

SHUXUE
FUHAO YIYI
HUODE NENGLI YANJIU

数学符号意义
获得能力研究

王成营/著

清华大学出版社



SHUXUE
FUHAO YIYI
HUODE NENGLI YANJIU

数学符号意义
获得能力研究

王成营/著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要探讨如何根据数学符号的形式特征建构多元意义结构,对数学知识进行“精细加工”的问题。本书首先提出问题并分析国内外研究现状,然后探究了符号学理论及其教学意蕴、数学符号及其意义结构、数学符号意义获得能力及其培养,最后得出结论并进行展望,具有较高的学术及参考价值。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数学符号意义获得能力研究 / 王成营 著. —北京:清华大学出版社, 2016
ISBN 978-7-302-44855-6

I. ①数… II. ①王… III. ①数学—符号—研究 IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 201720 号

责任编辑:王荣娉 张雪群

封面设计:赵晋锋

版式设计:周玉娇

责任校对:曹 阳

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:虎彩印艺股份有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×240mm 印 张:20.25 字 数:363 千字

版 次:2016 年 10 月第 1 版

印 次:2016 年 10 月第 1 次印刷

定 价:58.00 元

产品编号:070698-01

前 言

为什么随着年级的增加,许多学生感觉数学越来越难学、越来越枯燥,普遍出现“听而不懂”“懂而不会”“会而不对”的问题?对小学和初中数学教材中的数学概念、数学符号、数学图表、数学公式、数学定理、数学关键词进行分类统计的结果表明,小学生平均每学期需要学习 42 个新符号,而初中生平均每学期需要学习 120 个新符号,几乎是小学生学习量的 3 倍。对小学、初中、高中三个阶段学生的问卷调查表明,学生的数学符号意义获得能力普遍较低,38%的学生不认识学过的数学符号,45%的学生只能说出数学符号的一个意义,只有 17%的学生能够想到两个或两个以上的意义,而且三个学段学生的数学符号意义获得能力无显著差异。这些数据表明,随着年级增加,数学符号的数量急剧增加,形式越来越简洁,意义越来越复杂,学生的数学符号意义获得能力却仍处在低水平,没有得到相应提升,这是导致学生数学学习困难的根本原因。为此,本书提出了研究假设:培养和提高学生的数学符号意义获得能力是解决上述问题的有效方法。

首先,概括阐述了符号学的基本方法和基本原理,作为本书的理论基础。符号学理论认为,任何事物的存在状态和变化规律既受内部组成要素的影响,也受外部环境因素的影响,始终处在由内部要素和外部因素组成的关系结构中;符号是包含符号形式(记号)和符号意义(记号表象)的统一体,不能脱离记号谈论符号意义,也不能脱离符号意义谈论记号;符号都不是孤立存在的,它本身是一个结构,又处于更大的符号结构中;研究符号意义需要全面构建相互关联的包括要素结构、联结结构和意义结构三个层次的符号结构。

其次,应用符号学理论分析教学活动中的符号现象,探讨符号学理论和方法的教学意蕴,对传统的“符号”“知识”“学习”“教学”进行新的诠释。符号本质上是一种能够刺激人的感官,使人产生意义联想的客观存在形式,是一种可以替代认识对象的“感官刺激物”。教学活动中可以刺激学生产生意义联想,帮助学生理解教学内容的实物、模型、手势、视频、教材等一切东西都可看作符号,视作教学资源。知识是由知识外部表征(记号结构)与知识内部表征(认知结构)组成的统一体,本质上是一种符号结构。人的任何想法都可以通过符号以“直观”的方式直接地或通过符号结构以“意会”方式间

接地传递给他人。个体知识的外部表征构成了与现实世界相对应的个体的“记号世界”，个体知识的内部表征构成了与“记号世界”相对应的个体的“经验世界”。由记号结构和认知结构构成的符号结构，代表了个体的所有知识和经验，代表了个体适应和改造现实世界的综合能力。人类的某一感官不可能同时感知整个客观事物，只能感知它的部分属性。感知到的属性被感知者赋予意义后就建立了一个刺激物（记号）与意义（感觉表象）的联结，成为自然符号。当感觉表象被感性思维加工成与客观事物对应的知觉表象（感性经验）时，与感觉表象对应的符号就联结成自然符号结构，并与客观事物建立了对应关系。当感觉表象被理性思维加工成客观世界中不存在的知觉形象（概念）时，人类就需要创造人工符号来表征它，并使建立在概念基础上的理性经验与人工符号结构形成对应关系。因此，学习知识的过程本质上是建构符号结构的过程，具体包括客观事物的经验化、经验的符号化、符号的经验化三个相互转换过程。知识的教学就是教师帮助学生建构符号结构的过程。

