AOSAI

白马出品

新浪教育
edu.sina.com.cn

白马工作室授权新浪网
为本书独家网络合作伙伴

高中数学奥赛一本全

山西教育出版社

AOSAI

高中数学奥赛

一本全

本册主编 李冬胜

编 委 王彩凤 白建华 岳作仁
张鸿宾 李斌才 李冬胜
李长青 姜 涛 燕 洁
王太行

山西教育出版社

图书在版编目（C I P）数据

高中数学奥赛一本全/李冬胜编．－太原：山西教育出版社，2005．7

ISBN 7－5440－2891－7

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 030667 号

整体策划　张宝东
责任编辑　张宝东
助理编辑　解　红
装帧设计　王耀斌
传　　真　（0351）4035711
E-mail　zbdddzxx@vip.sina.com
出版发行　山西教育出版社（太原市迎泽园小区 2 号楼）
发行专线　（0351）4053275
印　　刷　太原市众一彩印有限公司
开　　本　787×960　1/16
印　　张　20.25
字　　数　447 千字
版　　次　2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月山西第 1 次印刷
印　　数　1－10000 册
书　　号　ISBN　7－5440－2891－7/G·2596
定　　价　21.00 元

《奥赛一本全》系列丛书编委会

各省竞赛和全国初赛分析及来年预测

一年一度的数学竞赛作为课堂学习的补充，在扩大知识领域、开阔视野、培养能力、开发智力，加强信息的交流，以及激励学生的探索精神，树立为科学献身的志向等方面都起着积极的促进作用．从各省市的试题来看，主要是遵循竞赛大纲，体现现代数学思想方法，注意学生数学思维能力的考查．

一、各省竞赛和全国初赛分析

1．考查知识主干，但不追求覆盖面，体现了重点知识重点考查．

从全国联赛和各省市的试题来看，以试验教材中除去导数与统计部分的内容为主，涉及函数、方程、不等式、数列、向量、立体几何、解析几何、排列组合及概率等知识．对于高考中不作要求的诸如无理不等式，指数、对数不等式，三角中的和差化积、积化和差，三角方程均在考查之列，在函数部分中如函数方程、二次函数、根的分布等也作为考查的重点．这些要求都是所考查重点知识的深化．

2．突出能力的考查．

考查思维能力、运算能力、空间想像能力以及运用所学知识和方法分析问题解决问题的能力是数学竞赛考查的重点，试题将数学思维能力置于考查的核心地位．要求考生能对所提供的问题和思维材料作出综合的判断，同时会选择合理的数学思想方法去解决．通常通过分析、观察、比较、抽象和综合，对所提供的问题进行分析，运用已有的知识经验作出准确的判断，再根

据所学的数学思想和方法去进行转化，才能顺利地解决．有些题目所用的方法较为特殊，对思维的深刻性、变通性的考查较为充分，要求考生具有一定的创新能力．在一些填空题和解答题中，还考查一定的构造能力、变换能力及丰富的联想能力．因此竞赛试题的解决在很大的程度上不仅要考查逻辑思维能力，还要考查直觉思维能力；不仅要考查正向思维能力，还要考查逆向思维能力；不仅要考查聚合思维能力，还要考查发散思维能力．

竞赛试题的运算量较大，不仅要求明辨算理，而且还考查一定的运算技巧及简捷的运算途径．近几年的试题不论是数学运算，还是含有字母的代数式的运算都体现了这一点．因此，迅速、准确的运算能力是竞赛中最基本的要求，也是要求每位考生必备的素质．

空间想像能力是通过立体几何内容进行考查的，在各省市及全国联赛中一般以选择题、填空题出现，但在许多情况下，要与代数、解析几何联系在一起考查，要求考生不仅明辨其中的位置关系，还要求具有一定的转化能力．

分析问题解决问题的能力是一种综合能力，在竞赛试题中多数题目有一定的综合性．因此，要求考生要具有一定的知识积累，丰富的联想能力和较高的转化能力，同时要求掌握一定的数学解题思维模式．在近年有所体现．

