"十二五"普通高等教育规划教材

主　编　康殿统
副主编　马统一　汪晓银

经济应用数学

概率论与数理统计学习辅导与习题选解

国防工業出版社
National Defense Industry Press

经济应用数学——概率论与数理统

学习辅导与习题选解

主　编　康殿统

副主编　马统一　汪晓银

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书是教育科学“十五”国家规划课题“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”数学类子课题项目成果之一——《经济应用数学——概率论与数理统计》的配套参考书.

本书的内容与主教材平行,紧扣教材,旨在帮助读者掌握概率论与数理统计课程的基本内容和解题方法,提高学习效率.

本书共分八章:随机事件与概率;随机变量的分布与数字特征;二维随机变量及其概率分布(包括大数定理和中心极限定理);数理统计的基本概念;参数估计;假设检验;方差分析;回归分析.每章包括六部分内容:教学要求;内容提要;典型例题解析;教材习题选解;自我检查题;自我检查题参考解答.

本书内容切合学生实际,针对性强.所选题型新颖多样,解题方法典型.内容安排上还考虑了经济与管理类专业学生报考研究生的需要,大量选用了全国及各高校历届硕士研究生入学试题.选题具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性、综合性和实用性,对提高学生的学习兴趣,培养学生的应用能力极为有益.

本书可供高等学校经济与管理类各专业教师和学生使用,也可供从事管理的科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学.概率论与数理统计学习辅导与习题选解/康殿统主编.—北京:国防工业出版社,2016.8
ISBN 978-7-118-11040-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①康… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考资料②概率论-高等学校-教学参考资料③数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①F224.0②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第190185号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 16¾ **字数** 420千字
2016年8月第1版第1次印刷 **印数** 1—3000册 **定价** 38.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777　　发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755　　发行业务:(010)88540717

前　　言

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"数学类子课题项目成果之一——《经济应用数学——概率论与数理统计》(马统一,康殿统,李劲编著)的配套参考书．同时兼顾其他同类教材的内容,也可单独作为经济、管理与工程、机械等专业的本科教学参考书．

为方便读者阅读,本书按主教材各章顺序编写,主要内容包括:随机事件与概率;随机变量的分布与数字特征;二维随机变量及其概率分布(包括大数定理和中心极限定理);数理统计的基本概念;参数估计;假设检验;方差分析;回归分析等．每章包括六节:教学要求,依据教学基本要求,按"理解""掌握""会""了解"等次序表示程度上的差异;内容摘要,便于读者在学习时提纲挈领地掌握课程内容;典型例题解析,通过典型例题的示范,指导读者解题,帮助读者掌握解题步骤与方法,指出易犯的错误,并究其原因,澄清不正确的想法;教材习题选解,对主教材中较为复杂、概念性较强或不易搞清楚的题目的大部分习题给出了详细解答,并保持该题在主教材该章习题中的编号不变,便于查阅;自我检查题,按填空、选择、解答、证明等题型编写,供学生自测用;自我检查题参考解答,要求读者先按所规定的时间做自测题训练,然后再看参考解答,这样才能找出自己学习中的不足之处．

本书内容切合学生实际,针对性强．所选题型新颖多样,解题方法典型．内容安排上还考虑了经济管理类专业学生考研的需要,大量选用了全国和各高校历届硕士研究生入学试题．选题具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性、综合性和实用性．通过对本书的学习能提高读者的分析问题、解决实际问题的能力,加深对基本内容的理解和掌握,并能开阔视野,还会增强学好这门课程的信心和兴趣．关于题解,我们再一次提醒读者,要靠自己看书、做题,悟出概率论与数理统计的真谛,解题能力才会有质的飞跃．如果自己不动手去做题,只是照抄照搬,那是有害无益的．

全书共分八章,分别由河西学院数学与统计学院周军(第一章)、康殿统(第二、五、六章)、马统一(第三、四章),华中农业大学理学院数学系汪晓银(第七、八章)编写．全书框架结构、统稿、定稿由康殿统承担．

因编者水平有限,本书难免存在疏漏及错误之处,诚恳地希望读者批评指正．

编　者

2015 年 12 月 1 日

目　录

第一章　随机事件与概率

一、教 学 要 求

(1) 理解随机现象、随机试验、样本空间、事件域、随机事件的概念;掌握事件的和、积、差运算,会利用事件的运算表示较复杂的事件.

(2) 理解古典概率、几何概率的定义以及古典概率和几何概率的性质,掌握古典概率和几何概率的计算方法;特别注意排列、组合知识的运用.

(3) 了解频率的定义、性质以及频率与概率的关系.

(4) 理解概率的定义及概率的性质;掌握概率的有限可加性、逆事件、差事件、和事件的概率公式及一般加法公式;了解概率的下连续性和上连续性.

(5) 理解条件概率的概念,掌握概率的乘法公式、全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式,会用上述公式解决实际问题.

(6) 理解事件的独立性及其性质,会用事件的独立性分析解决具体问题.

(7) 理解并掌握伯努利(Bernoulli)概型,会使用公式解决符合 n 重伯努利试验的实际问题.

(8) 了解随机现象的普遍性、随机试验的可重复性以及事件与子集的关系.

二、内 容 提 要

1. 样本空间与随机事件

1) 必然现象和随机现象

在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象,称为必然现象;在一定的条件下具有多种可能发生的结果,而究竟发生哪一种结果事先不能肯定的现象,称为随机现象.

2) 随机试验

可以得到随机现象的结果的试验或观测,都称为随机试验(简称为试验).

随机试验的共性:

(1) 可以在相同的条件下重复进行.

(2) 事先可以明了试验的全部的基本结果.

