



中国计算机学会学术著作丛书

计算几何

——算法设计、分析及应用
(第5版)

周培德 著

清华大学出版社



中国计算机学会学术著作丛书

计算几何
—— 算法设计、分析及应用
(第5版)

Computational Geometry
Algorithm Design, Analysis
and Applications
(Fifth Edition)

周培德 著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了计算几何中的基本概念、求解诸多问题的算法及复杂性分析,概括了求解几何问题所特有的许多思想方法、几何结构与数据结构。全书共分 11 章,包括:预备知识,几何查找(检索),多边形,凸壳及其应用,Voronoi 图、三角剖分及其应用,交与并及其应用,多边形的获取及相关问题,几何体的划分与等分,路径与回路,几何拓扑网络设计,图形学习、推理及判定等。

本书可作为高等院校计算机、自动化等专业研究生或本科高年级学生的教材或教学参考书,也可供软件开发人员、相关专业科技工作者参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

计算几何:算法设计、分析及应用/周培德著. —5 版. —北京:清华大学出版社,2016
(中国计算机学会学术著作丛书)
ISBN 978-7-302-44160-1

I. ①计… II. ①周… III. ①电子计算机—算法设计 ②电子计算机—算法分析
IV. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 148569 号

责任编辑:薛 慧
封面设计:常雪影
责任校对:赵丽敏
责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:175mm×245mm 印 张:54 字 数:1054 千字

版 次:2000 年 5 月第 1 版 2016 年 10 月第 5 版 印 次:2016 年 10 月第 1 次印刷

印 数:1~2000

定 价:149.00 元

产品编号:060366-01

第5版前言

Foreword

20

11年11月至2016年4月,作者对圆集的凸壳、关联于圆的 Voronoi 图、曲面上点集的三角剖分以及飞机类型的识别、人脸图像识别、海洋划界等许多实际问题进行了深入研究,生产出 201 个算法,并编入 37 节内,原第 4 版第 1、3~9 章内容均有增加,此外还增加了第 10 章。下面简要介绍各章增补情况。

面对百万多个点,要重建三维空间中的平面,给定的数据出现大量的冗余,如何处理这些数据,使平面方程式能准确、快速地建立起来,这是 3.8.5 节要解决的问题。此外,3.8.6 节介绍 3 种不同情况下平面曲线的构造,3.8.7 节叙述几种飞机类型的识别及凸壳的几种应用。上述问题的解决都存在一个共性,即巧妙地利用了点集的凸壳。凸壳利用得好,看似困难的问题就不难了。

采用网格化、部分网格内点集凸壳及特殊搜索技术是解决与点云有关的各种问题的关键,其细节请见 4.9.18 节与 4.9.19 节。此外,考虑了圆集的凸壳及 Voronoi 图。圆集的凸壳问题比点集的凸壳问题困难,这是因为前者有两个变量(圆心位置及圆半径),而后者只有一个变量(点的位置)。第 4 章最后两节介绍如何利用平面点集三角剖分方法解决曲面上点集三角剖分问题以及指纹识别问题。

5.6.6 节介绍了三个问题的求解:水平、垂直边多边形逼近椭圆、矩形与椭圆的交域及交域面积近似值计算。对于

第 1 个问题,作者提出了三种方法。值得注意的是,对椭圆不同弧段应采用不同方法,可以获得好的逼近效果。第 3 个问题要求将交域划分为数目尽量少的矩形与直角三角形(斜边为椭圆弧)。5.6.7 节叙述三种不同情况下紧致边界的计算。5.6.8 节描述的两个算法解决了自动控制领域中极其困难的分配控制问题。

什么样的基本模块可以进行无空洞拼接?这是 6.23 节要解决的问题。6.24 节至 6.26 节分别介绍圆形域、直角多边形域、非网格化多边形域等的拼接问题,提出解决这些问题的有趣且高效的算法。6.27 节讨论的问题是 6.21 节呈现问题的推广。此外,从大量数字信息中寻找有用的能表示几何体的数字信息(6.28 节)以及海洋划界方法(6.29 节)的介绍等,均为第 6 章的增补内容。