二、来年试题预测及对策

1．来年试题预测．

根据近年来各省市及全国联赛试题的考查内容及难度，来年的试题应保持在稳中有升的层面上，函数与不等式仍是考查的重点，约占 50 分左右；解析几何约占 30 分左右，立体几何约占 25 分左右，数列、向量、复数、概率约占 40 分左右．

对于数学方法、数学思想的考查仍是重点，尤其函数与方程的思想、分类讨论思想、数形结合的思想是必考的知识，同时对于构造法、类比法、转化法、反探法及倒溯法等一些特殊的方式也时有涉及，尽管各省市及全国联赛的试题在各部分内容所占的分值有所不同，但在考查方法和能力方面还是基本一致的．

2．根据竞赛大纲的要求，掌握必需的竞赛知识．

竞赛试题是依据《竞赛大纲》命制的，在备考时依据大纲复习和学习对于提高学习效率是极为重要的．

对于传统的内容如集合、函数、数列、三角、不等式、立体几何、解析

几何等内容是考查的重点，而且要求也比较高，同时在综合性、灵活性等方面的考查力度也比较大，因此，复习时要重点突出．这部分知识的考查，不仅涉及所学的基本数学思想方法，还要求会用赋值法、构造法、化归法等方法解决问题，同时要会用建立合理的数学模型，会用特殊化和一般化转化问题．对于新增内容如向量、概率等问题的要求较低，而且综合性也不强，但在作为一种已知形式或中间过渡方面的考查不能轻视．

3．掌握一定的解题模式．

竞赛试题由于在灵活性、综合性和思维的难度上要求较高，因此在实现问题的转化过程中往往存在一定的困难．掌握常见的解题模式对于提高分析问题解决问题的能力有积极的促进作用．

常见的解题模式有：①变更问题的思维模式，如变换条件、变换结论，同时变换条件和结论，还有强弱命题转换等；②构造解题思维模式，如构造方程、构造函数、构造图形、构造不等式、构造数列等；③“以退为进”的思维模式，如降维、降次、退到特殊情况等，是类比、特殊化等思维方法的应用；④分解与组合的思维模式；如分解变形、组合变形、剖析综合题的结构等；⑤整体化思维模式，如从全局入手解决局部问题，从整体结构考虑，宏观把握问题实质，从整体性质出发对已知条件整体运用等；⑥交集法与补集法思维模式；如交集法、补集法，这是简化与转化问题常见的方法．

目 录

集合及其运算

伟大的精力只是为了伟大的目的而产生的.

——斯大林

【奥赛赛点】嗯……现在……我们讲一讲……

集合是近、现代数学的重要基础,集合语言、集合思想已渗透到数学的各个分支,因此涉及集合方面的试题,内容丰富,题型灵活,概念性强,所以深刻理解集合的概念,正确地进行集合的有关运算是解决好集合问题的关键.

【典型示例】看看以前是怎么考的。

例 1 已知集合 $A=\{x\,|\,|x^2-2x|\leqslant x\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}$, $C=\{x\,|\,ax^2+x+b<0\}$满足$(A\cup B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求实数 a、b 的值.

解: $A=\{x\,|\,|x^2-2x|\leqslant x\}=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3$,或 $x=0\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\}=\{x\,|\,0\leqslant x<1\}$.

$\because\ (A\cup B)\cap C=\varnothing$,且$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,

$\therefore\ C=\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\,|\,x<0$,或 $x>3\}=\{x\,|\,x^2-3x>0\}$.

所以 $a=-\frac{1}{3}$, $b=0$.

特别提示: 本题主要考查含绝对值的不等式的解法,集合交、并、补运算,其关键是集合 C 的确定,而这需对集合运算准确把握.

讨论与延伸: 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,ax+y=1\}$, $B=\{(x,y)\,|\,x+ay=1\}$, $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$.

(1)当$(A\cup B)\cap C$为含有两个元素的集合时,求 a 的值.

(2)当$(A\cup B)\cap C$为含有三个元素的集合时,求 a 的值.