再次，应用符号学理论和方法重新界定了数学符号、数学符号意义、数学符号意义获得能力的内涵，分析了影响数学符号意义获得能力培养的主要因素和困难，并结合数学概念教学、数学命题教学和数学问题教学进行了案例研究。在教学活动中，数学符号是一切承载数学信息的符号，主要包括数学自然符号、数学模型符号、数学语音符号、数学文字符号、数学专业符号、数学图表符号、数学行为符号七大类。数学符号意义是指在数学符号刺激下被激活的整个数学符号结构，主要包括数学符号的语符意义、基本意义、转换意义、隐性意义、美学意义、个性化意义、操作意义七种意义，它可通过联想到的所有数学符号的记号的数量来测量。数学符号意义获得能力是指在数学符号刺激下建构包含该数学符号的数学符号结构的能力，主要包括数学符号的形式感知能力、意义联想能力、意义转换能力、意义整合能力和记号操作能力五大能力。影响数学符号意义获得能力培养的因素主要是数学教师的数学符号观和教学资源观、数学教学观和教学方法观。在数学教学实践，数学教师应转变观念，依据《数学课程》的“三维”教学目标要求，科学选择、安排、呈现数学符号资源，灵活应用符号结构分析方法，传授学生建构数学符号意义结构的基本方法和思维模式，探讨数学符号的多元表征，全面建构数学符号意义结构，并使之内化为学生自己的认知结构，提升学生的数学素养，促进学生的全面发展。

最后，概括了本研究的基本逻辑：

（1）无法获得数学符号丰富的数学意义是学生害怕、讨厌数学，感觉数学难学的主要原因；

(2)教师忽视数学符号教学是导致学生数学符号意义获得能力较低的主要原因;

(3)教师片面的数学符号观和知识观是导致教师忽视数学符号教学的主要原因;

(4)数学符号结构中蕴涵了数学知识的所有信息,需要学习者去感知、发现、领悟和建构;

(5)获得数学符号结构中的数学信息需要学生具备较高的数学符号意义获得能力;

(6)培养数学符号意义获得能力的核心是超越数学符号“是什么”的传统思维,努力思考它“意味着什么”;

(7)培养学生的数学符号意义获得能力需要教师转变片面的符号观、知识观、学习观和教学观。

本研究的最终结论是:培养和提高学生的数学符号意义获得能力是解决“数学难学”“数学枯燥”“听而不懂”“懂而不会”“会而不对”等教学难题的一种有效的、可行的、具有可操作性的途径和方法。

受作者水平与学识所限,加之时间仓促,本书中错误、缺点在所难免,恳请读者批评指正,以便将来有机会再版时得以更正。

王成营

2016年6月

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 问题提出	1
1.2 国内外研究现状	6
1.3 研究方法和思路	23
1.4 研究意义	25
第 2 章 符号学理论及其教学意蕴	31
2.1 符号学基本研究方法:结构分析法	31
2.2 符号学基本原理:符号结构的建构	37
2.3 符号学视域中的知识学习与教学	58
第 3 章 数学符号及其意义结构	111
3.1 数学符号的内涵界定	111
3.2 数学符号的意义结构	127
第 4 章 数学符号意义获得能力及其培养	157
4.1 中小学生对数学符号意义获得能力的现状调查	157
4.2 中小学生对数学符号意义获得过程中的主要 困难和错误	180
4.3 数学符号意义获得能力的基本特征	188
4.4 数学符号意义获得能力培养的影响因素	222
4.5 数学符号意义获得能力培养的教学案例	245
第 5 章 结论与展望	277
5.1 研究结论	277
5.2 研究的创新点	278
5.3 研究展望	278
附录	281
附录 A 小学与初中数学教材中数学符号的统计表	281
附录 B 中小学生对数学符号意义获得能力调查问卷	285