第 7 章增加了三部分内容:增加点的属性并改变划分方式(7.7 节);多个相交的圆划分平面点集(7.8 节);正方形内 2^k 个点的划分(7.9 节)。虽然都是划分问题,但解决问题的方法却迥然不同。

迷宫问题的变形分两种情况:所有相邻网格之间均有门顶点对及平面(无网格)上给定多个出口与入口,要求寻找入口与出口之间的路径(8.11 节)。8.12 节介绍网络中寻找路径及回路的方法。第 8 章最后三节中 8.13 节所考虑的最短路径问题是一类特殊优化问题,它不是以减少路径长度为目标,而是以多边形个数要尽量少为目标。8.14 节叙述点、多边形、多面体之间最短距离。8.15 节介绍球面上货郎担问题的求解及 DNA 双螺旋结构长链起源的探索。

由单点或线段两端点起始,按一定规则生成若干个子结点,然后再由子结点生成下一代子结点,如此反复,直至达到目标代数。如何用计算机实现这个过程,是 9.2.4 节讨论的内容。第 9 章增加的另一节是 9.2.7 节,该节介绍基本网格通过不同的连接方式可以得到不同的网格图形。

当图形按一定规则(或称规律)变动形成图形序列时,如何寻找图形的变动规则,并利用这些规则进行推理及判断,这是第 10 章介绍的内容。10.1 节至 10.9 节叙述了在多种情况下寻找规则的各种方法,内容丰富而有趣。

作者在对上述问题研究过程中,发现 7 个问题十分困难,故将这些问题作为待解决问题。待解决问题不是习题。如果待解决问题获得解决,那么对本学科的发展将会有一定的推动作用。

第 5 版全书 504 个算法(其中 382 个已编码,122 个未编码)均为作者的原创性研究成果。这些算法中已实现的算法,其效果优于同类算法。由于篇幅所限,不可能将结果比较全部列出。此外,第 5 版保留第 4 版中算法及章节等的编码,并且 122 个未编码算法以粗黑体表示,以便读者查阅。

作者的水平与能力十分有限,书中的缺点和错误在所难免,欢迎读者批评指正。

周培德

2016 年 4 月

E-mail: Zhou_pd@sina.com; Zhoupeide2008@163.com

第1版前言

Foreword

19

75年,Shamos(沙莫斯)和 Hoey(霍伊)利用计算机有效地计算平面点集的 Voronoi 图,并发表了一篇著名论文,从此计算几何诞生了。自那时以来该研究领域取得了辉煌的成果,使得计算几何成为理论计算机科学领域中一个新的极有生命力的子领域,并且,计算几何中的研究成果已在计算机图形学、化学、统计分析、模式识别、地理数据库以及其他许多领域中得到了广泛的应用。

计算几何研究的典型问题由几何基元 (geometric primitives)、查找、优化等问题类组成。

首先,几何基元包括凸壳和 Voronoi 图、多边形的三角剖分、划分问题 (partition problems) 与相交问题。 E^{d+1} 中点集 S 的下凸壳在 E^d 中的投影恰好是点集 S 在 E^d 中投影点的 Delaunay 三角剖分,然后由 Delaunay 三角剖分可以容易地得到 Voronoi 图。换言之, Voronoi 图是凸壳的特例,因此构造 E^{d+1} 中点集凸壳的算法也可以用于构造 E^d 中点集的 Voronoi 图。对多边形的三角剖分问题可以提出如下要求:设计复杂度低的算法构造多边形三角剖分以及设计三角形最小角最大化的三角剖分算法;分割线段长度之和最小的三角剖分算法。前者已有线性时间的算法。划分问题是多边形三角剖分的推广,它要求把几何体划分成若干好的部分。所谓好的部分通常是指下述两个目标之一:

划分成尽量少的凸部分；各凸部分最小角最大化。另外，在几何体中可以加入 Steiner 点（新的顶点），然后再进行划分，使得划分线段长度之和最小化或者提出其他要求。二维中的典型相交问题是：给定平面上 n 条直线段，确定所有的相交线对。三维中的相交问题一般考虑两个凸多面体的交以及两个多面体的交。

其次，几何查找包括点定位、可视化、区域查找等问题。计算机图形学、数据库中的区域查找及地理图形中的点定位等都是几何查找中的典型例子。在平面细分(planar subdivision)中定位一个询问点或者在 E^d ($d \geq 3$) 内由 n 个超平面构成的结构中定位询问点的问题是一个典型问题，现在不仅有解决这个问题的确定型算法，而且设计了动态随机增量算法。给定平面上 n 个顶点的简单多边形 P ，由点 q 向任一方向引射线 l ，确定 l 与 P 相交的第一条边，这个问题的解决为可视化问题的求解提供了前提。 E^d 中给定点集 S 及区域集合 B ， $b \in B$ ，要求在 b 中查找 S 中的点，这是区域查找问题。

再次，几何优化包括参数查找和线性规划。参数查找技术是将一个优化问题的检验算法变成寻找解的算法，它必须满足某些条件（检验算法是可以并行的），并且具有广泛的应用性。例如，可用它来求解平面中 2-中心问题，还可以用来完成三维空间中射线的安置。众所周知，有确定变元数目的线性规划问题已有线性时间算法求解，但对于广义线性规划是否存在多项式时间算法还有待进一步研究。

此外，计算几何中各种问题的下界的确定、推导下界的方法以及求解各种几何问题的算法的复杂性分析等，也是计算几何研究的重要内容。

计算几何中引入随机化之后，已经设计出非常有效的概率算法求解诸多几何问题。随机化给几何算法设计带来两种新的设计思想：基于随机抽样的分治方法；利用随机顺序插入产生随机增量结构。此外，随机几何算法的复杂性分析以及随机增量结构的非随机化也是重要的研究内容。

计算几何的新近发展包括几何抽样理论、计算实代数几何、计算拓扑、运动规划、并行计算几何、隐藏面的移动、结构和图形、网络生成以及计算机视觉中的几何问题等。计算机在各学科领域深层次的应用将为计算几何提出更多的研究课题；反之，计算几何的研究成果也将促进这些学科的进一步发展。

本书是以上述部分问题的前人研究成果与作者在本领域中所做的工作为基础撰写而成的。书中主要叙述解决某些几何问题的算法并兼顾复杂性分析。书中较详细地陈述了 98 个算法，其中 39 个算法是作者提出的，并编号为 $Z_{1,1}$ 算法至 $Z_{10,2}$ 算法。书中的某些 Z 算法是以基本形式出现的，对这些算法可以进行修改并降低复杂性的阶或扩充应用范围，而且实现这些算法的某些步骤需要一些技巧。

全书共分 11 章。第 0 章是预备知识。第 1 章介绍几何查找，包括点和点集的定位、范围查找与平面网络的处理。第 2 章叙述多边形与多边形的划分及

相关问题。第3、4、7章分别介绍计算几何中的三个基本结构：凸壳、Voronoi图与几何体的排列。第5章阐述线段、多边形、半平面、凸多面体的交，多边形的并及应用。第6章介绍矩形几何。第8章叙述算法的运动规划，所讨论的问题源于机器人学。第9章的中心论题是几何拓扑网络设计，其内容具有广泛的实用性。第10章介绍随机几何算法和并行几何算法。

描述算法有诸多形式。为了便于理解算法又不至于产生二义性，而且利于编制上机程序，本书描述算法就不拘泥于某一种形式，但以步骤、拟ALGOL语言、中文语句、数学表达式及逻辑运算符等相结合的描述形式为主。另外，本书以处于一般位置的几何体为讨论对象。对于退化情况，则另行处理。