解: 因为$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,而 $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组:

(Ⅰ)$\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1;\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1\end{cases}$的解集,

$\therefore\ A\cap C=\left\{(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right\}$;

$$B\cap C=\left\{(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)\right\}.$$

(1)使$(A\cup B)\cap C$恰有两个元素,则有

$$\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0,\end{cases}\quad\text{得}\quad a=0,\text{或 } a=1.$$

(2)使$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素,则有

$\dfrac{2a}{1+a^2}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$,解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

例2 已知$M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$,求$M\cap N=N$成立时$a$需满足的充要条件.

解法一:$M\cap N=N\Leftrightarrow N\subseteq M$.

由$x^2+(y-a)^2\leqslant 1$,得$x^2\leqslant y-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)$.

若$u=-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)\leqslant 0$, ①

则有$y\geqslant x^2$,即$N\subseteq M$.

而①成立的充要条件是 $u_{\max}\leqslant 0$,

即 $\dfrac{-4(1-a^2)-(2a-1)^2}{-4}\leqslant 0$,

所以 $4(1-a^2)+(2a-1)^2\leqslant 0$,解得 $a\geqslant\dfrac{5}{4}$.

解法二:集合M为抛物线$y=x^2$上及其内部(含焦点)的点的集合,N为圆$x^2+(y-a)^2=1$上及其内部的点的集合.要使$M\cap N=N$,即$N\subseteq M$成立,则圆应在抛物线的内部(包括边界).

$\therefore\quad a>0$,且方程组$\begin{cases}y=x^2,\\ x^2+(y-a)^2=1\end{cases}$最多只能有两个解.

即$y^2-(2a-1)y+a^2-1=0$无实数解或有两个相等的实数解.

$\therefore\quad \Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant\dfrac{5}{4}$.

特别提示:以上两种解法对集合M、N采用了不同的处理方法.解法一是从“式”的角度考虑求解,而解法二是从“形”的方面考虑求解.此类求参数范围的问题应注意利用集合的关系,将问题进行“转化”.解法一是转化为不等式问题求解;解法二是转化为解析几何问题求解.

讨论与延伸:设a、b是两个实数,$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是$xOy$平面内的集合,问是否存在$a$和$b$使得(1)$A\cap B\neq\varnothing$,(2)$(a,b)\in C$同时成立,并说明理由.

解:如果存在实数a和b使得(1)成立,则存在整数m、n使得$(m,3m^2+15)=(n,na+b)$,即$n=m$,$na+b=3m^2+15$,$\therefore\quad na+b=3n^2+15$.

上式表明点$P(a,b)$在直线$l:nx+y=3n^2+15$上,由于原点O到直线l的距离

$$d=\frac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{3(n^2+5)}{\sqrt{n^2+1}}=3\left(\frac{n^2+1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{4}{\sqrt{n^2+1}}\right),$$

$\therefore$ $d\geqslant 12$,当且仅当 $n^2=3$ 时取等号,而 $n\in\mathbf{Z}$,$\therefore$ $n^2\neq 3$,故只有 $d>12$.

$\therefore$ 点 P 到原点的距离 $|PO|=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$.

即 $a^2+b^2>144$.

因此,同时满足(1)、(2)的 a、b 不存在.

例 3 若 $\{\sqrt{a},1\}\subsetneqq\{1,2,a\}\subsetneqq\{1,2,4,a^2\}$,求实数 a 的值.

解: 由 $\{\sqrt{a},1\}\subsetneqq\{1,2,a\}$,得 $\sqrt{a}=2$,或 $\sqrt{a}=a$,解得 $a=4$,或 $a=0$,或 $a=1$;

当 $a=4$ 时,$\{\sqrt{a},1\}=\{2,1\}$,$\{1,2,a\}=\{1,2,4\}$,$\{1,2,4,a^2\}=\{1,2,4,16\}$,适合题意;

当 $a=0$ 时,$\{\sqrt{a},1\}=\{0,1\}$,$\{1,2,a\}=\{1,2,0\}$,$\{1,2,4,a^2\}=\{1,2,4,0\}$,适合题意;

当 $a=1$ 时,$\{\sqrt{a},1\}=\{1,1\}$,不满足集合中元素的互异性.