附录 C 中小学生数学符号意义获得能力的调查统计表 289

附录 D 数学符号感的行为结构表 295

参考文献 297

后记 313

第1章 绪 论

1.1 问题提出

本书主要探讨如何根据数学符号的形式特征建构多元意义结构,对数学知识进行“精细加工”的问题。该问题的提出主要基于数学教学实践中普遍存在的两个现实问题。

1.1.1 现实问题

1. 新《数学课程标准》中倡导的现代教学理念无法落实到教学实践中

2011年版的九年义务教育《数学课程标准》指出:“教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一,学生是学习的主体,教师是学习的组织者、引导者与合作者。”“数学教学活动应激发学生兴趣,调动学生积极性,引发学生的数学思考,鼓励学生的创造性思维;要注重培养学生良好的数学学习习惯,使学生掌握恰当的数学学习方法。”“学生学习应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。除接受学习外,动手实践、自主探索与合作交流同样是学习数学的重要方式。学生应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程。”“教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础,面向全体学生,注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用,处理好讲授与学生自主学习的关系,引导学生独立思考、主动探索、合作交流,使学生理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法,获得基本的数学活动经验。”这些先进的教学理念在实践中却遇到了诸多困难。首先,教师不知道如何实践这些先进教学理念。《数学课程标准》中虽然举例说明了教师应该如何将基本教学理念转化为教学行为,提出了一些基本要求和原则,却没有提供具体的教学模式和教学方法,教师们仍然感到“无法可依”。其次,教师不敢实践这些先进教学理念。因为现代教学理念和方法与当前的教学

评价标准和制度存在冲突,而教师之间的竞争十分激烈,为了自己的荣誉和利益,教师不敢冒险尝试新的教学方法。最后,师生不具备实践现代教学理念的能力和水平。广大师生已经习惯了传统教学法,除了几个自学能力比较强的学生外,大部分学生理解教师讲授的内容都存在一定的困难,又如何与教师进行实质性的互动呢?师生双方都不知道应该怎样互动。如果学生不能基于自己的理解提出问题,那么学生在互动中必然处于被动地位,也就无法进行富于个性的学习活动。

2. 传统的教学理念和教学方法遭遇了严峻的挑战

随着由知识教育向能力教育的转向,数学考试越来越强调对学生数学能力的考察,传统的“系统讲授+题海战术”的教学方法越来越难以提高学生的考试成绩,具体表现为三个方面:

(1)教学效率低。为了提高学生的考试成绩,师生双方几乎达到了努力的极限——学生为了做完作业经常学习到深夜,教师为了给学生讲题经常“拖堂”“抢课”。然而,师生的辛苦往往换不来考试成绩的提高。相反,高强度的工作和学习严重影响了师生身心健康,使师生关系越来越紧张,学生的“两极分化”现象越来越严重。

(2)教学质量低。从小学、中学,到大学的过程中,除了少部分学生喜欢数学外,大部分学生都说数学是最难学、最不喜欢的学科。小学低年级时,学生都很喜欢数学,家长也都以孩子的语文、数学能够得“双百”为目标。高中毕业时,却有大量学生的数学高考成绩是个位数,甚至是零分。为什么学生的数学成绩变化这么大呢?这说明教师在教学中重视的往往是少部分优生的学习状况,忽视了大部分学生的学习诉求。教师就如马拉松比赛中的“引领员”,只是根据处于“第一集团”的学生的需要确定教学的节奏、强度和速度,却不知道大部分学生已经“排队”,很多学生被远远地抛在后面,无人问津,影响了教学的整体质量。

(3)教学效果差。师生虽然付出了大量的心血,可以说是全世界最累的群体之一,但数学教与学的效果却很差。首先,高强度的“讲与练”严重影响了师生的身心健康,甚至出现了一些校园恶性事件。其次,学生学了就忘的现象非常严重。许多在校大学生都不敢从事辅导初中数学的家教兼职,因为他们连一些初中数学题都不会解了。最后,大部分学生体会不到数学学习的快乐和数学的用处。大部分学生学习数学就是为了考试,只是获得了一些数学解题技巧,并没有形成数学素养,不会从数学的视角、以数学的理性思维解决生活中的实际问题。即使数学成绩很好的学生也没有建立起对数学的感情,比如在国际奥林匹克竞赛中获得一等奖的学生进入清华大学或

