只要读者用心品读每一篇文章，都会对数学思考的美学价值多一份理解，因为“数学思考之美”隐藏在每一篇文章的字里行间，她正羞涩地期待读者去体会和品味.

《数学思考之美》是笔者对数学美的别样诠释.

赵士元

丙申年十月初八晚于越溪

目录

第三部分　高中解题方法思考之美

第四部分　解题反思之美

第五部分　数学文化思考之美

第六部分　教学行为思考之美

第一部分

初中解题思考之美

一道竞赛题的多种解法及其启示

偶见一道数学竞赛题：一群幼儿园孩子一对跟着一对地排队（排成两列），我们发现在每列中站着的男孩与女孩是一样多的，一男一女所组成的对数等于其余方式组成的对数（每对都只有男孩或都只有女孩组成），求证：这群孩子的总数是 8 的倍数（第十七届全苏中学生奥林匹克数学试题）.

这是一道经典的但有一定难度的数学试题，它需要参试者有较强的分析能力、联想能力以及敏锐的思维能力，还需要应试者有比较广的知识面. 下面对此题作一简要分析，给出几种不同解法，观察一下不同解法给我们不同的启示.

【分析一】 由于性别只有男女之别，而每对只有两种情况：同性或异性. 我们可设法用“±1”来表示，下面给出证法一.

证法一 设男孩$=+1$，女孩$=-1$，x_i 是第 i 对孩子的赋值，它等于组成这对孩子的两个孩子的赋值之积，即

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 对孩子同性,}\\ -1, & \text{第 } i \text{ 对孩子异性.}\end{cases}$$

设这群孩子共有 n 对，由于这群孩子每列站着的男孩与女孩一样多，因此这群孩子中男孩与女孩的总数都是偶数，显然有

$$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=1. \qquad ①$$

又由于一男一女组成的对数等于其余方式组成的对数，故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中$+1$ 与-1 的个数相同，不妨设各有 k 个，于是 $n=2k$，且

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0. \qquad ②$$

由①知 $x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=1^k\cdot(-1)^k=1$，由此可见 k 是偶数，于是 n 是 4 的倍数，从而这群孩子的总数是 8 的倍数.

【分析二】 由于一对一对地排成两列，其先后次序是不确定的，但每对孩子的组合情况只有（男，男）、（男，女）、（女，男）和（女，女）四种，其中括号前

的第一个字表示第一列孩子的性别，后一个字表示第二列孩子的性别，我们不妨设这四种情况各有 a,b,c,d 对，则这群孩子的总对数 $n=a+b+c+d$，我们可设法通过题中条件列出关系式.

证法二 从分析知，这群孩子的总对数 $n=a+b+c+d$，其中 a,b,c,d 的意义分别表示(男，男)、(男，女)、(女，男)和(女，女)的对数，由于每列中站着的男孩与女孩是一样多的，故

$$\begin{cases}a+b=c+d,\\ a+c=b+d.\end{cases}$$

又一男一女组成的对数等于其余方式组成的对数，故又有 $a+d=b+c$. 由这三个式子可以推得 $a=b=c=d$，于是 $n=4a$，从而 n 是 4 的倍数，这群孩子的总数一定是 8 的倍数.

【分析三】 由分析二可知，四种类型的组合(男，男)、(男，女)、(女，男)和(女，女)是怎样排列的对本题的结论是无关紧要的. 因此，我们可以将这 n 对孩子重新“整队”，使第一列的男孩在女孩的前面，而第二列中与第一列的男同学配对的男同学在前女同学在后，其后是与第一列的女同学配对的男同学，最后才是与第一列女同学配对的女同学.

证法三 设总对数为 n，第二列中最前面的男同学有 p 个，则接下来的女同学有 $\left(\frac{n}{2}-p\right)$ 个，又设接下来是 s 个男同学，最后则是 $\left(\frac{n}{2}-s\right)$ 个女同学，从而两列幼儿园孩子的队形将变成：

第一列：男，男……男，男，男……男，女，女……女，女，女……女

第二列：男，男……男，女，女……女，男，男……男，女，女……女

由于第二列的男孩和女孩一样多，故 $p+s=\left(\frac{n}{2}-p\right)+\left(\frac{n}{2}-s\right)$，即 $n=2(p+s)$.

又一男一女组成的对数等于其余方式组成的对数，故 $\left(\frac{n}{2}-p\right)+s=p+\left(\frac{n}{2}-s\right)$，于是 $p=s$.

故 $n=2(p+s)=4p$，是 4 的倍数，所以这群孩子的总数将是 8 的倍数.