$\therefore$ $a=0$,或 $a=4$.

特别提示: 本题考查集合之间的包含关系,以及集合中元素的性质,概念性较强,须深刻理解并能熟练应用.

讨论与延伸: 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=2x-1,x\in\mathbf{N}_+\}$,$B=\{(x,y)\mid y=ax^2-ax+a,x\in\mathbf{N}_+\}$,问是否存在非零整数 a,使 $A\cap B\neq\varnothing$? 若存在,求出 a 的值及 $A\cap B$,若不存在,说明理由.

解: 由 $A\cap B\neq\varnothing$ 知,a 是否存在取决于方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\ y=ax^2-ax+a\end{cases}$ 是否有 x 的整数解,消去 y,得 $ax^2-(a+2)x+a+1=0$. ①

由 $\Delta\geqslant 0$,即 $(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant 0$ 解得

$\frac{-2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 a 为非零整数,所以 a 可能取的值为 $-1,1$.

当 $a=-1$ 时,代入①,解得 $x=0$,或 $x=-1$,这与 $x\in\mathbf{N}_+$ 矛盾,故 $a\neq -1$;

当 $a=1$ 时,由①,得 $x=1$,或 $x=2$,适合题意.

故存在 $a=1$,使得 $A\cap B\neq\varnothing$,此时 $A\cap B=\{(1,1),(2,3)\}$.

例 4 设函数 $f(x)=x^2+bx+c(a,b\in\mathbf{R})$,集合 $A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x=f[f(x)],x\in\mathbf{R}\}$.

(1)证明 $A\cap B=A$;

(2)若 $A=\{-1,3\}$,求集合 B;

(3)若 A 为只含有一个元素的集合,则 $A=B$.

解:(1)证明:设 $x_0\in A$,则 $x_0=f(x_0)$,

$\therefore$ $f(x_0)=f[f(x_0)]$,$\therefore$ $f[f(x_0)]=x_0$,

故 $x_0\in B$,所以 $A\subseteq B$,即 $A\cap B=A$.

(2)当 $A=\{-1,3\}$ 时,方程 $x=x^2+bx+c$ 有两个根 $-1,3$,所以 $b=-1,c=-3$.

此时,集合 B 即为方程 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$ 的解集.

由此方程,得 $(x^2-x-3)^2-x^2=0$,解方程,得

$x_1=-1, x_2=3, x_3=-\sqrt{3}, x_4=\sqrt{3}$.

$\therefore \quad B=\{-1,3,-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

(3)设集合 $A=\{a\}, a\in\mathbf{R}$,则方程 $f(x)-x=0$ 有重根 a,即 $f(x)-x=(x-a)^2$.

$\therefore \quad f(x)=(x-a)^2+x$,

故方程 $x=f[f(x)]$ 即为

$x=[(x-a)^2+x-a]^2+(x-a)^2+x$,

整理,得 $(x-a)^2[(x-a+1)^2+1]=0$,

因为 $x,a\in\mathbf{R}$, $\therefore \quad (x-a+1)^2+1\neq 0$,

故 $\quad x=a$,即 $B=\{a\}$.

所以 $\quad A=B$.

特别提示:"两个集合中的元素完全相同时,这两个集合相等"这是根据集合相等的定义而得到的.本题利用方程思想,通过解方程求出集合 B 的元素.

讨论与延伸:集合 $M=\{u \mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与集合 $N=\{u \mid u=20p+16q+12r, p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为 ( )

A. $M=N$ B. $M\not\subseteq N, N\not\subseteq M$ C. $M\not\subseteq N$ D. $M\supsetneqq N$

解:由于 $12m+8n+4l=4(3m+2n+l)$,而当 $m,n,l\in\mathbf{Z}$ 时,$3m+2n+l$ 可以为任何整数.(如取 $m=n=0$ 时,$3m+2n+l$ 可取到任意整数)

所以,M 中的元素是4的倍数的数,即 $M=\{u \mid u=4k, k\in\mathbf{Z}\}$.