北京大学后,选择数学专业的很少,不会把数学作为自己终生的研究方向。

而且,教师在数学教学中发现“教而不懂”“懂而不会”“会而不对”的现象越来越突出,具体表现为:教师辛苦地反复教,学生却说“听不懂课、看不懂书、读不懂题”;学生说“懂了”,教师却发现他们“不会回答问题、不会提出问题、不会解答问题”;学生说“会做”的题,教师却发现学生的“计算结果不对、表达过程不对、解题方法不对”。

因此,许多教师,特别是一些老教师不禁感慨:“我发现自己越来越不懂教学了。”

1.1.2 问题分析

那么,导致上述问题的根本原因是什么?数学教学应该如何改革呢?

坦率地说,导致以上现象和问题的原因是十分复杂的。但我们认为,学生缺乏数学符号意义获得能力,无法从数学符号中获得必要的数学信息是最根本的原因。一方面,学生不能从数学符号中获得数学符号意义,也就失去了与教师对话的前提条件,就没有与教师互动的动机,只能被动地接受、记忆教师的观点;另一方面,学生不能从数学符号中获得数学符号意义,就无法向教师表达自己的理解,教师就无法准确把握学生的真实水平,容易造成数学“教”与“学”的脱节,导致“教而不懂”“懂而不会”“会而不对”现象的发生。那么,是什么原因导致了学生缺乏数学符号意义获得能力呢?

(1)数学教师忽视了“数学知识”与“数学符号”的差异,认为只要让学生记住了教师所讲的“话语”和教材中的“符号”,掌握了所练的数学题,就完成了教学任务。

首先,数学知识有两种存在形态:经验性知识与符号性知识。经验性知识是个体的、内隐的、无法直接传递的,师生之间传递的主要是符号性知识。其次,经验性知识与符号性知识存在本质差异。数学教师“闻道在先”,所掌握的知识是经验性知识,是全面的、整体的、形象的、有趣的、鲜活的,所以“系统讲授”是数学教师最喜欢、最惬意的一种教学方法。数学教师可以在头脑中对数学知识进行随意的转换,讲得“头头是道”“得心应手”,体验作为教师的快感。然而,当数学教师将自己的经验性知识转换为线性的、抽象的、陌生的、枯燥的数学语音符号讲授给学生时,学生感受到的只是语音符号和自己对语音符号意义的理解。这些言语意义只描述了知识的一个侧面或部分,如果学生不能进行认真的反思和体味,很难将线性的数学语音符号的意义整合为有意义的数学形象。最后,数学教师一般基于心理学原理和

自己的语言水平来组织语音符号,进行信息“编码”,而学生具有个性心理差异和不同的语言水平,无法进行类似的信息“解码”,因而学生所获得的意义与教师或专家要表达的意义之间存在较大差距。因此,当教师认为学习数学知识就是“记住教师讲的话,模仿教师的解题方法”“背诵数学教材中的数学概念和数学命题”时,出现上述问题就成为一种必然了。

(2)教师忽视“数学语言”与“自然语言”的差异,不注重学生数学阅读能力的培养。

许多数学家、数学教育家很早就注意到了数学语言的重要性,倡导加强数学语言的教学,培养学生的数学阅读能力。然而,如何实施数学语言教学、如何培养学生的数学阅读能力等问题既没有从理论上得到很好的阐释和论证,也没有具体的、有效的操作模式可循。因此,数学教师在数学教学中普遍忽视数学语言的教学。首先,对数学语言的分类目的不明确。当前,数学教育界一般将数学语言分为文字语言、符号语言、图表语言三类。然而,这种分类的目的是什么,教学价值体现在哪里?一方面,这三类数学语言代表了数学的三种符号形式,它们在表征功能上是等价的,大部分的数学对象都可以同时表示为这三种符号形式;另一方面,一般的初等数学文本都同时包含三种语言符号形式,它们在数学意义表达上各有特点和优势。然而,很多教师不清楚数学语言分类的目的,一般不会针对不同的语言特点进行专门的教学设计。其次,对数学语言的教学定位不明确。很多教师认为没有必要在数学课堂教学中进行专门的数学语言教学,主要原因有两个:一是认为数学语言与自然语言没有很大的差别,培养学生的数学阅读能力是语文教师的任务,数学教师没有必要进行数学语言教学;二是认为数学文本中的数学符号非常简单、数量有限,没有必要进行专门的数学语言教学,学生记住这几个简单的数学符号应该没有问题。最后,对数学语言的教学研究不充分。数学语言与自然语言存在本质差别:一方面,数学语言与自然语言有不同的词汇系统,数学中的术语、命题、关键词都是经过严格定义的,有特殊的数学含义,与自然语言的语义存在较大差异,比如“有理数”不能理解为“有道理的数”;另一方面,数学语言与自然语言遵循着不同的语法系统,数学语言符号与自然语言符号有不同的联结规则,遵循着不同的意义表达方式。正是由于数学语言不同于自然语言,而数学教师又忽视数学语言的教学,使得不能正确理解数学语言、不能从数学符号中获得所需要的数学信息,成为很多学生学习数学的最大障碍。