以上为我们给出这道题的三种不同思考方法及相应的证明，从以上分析我们至少可以得到如下启示：

启示一 本题的结论有一个明显的特点：题中元素有且只有完全相反的

两类(即矛盾的两类),一般情况下具有这个特点的题型往往可以用“± 1”分析法(又称“0 - 1 法”或“开关法”),它是赋值证法的一个特殊类别.

启示二 本题的男女组合只有四种,我们列出了四种可能的组合,再通过设未知数来证明,而且这里未知数未必要计算出来,它只是作为一个参数出现,但有一点对我们非常有用:当题中的可能情形只有有限个或有限类时,把各种可能情形列出来对问题的求解是有好处的,这实际是一种枚举思想.

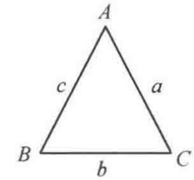
启示三 本题中各种男女组合的先后次序不影响题中结论的成立,这时我们可以题中各种类型的组合重新“整队”以理清题中思路,寻求解决问题的突破口,这一思想源于数学竞赛中经常出现的“排队核算法”,这实际上是特殊思想法的一个应用.

三角形解的余弦定理判别法

在已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时，可能有一解、二解或无解这三种情况. 教材也对此给出了具体的判别方法，它是利用作图通过交点个数来确定解的情况的，但学生对此不易理解，结论也很难记住. 在此背景下，我们研究三角形解的个数的另一种判别方法——余弦定理判别法.

如图，在$\triangle ABC$中，已知边长a,b以及角A，解这个三角形时可令$c=x$，则由余弦定理可知：$a^2=b^2+x^2-2bx\cos A$，将它整理成关于x的一元二次方程，得

$$x^2-(2b\cos A)x+b^2-a^2=0. \qquad (*)$$



不难发现：三角形解的个数完全由方程（*）的正实数根的个数决定. 若这个方程无解，则三角形无解；若这个方程有解，则设其两个实根分别为x_1,x_2. 根据方程根的判断情况可得到如下表所示的结论：

方程（*）的正根个数	三角形解的个数	代数条件
有两个不同正根	有两解	$\Delta>0$ 且 $x_1+x_2>0, x_1x_2>0$
有且只有一个正根	有一解	“$\Delta>0$ 且 $x_1x_2<0$”或“$\Delta=0$ 且 $b\cos A>0$”
无正根	无解	“$\Delta<0$”或“$\Delta\geqslant 0$ 且 $x_1+x_2<0, x_1x_2>0$”

由此可见：方程（*）的正根个数就是三角形解的个数，因此我们在判别三角形解的个数时只要判别方程（*）的正根个数. 下面举例说明.

【例题】 不解三角形，判断下列三角形解的情况：

(1) $a=9, b=10, A=60°$；

(2) $b=72, c=50, C=135°$；

(3) $b=5, c=4, B=158°$.

解 (1) 设$c=x$，则由余弦定理知：$a^2=b^2+x^2-2bx\cos A$，

整理得$x^2-10x+19=0$，其中$\Delta=10^2-4\times 19=24>0$.

不妨设$x^2-10x+19=0$的根为x_1,x_2，则$x_1+x_2=10>0, x_1x_2=19>$

0，故方程 $x^2-10x+19=0$ 有两个不同的正根，因此三角形有两解.

(2) 设 $a=x$，由余弦定理知：$c^2=b^2+x^2-2bx\cos C$，

整理得 $x^2-72\sqrt{2}x+(72^2-50^2)=0$，

故 $\Delta=(72\sqrt{2})^2-4\times(72^2-50^2)=4\times50^2-2\times72^2$

$=100^2-(72\sqrt{2})^2<0$，

因此方程 $x^2-72\sqrt{2}x+(72^2-50^2)=0$ 无实根，因此原三角形无解.

(3) 设 $a=x$，由余弦定理知：$b^2=x^2+c^2-2cx\cos B$，

整理得 $x^2-(8\cos B)x-9=0$，

故 $\Delta=(8\cos B)^2+36>0$，但 $x_1x_2<0$，

因此方程 $x^2-(8\cos B)x-9=0$ 只有一个正解，故三角形只有一解.

由此可见：用余弦定理判别三角形解的个数问题时，无须讨论已知角是锐角、直角还是钝角，我们只要研究方程的正根个数，由方程正根个数来判断三角形解的个数情况较容易为同学们所接受，也比较方便，以后在遇到三角形解的情况讨论时不妨用余弦定理判别法试一试，相信一定会有收获！

初中数学竞赛中“二次方程”问题的解法研究

二次方程以其丰富的内容以及思维的灵活性吸引着广大数学爱好者(尤其是众多的数学奥林匹克爱好者),也吸引着不少奥林匹克试题的命题者.因此,在各级各类数学竞赛中经常出现有关二次方程的问题,使二次方程更加增添了它的活力,引起了广大中学生的浓厚兴趣.下面我们以一些竞赛题为例,探讨一下二次方程问题的几种类型及其思考方法.