又 $20p+16q+12r=4(5p+4q+3r)$,当 $p,q,r\in\mathbf{Z}$ 时,$5p+4q+3r$ 可以表示任何整数.(如 $p=-q=k, r=0$,即得 $5p+4q+3r=k$)于是 N 表示"4的倍数的数的集合",即 $N=\{u \mid u=4k, k\in\mathbf{Z}\}$.

所以 $M=N$,本题选 A.

例 5 设集合 $A=\left\{\frac{n}{2} \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$, $B=\{n \mid n\in\mathbf{Z}\}$, $C=\left\{n+\frac{1}{2} \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$, $D=\left\{\frac{n}{3}+\frac{1}{6} \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$,则下列关系中,成立的是 ( )

A. $A\subsetneqq B\subsetneqq C\subsetneqq D$ B. $A\cap B=\varnothing, C\cap D=\varnothing$

C. $A=(B\cup C), C\subsetneqq D$ D. $A\cup B=B, C\cap D=\varnothing$

解:设 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时,$\frac{n}{2}=k$,此时 $A=B$.

当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时,$\frac{n}{2}=k+\frac{1}{2}$,此时 $A=C$.

因此 $A=B\cup C$.

又 $n+\frac{1}{2}=\frac{2n+1}{2}, \frac{n}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2n+1}{6}, n\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \quad C\subsetneqq D$,故本题选 C.

特别提示:根据集合中元素的结构特征,建立两集合中元素的对应关系,是确定集

合与集合之间关系的基本方法,用此法可以解决一些颇具技巧性的集合综合题.

讨论与延伸:设 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$,若 X 是 S_n 的子集,把 X 中的所有数的和称为 X 的"容量"(规定空集的容量为0),若 X 的容量为奇(偶)数,则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集.

(1)求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等;

(2)求证:当 $n\geqslant 3$ 时,S_n 的所有奇子集容量的和与所有偶子集容量之和相等;

(3)求 $n\geqslant 3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量的和.

证明:(1)首先建立 S_n 的奇子集与偶子集之间的一一对应关系.

设集合 B 为 S_n 的一个偶子集,令

$$A=\begin{cases}B\cup\{1\} & (\text{当 } 1\notin B \text{ 时}),\\ B\setminus\{1\} & (\text{当 } 1\in B \text{ 时}),\end{cases}$$

其中"$B\setminus\{1\}$"表示把集合 B 中的元素"1"去掉,由剩下的元素组成的集合,

则 A 为 S_n 的奇子集.

反之,对于 S_n 的任一奇子集 A,令

$$B=\begin{cases}A\cup\{1\} & (\text{当 } 1\notin A \text{ 时}),\\ A\setminus\{1\} & (\text{当 } 1\in A \text{ 时}),\end{cases}$$

则 B 为 S_n 的偶子集.

这说明在 S_n 的奇子集与偶子集之间建立了一个一一对应的关系,于是可知 S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(2)对于每个数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,$S_n$ 的含有 i 的子集共 2^{n-1} 个,由(1)可知,当 $i\neq 1$ 时,这 2^{n-1} 个含 i 的子集中有一半是奇子集,一半是偶子集.当 $i=1$ 时,可转而考虑把(1)中的1换成3.于是仍得含 i 的子集中有一半是奇子集,一半是偶子集.

所以,在计算 S_n 的所有奇子集容量之和与偶子集容量之和时,每个数 i 都分别在相应的和中计算了 2^{n-2} 次.这就是说,S_n 的所有奇子集容量之和与偶子集容量之和相等.