设计求解几何问题(或能转化为几何问题的问题)的算法应具备两个条件，一是分析并理解问题的几何特征；二是掌握计算几何中的几何结构、特殊的算法设计方法及相应的数据结构。计算几何和计算机科学中的算法设计与分析、数据结构等学科关系密切，它常常要用到这些学科的知识。但由于篇幅有限，本书将重点阐述计算几何学科的思想方法、几何结构、几何问题以及求解这些问题的算法和复杂性分析，而对算法分析、数据结构中的相关知识只简略地回忆。因此，阅读本书的读者应具备算法设计与分析、数据结构、程序设计等领域的知识，并能熟练地掌握某种高级语言，比如C语言，以便上机实现书中描述的算法。

本书可作为计算几何、计算理论、计算机图形学、计算机辅助设计、机器人学及相关领域科技工作者的参考书，也可作为计算机科学有关专业研究生或本科高年级学生的教材使用。

本书在撰写中引用了 Preparata F P 和 Shamos M I, O'Rourke J, Mulmuley K, MacGregor Smith J, Mehlhorn K, Chazelle B, Goodrich M T 等 诸多专家、学者的文献；清华大学教授卢开澄先生仔细审阅了本书底稿，并提出许多宝贵意见；余荣老师提供了大量参考资料，为缩短本书的撰写周期付出了辛勤的劳动，作者在此一并表示衷心的感谢。此外，还要感谢清华大学出版社和广西科学技术出版社的“计算机学术著作出版基金”所给予的资助。

由于作者水平有限，书中定有缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

周培德

1999年12月

于北京理工大学计算机系

目 录

Contents

第 0 章 预备知识	1
0.1 算法与数据结构	2
0.1.1 算法	2
0.1.2 数据结构	5
0.2 相关的几何知识	9
0.2.1 基本定义	9
0.2.2 线性变换群下的不变量	11
0.2.3 几何对偶性	12
0.3 计算模型	13
第 1 章 几何查找(检索)	17
1.1 点定位问题	18
1.1.1 点 q 是否在多边形 P 内	19
1.1.2 确定点 q 在平面剖分中的位置	23
1.1.3 Z_{1-3} 算法(判定点 q 在哪个三角形的 算法)	27
1.2 判定点集是否在多边形内	28
1.3 平面网络的处理与点 q 的定位	30
1.4 平面上链的处理与点 q 的定位	33
1.5 平面上线段的处理与点 q 的定位	35
1.6 判定点是否在多边形内部的新算法	40

第 2 章 多边形	43
2.1 凸多边形	43
2.2 简单多边形	49
2.3 多边形的三角剖分	54
2.4 多边形的凸划分	58
2.5 对多边形链的监视	65
2.6 线段划分多边形	69
2.7 凸多边形的内接最大三角形及外切最小三角形	74
第 3 章 凸壳及其应用	80
3.1 凸壳的基本概念	80
3.2 计算平面点集凸壳的算法	84
3.3 计算平面多边形顶点凸壳的算法	87
3.4 计算平面多边形链顶点凸壳的算法	90
3.4.1 概念、算法思想与描述	91
3.4.2 解释与时间复杂性	93
3.5 计算平面线段集凸壳的算法	94
3.6 计算三维空间点集凸壳的算法	102
3.6.1 基本概念	102
3.6.2 Z_{3-6} 算法(三维凸壳)	103
3.7 时间复杂性低于下界 $O(n \log n)$ 的凸壳算法	105
3.8 凸壳的应用	108
3.8.1 确定任意多边形的凸、凹顶点	108
3.8.2 利用凸壳求解货郎担问题	110
3.8.3 凸多边形直径	113
3.8.4 连接两个多边形形成一条回路	115
3.8.5 三维空间中平面群的重建	118
3.8.6 构造平面曲线	122
3.8.7 某些机型的识别及其他应用	126
第 4 章 Voronoi 图、三角剖分及其应用	139
4.1 Voronoi 图的基本概念	140
4.2 构造 Voronoi 图的算法	144
4.2.1 Z'_{4-1} 算法(计算平面点集的 Voronoi 图)	144
4.2.2 构造最远点意义下 Voronoi 图的算法	148