(3)数学教师忽视数学知识的“结构性”,使学生只掌握了一些孤立的“知识点”,没有形成系统的认知结构,不利于学生对数学知识的记忆和转换。

首先,数学符号一般有文字、符号、图表三种表征形式,而数学教师在讲

课时往往只重视一种形式,导致了学生所学数学知识形式上的“孤立”,无法实现不同符号表征之间的相互转换;其次,数学知识分为算术、代数、方程、函数、平面几何、立体几何、解析几何等多种数学分支,同一个数学符号在不同的数学分支中往往具有不同的含义,暗示着不同的数学思想方法,而教师在讲课时只是讲了在一个数学分支的一种意义,导致了学生所学数学知识意义上的“孤立”,无法实现数学问题在不同数学分支间进行自由转换;再次,一些数学符号的特殊结构中隐含着一些“特殊意义”,需要学生对这种整体结构具有一定的敏感性,能够根据问题解决的需要去获得数学符号的“结构性意义”,而教师却没有讲授这种转换的方法,更没有专门培养学生的这种符号结构意识和转换能力;最后,学生虽然能够当时听懂、记住“孤立”的数学知识和解题方法,但这些知识和方法更多是存储在“短时记忆”中,并没有通过“精细加工”程序进入“长时记忆”中,所以学生会很快忘记所学的知识 and 所做过的题目。教师不仅没有指挥学生对所学知识进行“精细加工”,还给学生布置大量的作业,使得学生把主要精力都用到完成作业上,没有时间进行反思和自我总结。即使下次遇到的是同样的题目,学生常常也只是保留一点模糊的印象,很难联想到更多的细节。因此,教师注重知识点的传授和掌握,忽视新知识点与原有知识点的联系,是导致数学教学低效的一个重要原因。

(4)教师忽视了数学符号意义的建构性,将“数学符号意义获得”看作“数学符号意义记忆”或“数学符号意义理解”,没有给学生建构数学符号意义提供充分的时间和机会。

首先,每个数学符号或数学表达式的意义是不确定的,需要根据具体的数学问题情境进行灵活选择。例如,A在几何学中一般表示点,在集合论中则表示集合,在教学评价中则表示等级。然而,数学教师却忽视数学符号的多义性,往往在具体问题情境中解释数学符号的意义,没有让学生联想数学符号可能的意义。其次,数学知识具有严密的逻辑性,不同的数学分支自成体系,可以进行相互推导和转换。数学家们的记忆能力可能不是最好的,但他们的推理能力却可以说是一流的。当你问数学家一个数学公式时,他可能一时忘记了这个公式,但他会很快在头脑中推理出来,写出你所需要的准确的数学公式。这种能力就是一种获取知识的能力。在当前的数学教学中,数学教师普遍重视数学知识的符号记忆,忽视数学知识的推导。记忆的数学符号随着时间的推移而很快消逝,只剩下一点模糊的记忆“印迹”。只有让学生养成知识推导的意识,掌握获取知识的方法,具备了获取知识的能力,才能在相应的情境刺激下,激活模糊了的记忆“印迹”,在逻辑思维的帮助下“恢复”原有的知识。而且,以这种方式“恢复”几次后的知识一般很难