(3)由(2)的证明过程知,S_n 的所有奇子集容量和为

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^{n-2}=\frac{1}{2}(n+1)n\cdot 2^{n-2}=n(n+1)\cdot 2^{n-3}.$$

【拓展练习】一不留神,就把这部分内容掌握了。

1.集合 A 与 B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对,则这样的 (A,B) 对的个数有 ( )

A.8 B.9 C.26 D.27

2.点集 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right\}$ 中元素个数为 ( )

A.0 B.1 C.2 D.多于2

3.若 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,则 $M\cap N$ 的元素个数为 ( )

A.4 B.5 C.8 D.9

4.集合 $S=\{0,1,2,3,4,5\}$,A 是 S 的一个子集,当 $x\in A$ 时,若有 $x-1\notin A$,且 $x+1\notin$

A,则称 x 为 A 的一个"孤立元素",那么 S 中无"孤立元素"的4元子集的个数是　(　　)

A.4个　　B.5个　　C.6个　　D.7个

5.设集合 $A=\left\{x \,\middle|\, -1\leqslant \log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2}, x>1, \text{且 } x\in \mathbf{N}\right\}$,则 A 的真子集的个数为　(　　)

A.$2^{90}-1$　　B.2^{90}　　C.$2^{80}-1$　　D.2^{80}

6.设集合 $S=\{1,2,3,\cdots,30\}$,集合 $P=\{x\mid x=x_1+x_2, x_1\in S, x_2\in S, \text{且 } x_1\neq x_2\}$,则集合 P 的真子集共有　(　　)

A.$(2^{27}-1)$个　　B.$(2^{30}-1)$个　　C.$(2^{55}-1)$个　　D.$(2^{57}-1)$个

7.已知全集 $U=\mathbf{Z}$, $M=\{x\mid x=2n, n\in\mathbf{Z}\}$, $S=\{x\mid x=3n, n\in\mathbf{Z}\}$,则 $M\cap \complement_U S$ 是　(　　)

A.$\{x\mid x=6n\pm 2, n\in\mathbf{Z}\}$　　B.$\{x\mid x=6n\pm 1, n\in\mathbf{Z}\}$

C.$\{x\mid x=4n\pm 1, n\in\mathbf{Z}\}$　　D.$\{x\mid x=3n\pm 1, n\in\mathbf{Z}\}$

8.平面上有三个点集 M、N、P, $M=\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$, $N=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{2}\right\}$, $P=\{(x,y)\mid |x+y|<1, |x|<1, |y|<1\}$,则　(　　)

A.$M\subsetneqq P\subsetneqq N$　　B.$M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　C.$P\subsetneqq N\subsetneqq M$　　D.以上都不对

9.若 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$,且 $A\cap B=\{2,5\}$,则 $a=$________.

10.已知非空集合 $M=\{x\mid 2k+1\leqslant x\leqslant 3k-5\}$ 与集合 $P=\{x\mid x^2-30x+125\leqslant 0\}$ 满足 $M\subseteq(M\cap P)$,则实数 k 的取值范围是________.

11.现定义一种运算⊗;当 m,n 都是正偶数或都是正奇数时, $m\otimes n=m+n$;当 m,n 中一个为正奇数,另一个为正偶数时, $m\otimes n=mn$,则集合 $M=\{(a,b)\mid a\otimes b=36, a\in \mathbf{N}_+, b\in\mathbf{N}_+\}$ 中的元素个数是________个.

12.对于集合 $M=\{x\mid x=3n, n=1,2,3,4\}$, $N=\{x\mid x=3^k, k=1,2,3\}$,若有集合 S 满足 $M\cap N\subseteq S\subseteq M\cup N$,则这样的 S 有多少个?

13.有1999个集合,每个集合有45个元素,任意两个集合的并集有89个元素,问这1999个集合的并集有多少个元素?

14.已知集合 $P=\{x\mid x^2+2tx-4t-3>0\}$, $Q=\{x\mid x^2+2tx-2t=0\}$,定义 $A=\{t\mid P=\mathbf{R}\}$,集合 $B=\{t\mid Q\neq\varnothing\}$,其中 x,t 均为实数.

(1)求 $A\cap B$;

(2)设 m 为实数, $g(m)=m^2-3$,求 $M=\{m\mid g(m)\in A\cap B\}$.