4.3	平面点集的三角剖分	150
4.3.1	Delaunay 三角剖分与多边形内部点集的三角剖分	151
4.3.2	平面点集三角剖分的算法	153
4.4	平面线段集的三角剖分	159
4.5	平面点线集的三角剖分	163
4.6	平面点集的伪三角剖分	168
4.7	伪三角形的产生	176
4.8	三角剖分的表示	181
4.9	推广及应用	188
4.9.1	最近邻近	188
4.9.2	最大化最小角的三角剖分	189
4.9.3	最大空圆	190
4.9.4	最小生成树	193
4.9.5	货郎担问题	194
4.9.6	中轴	195
4.9.7	Voronoi 图与凸壳的关系	204
4.9.8	Voronoi 图的推广	206
4.9.9	有约束的 Voronoi 图	214
4.9.10	线段集的 Voronoi 图	215
4.9.11	关联于多边形的 Voronoi 图	221
4.9.12	点线集的 Voronoi 图	228
4.9.13	点、水平、垂直正交线段集的 Voronoi 图	231
4.9.14	几何数据压缩	237
4.9.15	车辆定位导航系统的新定位算法	241
4.9.16	调色	243
4.9.17	点集增(删)点之后的三角剖分	245
4.9.18	点云的处理及相关问题的求解	246
4.9.19	点云曲面边界线的提取及相关问题的求解	255
4.9.20	关联于圆的 Voronoi 图	263
4.9.21	曲面上点集的三角剖分	275
4.9.22	指纹识别算法	278
第 5 章	交与并及其应用	285
5.1	线段交的算法	285
5.2	多边形的交	294

5.2.1	凸多边形交的算法	294
5.2.2	星形多边形交的算法	297
5.2.3	任意简单多边形交的算法	298
5.3	半平面的交及其应用	301
5.3.1	半平面的交	301
5.3.2	两个变量的线性规划	302
5.4	多边形的并	308
5.5	凸多面体的交	313
5.6	应用	317
5.6.1	地图匹配	317
5.6.2	地图数据的处理	322
5.6.3	线段与凸多面体面的交	322
5.6.4	与线段集中线段均相交的直线及其存在区域	323
5.6.5	特定射线询问	327
5.6.6	水平、垂直边多边形逼近椭圆	331
5.6.7	紧致边界	343
5.6.8	射线与隐形凸多面体的交	352
第6章	多边形的获取及相关问题	356
6.1	连接不相交线段成简单多边形(链)	356
6.2	红外图像边缘提取	361
6.3	提取可见光图像的边缘	367
6.4	图像边界点行排列转换为顺序排列	373
6.5	数字图像中目标边界的多边形表示	377
6.6	包含密集点、线集多边形的获取	381
6.7	满足特定条件的多边形划分	388
6.8	多边形与多边形链	391
6.9	圆弧、直线段组成的多边形顶点凸、凹性的确定	394
6.10	多边形放大、缩小及移动	396
6.11	带状多边形的处理	398
6.12	下料问题(1)	399
6.13	下料问题(2)	407
6.14	下料问题(3)	416
6.15	线锯问题(1)	425
6.16	多边形(链)的匹配(1)	432