再被遗忘,几乎可以说终身难忘。最后,数学知识具有显著的结构性,整个知识体系都是建立在少数原始数学概念和原始数学命题基础上。数学教师比较注重新知识点的讲解,却忽视新知识点与旧知识的联系,使学生的认知结构得不到更新和整合。

1.1.3 研究假设

基于以上分析,本书提出了研究假设:培养学生的数学符号意义获得能力有助于实现师生的“心灵”互动,解决因师生思维“异步”导致的一些问题,提高数学教与学的效率和质量,具体包括:

(1)数学符号是一个特殊的结构系统,包含有限的元素,却能够表达无限的数学意义;

(2)数学知识有多种符号表征,每种符号表征有其特殊优势,但也存在局限;

(3)数学符号有多种可能意义,师生从数学符号中获得的意义一般是不同的;

(4)学生要获得数学符号的意义需要具备相应的数学符号意义获得能力;

(5)师生所获得的数学符号的意义差异构成了师生互动的基础和前提;

(6)让学生表述从数学符号中获得的意义有助于提高数学教学的针对性和有效性;

(7)让学生从数学符号中获得个性化意义有助于实现师生间的“心灵”对话;

(8)传授学生获得数学符号意义的方法和思维模式有助于培养学生对数学学习的认知兴趣,激发学生的求知欲,提高学生的创新能力,从数学符号中获得个性化意义。

1.2 国内外研究现状

当前,国内外尚没有关于数学符号意义特征及其获得能力培养的专门研究,相关的研究主要包括数学语言、数学符号、符号感及多元表征四个方面。

1.2.1 数学语言的研究现状

1. 国内

国内关于数学语言的研究尚未有专门的论著,主要是不同时期的学术论文。

新课程改革前,数学教育界并未对数学语言给予应有的关注,仅有少数的论文发表。早在1962年,长沙市一中的黎有为老师在《人民教育》上撰文呼吁“培养学生正确运用数学语言”,结合数学教学中的实例,在列举、分析了学生在数学语言学习中常见的七个方面的缺点和错误基础上,提出了五点建议:

- (1)思想上要有明确的认识;
- (2)要使学生正确地、透彻地理解概念和定义;
- (3)教师的示范和以身作则;
- (4)要多锻炼学生;

(5)严格要求学生、对学生在掌握知识上的任何错误和缺陷,都不应当采取原谅和迁就的态度。^①

1983年,《人民教育》又发表了两篇文章:戴经柱老师的《如何帮助学生理解数学语言》与吴大任的《数学语言要改革》。戴经柱老师通过比较数学课本中的语言与语言课本中的语言的差异,分析了学生看不懂数学课本和数学题目的原因,认为解决学生学习数学的语言障碍问题,不能完全由语文课来承担,数学教师首先要了解学生接受和掌握数学语言的困难所在,在教学中自己要严格使用数学语言(不可随便使用不确切的语言代替数学语言),又要通过各个教学环节(包括学生课堂回答问题)帮助学生正确理解数学语言,严格训练学生使用数学语言,使之养成一丝不苟的习惯,并提出了一些具体措施。^② 吴大任主要就数学教材如何编写得更通俗易懂的问题谈了些个人的看法,探讨了数学语言的科学性、准确性、逻辑性与通俗性、可接受性之间的关系。

1990年新课程改革启动后,关于数学语言的关注明显增多,每年都有论文在核心期刊上发表,而且论文数量有日益增多的趋势,研究的视角也越来越多元化。比如,王秋海(1992年)讨论了数学语言系统的自组织性,刘

① 黎有为. 培养学生正确运用数学语言[J]. 人民教育, 1962(06): 40—43.

② 戴经柱. 如何帮助学生理解数学语言[J]. 人民教育, 1983(01): 42—44.