15.已知对任意实数 x,函数 $f(x)$ 都有定义,且 $f^2(x)\leqslant 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$,如果集合 $A=\{a\mid f(a)>a^2\}$ 不是空集,试证 A 是无限集.

【拓展练习答案】可不要提前偷看哟!

1. a_1,a_2,a_3 中的每一个元素有 3 种选择,即恰属于 A、恰属于 B、同时属于 A 与 B,故有 $3^3=27$ 个对,选 D.

2. B. $\because$ $x>0,y>0,x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}=xy$. 当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$,即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$,$y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$时,等号成立.

3. D. 依题意 $\tan\pi y=0,\sin\pi x=0$,于是得 $y\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}$,由 $x^2+y^2\leqslant 2$,$x\in\{-1,0,1\}$,$y\in\{-1,0,1\}$.

4. C. 由相邻数字构成的元素都不是"孤立元素",所以 S 中无"孤立元素"的 4 元子集分两类,第一类是由 4 个相邻数字构成,有 3 个子集;第二类是 4 个元素分为两组,每一组的两个元素为相邻的数字有 3 个,故共 6 个.

5. A. 易得 $A=\{x\mid 10\leqslant x<100,x>1,x\in\mathbf{N}\}$.

6. D. 最小元素为 $1+2=3$,最大元素为 $29+30=59$,

$\therefore$ P 的元素个数为 $59-3+1=57$.

7. A. $M\cap\complement_U S$ 中元素为不被 3 整除的偶数.

8. A. 利用解析几何知识作出集合 M、N、P 所表示的区域.

9. $a=2$. 由 $5\in A$,得 $a^3-2a^2-a+7=5$,解得 $a=-1,1,2$. 经检验 $a=2$.

10. $6\leqslant k\leqslant 10$.

11. 41. 因为 $36=1+35=3+33=5+31=\cdots=33+3=35+1$,共 18 个,又 $36=2+34=4+32=\cdots=32+4=34+2$,共 17 个. $36=1\times 36=3\times 12=4\times 9=9\times 4=12\times 3=36\times 1$,共 6 个. 所以 M 中元素的个数是 $18+17+6=41$.

12. 易知 $M=\{3,6,9,12\}$,$N=\{3,9,27\}$,所以 $M\cap N=\{3,9\}$,$M\cup N=\{3,6,9,12,27\}$,则 S 可由 $S=\{3,9\}\cup A$,且 $A\subseteq\{6,12,27\}$得到.

问题归结为求 A 的个数,即集合$\{6,12,27\}$的子集数. 所以,S 有 $2^3=8$ 个.

13. 依题意可找到这样的 1999 个集合,它们都含有一个公共元素 a,而且每两个集合不含 a 以外的公共元素.

但是否仅这一种可能性呢?

因任意两个集合的并集有 89 个元素,1999 个集合中的任两个集合有且只有一个公共元素,则易知这 1999 个集合中必有一个集合 A 中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中,设为 $A_1,A_2,\cdots,A_{45}$,其余的设为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1998}$.

设 B 为 $A_{46},\cdots,A_{1998}$中的任一个集合,且 $a\notin B$,由题设 B 与 $A,A_1,A_2,\cdots,A_{45}$都有一个公共元素,则 B 中有 46 个元素,且这 46 个元素各不相同. 这与题设矛盾,所以这 1999 个集合中均含有 a.

故所求结果为 $1999\times 44+1=87957$,即这 1999 个集合的并集有 87957 个元素.

14. (1)由 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立,得 $\Delta_1=(2t)^2-4(-4t-3)<0\Rightarrow -3<t<-1$,

$\therefore$ $A=\{t\mid -3<t<-1\}$.

方程 $x^2+2tx-2t=0$ 有实数解，则 $\Delta_2=(2t)^2-4(-2t)\geqslant 0\Rightarrow t\geqslant 0$，或 $t\leqslant -2$，

$\therefore\quad B=\{t\mid t\leqslant -2$，或 $t\geqslant 0\}$.

$\therefore\quad A\cap B=\{t\mid -3<t\leqslant -2\}$.