6.17	多边形(链)的匹配(2)	434
6.18	构造凸多边形	439
6.19	具有属性点集的控制区域	442
6.20	多边形内区域的划分及多边形(点集)中心点的确定	447
6.21	满足一定条件的多边形划分(1)	453
6.22	特定条件下凸多边形的缩小与放大	458
6.23	下料问题(4)	463
6.24	线锯问题(2)	469
6.25	线锯问题(3)	472
6.26	线锯问题(4)	475
6.27	满足一定条件的多边形划分(2)	478
6.28	隐形几何体(线段、多边形、长方体)	485
6.29	海洋划界	489
第7章	几何体的划分与等分	493
7.1	平面上不同类型点集的划分	493
7.2	多边形内不同类型点集的等分	503
7.3	平面上不同类型线段集的划分	509
7.4	平面上不同类型线段集的等分	516
7.5	平面上不同类型点线集的划分与等分	518
7.6	链、多边形的划分与等分	520
7.7	平面上点集划分的推广	529
7.8	用圆集划分平面点集	534
7.9	正方形内 2^k 个点的划分	539
第8章	路径与回路	549
8.1	最短路径	550
8.1.1	可视图及其构造	550
8.1.2	Z_{8-1} 算法(寻求网络中任意两点间最短路径的算法)	551
8.1.3	多面体面上任意两点之间的最短路径	555
8.1.4	货运汽车调度及行驶路径问题	562
8.2	最短路径问题的变型	564
8.3	满足一定条件的运动规划	570
8.4	多边形内点之间的可视图	571
8.5	多边形内任意两点之间的最短路径	579

8.6	自主车自动定位及确定行车方向	585
8.7	迷宫问题(1)	589
8.8	棋盘上的路径与回路	595
8.9	选择道路及判定道路的通过能力	598
8.10	多边形内中心区域的确定	604
8.11	迷宫问题(2)	615
8.12	网络中路径问题求解的一种搜索方法及回路问题的求解	620
8.13	多边形集中任意两点之间最短路径(含多边形数目最少)	627
8.14	点、多边形、多面体之间的最短距离	630
8.15	球面上货郎担问题的求解及 DNA 双螺旋结构长链起源的探索	636
第 9 章 几何拓扑网络设计		645
9.1	$G(S)$ 问题	646
9.1.1	最大间隙问题(MAX G)	647
9.1.2	点集中最大空凸多边形问题及最大空矩形问题	649
9.1.3	线段集中最大空凸多边形问题	653
9.1.4	点线集中最大空凸多边形问题	656
9.1.5	最小覆盖问题(MIN C)	659
9.1.6	包含平面点集的最小正方形	665
9.1.7	子点集包含问题	669
9.1.8	2-中心问题	674
9.1.9	k -中心问题	679
9.1.10	最近对问题(CPP)	688
9.1.11	所有最近邻近问题(ANNP)	689
9.1.12	邮局问题(POFP)	690
9.1.13	寻找具有属性点集的最近点对或点团	691
9.2	$G(E)$ 问题	695
9.2.1	EMST 问题	695
9.2.2	线段集、点线集的最小生成树	699
9.2.3	直线最小生成树及其相关问题	701
9.2.4	由单点或线段端点起始的生成树	708
9.2.5	欧几里得最大生成树问题(EMXT)	712
9.2.6	最小生成网络	715
9.2.7	等长线段构成网格的变形	721

9.3	$G(S, E)$ 问题	727
9.3.1	欧几里得 Steiner 最小树问题(ESMT)	728
9.3.2	直线 Steiner 最小树问题(RSMT)	729
9.3.3	求解 ESMT 问题的算法	730
9.4	$G(\Omega)$ 问题	736
9.4.1	有障碍物的最大空隙问题(MAX $G(\Omega)$)	737
9.4.2	多边形集中最大空隙问题	738
9.4.3	具有障碍物的欧几里得最短路径问题(ESPO)	741
9.4.4	求解 E^3 中 ESPO 问题的算法	743
9.4.5	具有障碍物的 Steiner 最小树问题(ESMTO)	755
第 10 章	图形的学习、推理及判定	758
10.1	旋转与翻转	758
10.2	图形的运算	764
10.3	对称性	767
10.4	相似性	770
10.5	不同子域内的配对及正多边形的构造	774
10.6	由边数、子域数、子图位置间关系等寻找规则	788
10.7	图形序列及组合	796
10.8	由图形组成寻找规则	801
10.9	通过学习及或运算寻找规律	807
	待解决的问题	812
	算法一览	815
	参考文献	826
	名词索引	838