爱学(1997年)探讨了数学语言的感知与运用,戴平波(1999年)分析了数学语言能力的成分,曹树凤(2007年)分析了数学语言的功能与教学。李雅云、李宝庆对小学生数学语言学习的情况进行了调查研究,认为在文字语言、图式语言、符号语言三个方面都存在的问题,从语言识别、语言理解、语言转换、知识负迁移四个方面分析了出现问题的原因,提出了三个方面的建议:

- (1)重视数学语言中语义和句法的教学;
- (2)重视各种数学语言之间互译的教学;
- (3)重视数学语言的阅读教学,强调表达的规范化。^①

郑翔对一个小学二年级数学后进生进行跟踪研究后,认为导致数学学习困难的主要原因是智力因素:

- (1)数学阅读能力失衡;
- (2)数学认知滞后;
- (3)数学记忆困难。

认为数学阅读能力的欠缺是致使学习数学困难的第一个原因。在小学高年级的数学“后进生”,中很大一部分学生就是由于在数学学习出现困难初期没有引起足够的重视和关注,从而导致其基础知识掌握不牢固,进而导致对数学的不自信与反感。^②

西南大学2009届博士生汤强的博士论文《7~9年级学生数学符号语言的理解与表示》应用实证方法从数学符号语言的理解和表示两个方面入手,重点分析了学生的符号理解与表示在哪些方面存在不同表现和典型错误?这些不同表现的本质是什么?教师应该怎样开展符号教学?得出了一些结论:

(1)对于同样的数学符号语言,学生的理解结果存在一些不同,理解过程也存在一定的差异;

(2)对于同样的数学意义,学生的符号表示结果存在一些不同,表示过程也存在一定的差异;

(3)随着年级的增高,学生在符号理解和表示的多个方面并没有获得实质性的提高;

(4)导致学生在符号理解和表示上出现不同表现的原因归于两个方

^① 李雅云,李宝庆.小学生数学语言学习的调查研究[J].教学与管理,2011(29):20-22.

^② 郑翔.一个小学二年级数学后进生的个案研究[J].四川教育学院学报,2004,20(4):43-45.

面——语言知识和符号意识。^①

毕恩材与朱秉林在1991年出版的《数学教学艺术》一书中专门讨论了“数学教学的语言艺术”，区分了“数学语言”与“数学教学语言”，认为数学语言表达的是数学教学的内容，主要表现为数学文本形式；数学教学语言表达的是数学教学活动，是师生对话的工具。数学教学语言从形式上可分为师生的独白（讲解）、对话、板书等，从功能上可分为“日常用语”与“教学用语”。日常用语主要用于进行组织教学，使教学活动顺利进行；教学用语主要是用来将数学语言转述成学生所熟悉的语言形式，便于学生理解数学语言的内容。^② 陈永明老师在1998年出版的《数学学习中的语言问题》一书中，从语言学的视角，围绕数学文本中的“词”和“句”，分别对中学生与中学数学教师在使用语言方面的情况进行了分析，介绍了一些常规的语言知识，分析了一些数学所特有的语言现象。^③

2. 国外

贝尔的研究表明：语言与术语的选择确实影响学生对数学的掌握，并且阅读能力与数学能力密切相关。^④ Nurit Zehavi^⑤、Driscoll^⑥、Gray & Tall^⑦、Kieran^⑧、Kinzel^⑨、Stacey & Macgregor^⑩ 等人的研究发现，数学学习中遇到的许多困难都与对数学符号的理解与运用有关。其中一个主要原因是学

① 汤强. 7~9 年级学生数学符号语言的理解与表示[D]. 西南大学, 2009.

② 毕恩材, 朱秉林. 数学教学艺术[M]. 南宁: 广西教育出版社, 1991.

③ 陈永明. 数学学习中的语言问题[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1998.

④ (美) 贝尔. 中学数学的教与学[M]. 许振声, 等译. 教育科学出版社, 1990: 478.

⑤ Nurit Zehavi. Symbol sense with a symbolic-graphical system: a story in three rounds [J]. Journal of Mathematical Behavior, 2004: 183—203.

⑥ Driscoll M. Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6—10 [M]. Portsmouth, NH: Heinemann, 1999.

⑦ Gray M. & Tall O. Duality, ambiguity, and flexibility: A “perceptual” view of simple arithmetic [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1994, 25(2): 116—140.

⑧ Kieran C. Learning and teaching of algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation [A]. In F. K. Lester, Jr. (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning [C]. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2007: 707—762.

⑨ Kinzel M. Understanding algebraic notation from the students’ perspective [J]. Mathematics Teacher, 1999, 95(5): 436—442.

⑩ Stacey K. & MacGregor M. Ideas about symbolism that students bring to algebra [A]. In Barbra Moses (Ed.). Algebraic Thinking Grades K—12 [C]. Reston, VA: NCTM, 1999: 308—312.