(2)设 $g(m)=u$，则问题转化为已知 $u=g(m)$ 的值域为 $u\in(-3,-2]$，求其定义域.

令 $-3<m^2-3\leqslant -2$，得 $-1\leqslant m<0$，或 $0<m\leqslant 1$.

$\therefore\quad M=\{m\mid -1\leqslant m<0$，或 $0<m\leqslant 1\}$.

15. 由已知 $f^2(0)\leqslant 2\times 0^2\times f\left(\frac{0}{2}\right)$，即 $f^2(0)\leqslant 0$，$\therefore\quad f(0)=0$.

又若 $x\neq 0$，则 $f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2x^2}f^2(x)\geqslant 0$，即对于一切 x，$f(x)$ 都非负.

因 A 不是空集，故必存在 $a\in\mathbf{R}$，使 $a\in A$，即 $f(a)>a^2$ 成立.

由 $f(0)=0$，知 $a\neq 0$. 于是，$f(a)>a^2>0$，从而 $a^4<f^2(a)\leqslant 2\cdot a^2\cdot f\left(\frac{a}{2}\right)$.

$\therefore\quad f\left(\frac{a}{2}\right)>\frac{1}{2}a^2>\left(\frac{1}{2}a\right)^2$，$\therefore\quad\frac{a}{2}\in A$.

同理，当 $\frac{a}{2}\in A$ 时，$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\in A$，即 $\frac{a}{2^2}\in A$.

依次类推，可知若 $a\in A$，则 $\frac{a}{2^n}\in A(n\in\mathbf{N}_+)$.

故集合 A 有无数个元素，即 A 是无限集.

容斥原理与简易逻辑

正确的道路是这样,吸取你的前辈所做的一切,然后再往前走.

——列夫·托尔斯泰

【奥赛赛点】嗯……现在……我们讲一讲……

现行高中教材对有限集合的元素个数作了如下介绍:

对任意两个有限集合 A,B,有 $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$.

对此我们可以推广为

对任意 n 个有限集合 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,则有

$$\text{card}(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n)=[\text{card}(S_1)+\text{card}(S_2)+\cdots+\text{card}(S_n)]-[\text{card}(S_1\cap S_2)+\text{card}(S_1\cap S_3)+\cdots+\text{card}(S_1\cap S_n)+\cdots+\text{card}(S_{n-1}\cap S_n)]+[\text{card}(S_1\cap S_2\cap S_3)+\cdots+\text{card}(S_{n-2}\cap S_{n-1}\cap S_n)]-\cdots+(-1)^{n-1}\text{card}(S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n).$$

我们称这一公式为容斥原理.利用此原理可解决一类求有限集合元素个数的问题.

【典型示例】看看以前是怎么考的。

例 1 在小于 2001 的正整数中,试确定有多少个整数,既不能被 5 整除,也不能被 7 整除.

解:设小于 2001 的正整数的集合为 S,S 中能被 5 整除的整数集合为 A_1,能被 7 整除的整数集合为 A_2.则

$$\text{card}(S)=2000,\text{card}(A_1)=\left[\frac{2000}{5}\right]=400,\text{card}(A_2)=\left[\frac{2000}{7}\right]=285.$$

S 中既能被 5 整除,又能被 7 整除的数的个数为 $\text{card}(A_1\cap A_2)=\left[\frac{2000}{35}\right]=57$.

S 中能被 5 整除或能被 7 整除的数的个数为 $\text{card}(A_1\cup A_2)=\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)-\text{card}(A_1\cap A_2)=400+285-57=628$.

所以,S 中既不能被 5 整除,也不能被 7 整除的元素的个数为

$\text{card}(S)-\text{card}(A_1\cup A_2)=2000-628=1372$.

特别提示:(1)应用容斥原理求解问题的关键是:在全集中确定具有某种性质的子集,以及其集合中元素的个数.

(2)本例直接求解较困难,转化为求其反面,即从“补集”入手,体现“正难则反”的思想.

讨论与延伸:在 a、b、c、d、e、f 六个字母的全排列中,不出现 ace 和 df 的排列个数.