第 0 章

预备知识

本

书叙述的内容不属于欧几里得的几何证明公理化范畴，而是属于欧几里得的几何构造，即由算法和复杂性分析所组成。欧几里得的几何构造满足算法的所有要求：无二义性、有穷性、确定性、能行性、输入、输出、正确性等。在欧几里得的几何构造中，限定了可允许使用的工具（直尺和圆规）及原始运算（圆规的一个脚置于一个给定点或一条直线上；作一个圆；直尺的边通过一个给定点；作一条直线）。但欧几里得原始运算并不能胜任所有的几何计算（如角的三等分），这一点直到 19 世纪，阿贝尔、伽罗华等数学家才给出了证明。

在一个几何构造过程中，执行原始运算的总次数称为该过程的复杂性度量，这个概念对应于算法的时间复杂度。同样地，还有对应于算法的空间复杂度的概念。这是欧几里得几何构造过程复杂性的定量测度。

称为计算几何的学科大致有下述几种：Forrest 等人依据样条函数处理曲线和曲面（实际上更接近于数值分析）；Minsky 和 Papert 写的一本名为《感知机》的书（副标题为“计算几何”），该书陈述用简单回路构成的网络实现模式识别的可能性（应属于人工神经网络）；计算机图形学是研究用计算机进行图形信息处理（包括表示、输入、输出、存储、显示、检索与变换等）和图形运算（如图的并、交运算）的一门学科，而不

是算法分析；几何定理的机器证明，主要研究定理证明的探索方法及证明过程的推断，而不是几何本身。本书讨论的内容与上述计算几何学科所研究的内容不同，是属于 Shamos 的文章(1975a)中命名的“计算几何”。为了不与上述“计算几何”的命名混淆，并突出 Shamos 的计算几何是研究几何问题的算法及复杂性的，故本书中将 Shamos 的计算几何称为 S 计算几何，而书名仍称为计算几何。

欧几里得得货郎担问题、最小生成树问题、隐藏线(面)问题和线性规划问题等许多问题是 S 计算几何研究的基本问题。在 19 世纪的文献中，已经出现了对这些问题的算法研究，但对几何问题进行几何算法的系统研究还是近 20 多年的事情。

本书将通过几何问题的研究，在以下各章节中给出 S 计算几何的观点、研究方法与几种重要的几何结构。S 计算几何的一个基本观点是，经典的几何对象的表征常常不适合于有效算法的设计。因此有必要建立一些概念及相关的性质，以适应于有效算法的设计。

本章将介绍有关算法与数据结构的一些知识、几何知识及计算模型。这些内容是以后章节所需要的。

0.1 算法与数据结构

0.1.1 算法

众所周知，算法是求解一个问题类的无二义性的有穷过程。这里的过程是指求解问题执行的一步一步动作的集合，每一步动作只需要有限的存储单元和有限的操作时间。另外，如果详细说明一台典型的计算机以及与这种计算机通信的语言，那么凡用这种语言编写的、可以在给定的计算机上执行的过程便称为算法。随机存取机器(RAM)、图灵机等可以作为典型的计算机，拟 ALGOL 语言作为描述算法而非执行的语言。应该指出，算法不等于程序，因此描述算法的方式将是多种形式的，如在拟 ALGOL 语言的描述中可以使用数学记号和自然语言。为了把算法转换成上机程序，还需要进行编程工作。

算法的复杂性包括算法的时间复杂性和算法的空间复杂性。为了说明复杂性的概念，先介绍问题规模的概念。用一个与问题相关的整数量来衡量问题的大小，该整数量表示输入数据量的尺度，称为问题的规模。比如，行列式的规模可以用其阶数 n 来表示，图问题的规模可以用其边数或顶点数来表示，等等。

利用某算法处理一个问题规模为 n 的输入所需要的时间，称为该算法的时间复杂性。它显然是 n 的函数，记为 $T(n)$ 。

类似地，可以定义算法的空间复杂性 $S(n)$ 。

下面主要讨论算法的时间复杂性。由于一般不需要知道精确的时间耗费，只