一、有关方程根的定义问题

所谓方程的根是指使方程的左右两边的值相等的未知数的值.我们平时比较熟悉的是求方程的根(即解方程),而以方程根的定义入手的问题我们比较生疏.事实上,若 $x=x_0$ 是方程 $f(x)=0$ 的根,则 $f(x_0)=0$,反之亦然.利用这一显而易见的事实可以帮助我们解决许多数学难题.

【例 1】 (1992 年全国初中联赛)若 $x=x_0$ 是一元二次方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 的根,则 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的关系为( )

A. $\Delta>M$　　B. $\Delta=M$　　C. $\Delta<M$　　D. 不确定

【分析】 由于平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 包含了系数 a,b 以及方程的根 x_0,因此我们从根的定义出发寻求 a,b,x_0 的关系.事实上,$x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,因此,我们有 $ax_0^2+bx_0+c=0$,即 $ax_0^2+bx_0=-c$,于是

$$M=(2ax_0+b)^2=4a(ax_0^2+bx_0)+b^2=4a(-c)+b^2=\Delta,$$

故正确答案应为 B.

这里我们利用根的定义将 $x=x_0$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 得到 $ax_0^2+bx_0+c=0$,使问题得到解决,这一思考方法值得初中学生关注,这也就是我们平时常说的“回到定义中去”.

【例 2】 已知方程 $x^2-x+3m=0(m\neq0)$ 有一个根是方程 $x^2-x+m=0$ 的某根的 2 倍,求 m 的值.

【分析】 由条件可设 $x^2-x+m=0$ 的一个根是 a，则方程 $x^2-x+3m=0$ 有一个根是 $2a$，而现在要求的是相应的系数，显然从根的定义入手比较方便.

解 设 a 是方程 $x^2-x+m=0$ 的一个根，则 $2a$ 是方程 $x^2-x+3m=0$ 的一个根，从而

$$\begin{cases} 4a^2-2a+3m=0, & ① \\ a^2-a+m=0, & ② \end{cases}$$

由①－②×4，得 $2a=m$，即 $a=\frac{m}{2}$.

将 $a=\frac{m}{2}$ 代入②得到 $m=0$ 或 $m=-2$.

由于 $m\neq 0$，故所求 m 的值为 $m=-2$.

有些问题粗略一看与方程毫无关系，但若能与方程的根取得联系，问题就比较容易得到解决. 这就是所谓的"知难行易"，它是数学竞赛题的一大特点.

【例 3】 设 l,m,n 及 a,b,c 都为实数，a,b,c 互不相等，且

$$(a-l)^2x+(a-m)^2y+(a-n)^2z=1,$$
$$(b-l)^2x+(b-m)^2y+(b-n)^2z=1,$$
$$(c-l)^2x+(c-m)^2y+(c-n)^2z=1.$$

求证：$(l+1)^2x+(m+1)^2y+(n+1)^2z=1$.

【分析】 已知的三个式子形式完全一样，所不同的是 a,b,c 三个字母有所不同，但它们所在的位置完全一致. 因此，我们可将 a,b,c 三个互不相等的数看作是关于 t 的一元二次方程 $(t-l)^2x+(t-m)^2y+(t-n)^2z=1$ 的根.

解 由条件知，a,b,c 是关于 t 的一元二次方程 $(t-l)^2x+(t-m)^2y+(t-n)^2z=1$ 的三个不同实根. 但我们知道一元二次方程最多有两个不相等的实数根，否则它便是一个恒等式，即无论 t 为何值，$(t-l)^2x+(t-m)^2y+(t-n)^2z=1$ 总成立，于是令 $t=-1$，便得到 $(-1-l)^2x+(-1-m)^2y+(-1-n)^2z=1$，即 $(l+1)^2x+(m+1)^2y+(n+1)^2z=1$.

由上述解题可知，我们将待证式 $(l+1)^2x+(m+1)^2y+(n+1)^2z=1$ 中的数字"1"替换成任何一个实数都是成立的，如 $(l+3)^2x+(m+3)^2y+(n+3)^2z=1$ 或 $(l-4)^2x+(m-4)^2y+(n-4)^2z=1$ 等.

【例 4】 设 a,b,c,m,n,p 均为实数，且 $ap-2bn+cm=0$，$b^2-ac<0$，求证：$mp-n^2\leqslant 0$.