(3) 在试验之前无法预定哪一个结果一定会出现,但试验之后必有某一个基本结果会出现.

3) 样本空间

随机试验的所有可能的基本结果所构成的集合称为样本空间,样本空间中的元素,即试验的每一个基本结果称为样本点.

定义　称一个非空集合为样本空间，记为 Ω，Ω 中的元素称为样本点，记为 ω，即有 $\Omega=\{\omega\}$.

4）事件域

定义　设 Ω 是一个样本空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一些子集构成的集合，若 $\mathscr{F}$ 满足以下条件：

（1）$\Omega\in\mathscr{F}$.

（2）若 $A_i\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\cdots)$，则有 $A_1\cup A_2\cup\cdots=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

（3）若 $A\in\mathscr{F}$，则 A 在 Ω 中的余集 $\overline{A}=\Omega-A\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个事件域，$\mathscr{F}$ 中的元素（即 Ω 的一些子集）称为随机事件，或简称为事件，Ω 称为必然事件.

任何随机事件 A 都是样本空间的子集，即 $A\subset\Omega$.

只有一个样本点构成的样本空间 Ω 的单元素集合称为基本事件.

事件域 $\mathscr{F}$ 也可表为 $\mathscr{F}=\{A\mid A\subset\Omega, A\text{ 是事件}\}$.

事件域的性质　若 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的事件域，则

（1）不可能事件 $\phi\in\mathscr{F}$.

（2）若 $A_i\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\cdots)$，则 $A_1\cap A_2\cap\cdots=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

（3）若 $A_k\in\mathscr{F}\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\in\mathscr{F}$，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k\in\mathscr{F}$.

（4）若 $A,B\in\mathscr{F}$，则 $A-B\in\mathscr{F}$.

5）事件间的运算与关系（如图 1-1）

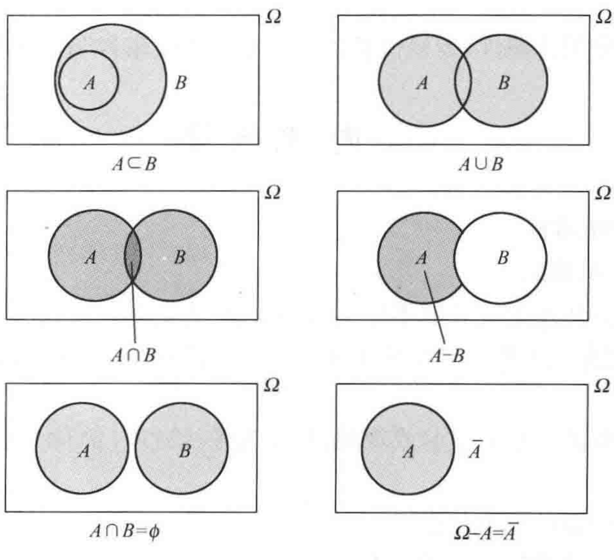

图 1-1　事件间的关系及运算图示（维恩图）

（1）$A\subset B$：事件 A 发生导致事件 B 发生.

（2）$A=B$：$A\subset B$ 且 $B\subset A$.

（3）$A\cup B$：事件 A 与事件 B 至少有一个发生.

（4）$A\cap B=AB$：事件 A 与事件 B 同时发生.

(5) $A-B$:事件 A 发生而事件 B 不发生.

(6) A 与 B 互不相容:事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\phi$.

(7) 事件 A 的对立事件$\overline{A}$:事件 A 不发生,即$\overline{A}=\Omega-A$. 显然,$A\cup\overline{A}=\Omega,A\cap\overline{A}=\phi$.

(8) 完备事件组:如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,且

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega,$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

6) 事件的运算律

(1) 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(2) 交换律:$A\cap B=B\cap A$; $A\cup B=B\cup A$.

(3) 结合律:$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$; $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(4) 摩根律(对偶律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 差积转换律:$A-B=A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$.

2. 古典概率与几何概率

1) 古典概率

若试验 E 具有以下特点:

(1) E 的样本空间 Ω 有有限个(n 个)样本点.

(2) 每个样本点的发生是等可能性的(用 $1/n$ 表示每个样本点发生的可能性).

则称试验 E 为古典试验.

显然,古典试验的样本空间 Ω 的基本事件有有限个(n 个),每个基本事件发生的可能性均为 $1/n$,称 $1/n$ 为每个基本事件的概率.

定义 设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,事件 A 中有 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 样本点,则称 $P(A)=\frac{m}{n}$为事件 A 的古典概率,简称为 A 的概率.

古典概率的性质:

(1) 对任何事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 必然事件的概率等于 1,即 $P(\Omega)=1$.

(3) 若 A 与 B 互不相容,即 $AB=\phi$,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

(4) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(5) 若事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

2) 几何概率

定义 若样本空间 Ω 构成 n 维空间中的一个有限区域,而事件 $A\subset\Omega$ 构成了 Ω 中的一个区域,则称

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$$

为事件 A 的几何概率. 当 $A=\phi$ 时,规定 $P(A)=0$.

几何概率的性质:

(1) 对任何事件 A,都有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) $P(\Omega)=1$.

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

3. 频率及其性质

定义 设一个试验 E 重复做了 n 次,事件 A 在 n 次试验中发生了 $m(m\leqslant n)$ 次,称 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$ 为事件 A 的频率.

频率具有以下性质:

(1) 对任何事件 A,都有 $f_n(A)\geqslant 0$.

(2) 必然事件 Ω 的频率 $f_n(\Omega)=1$.

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,则

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f(A_i).$$

当试验次数 n 充分增大时,事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一个确定的实数 $P(A)$ 的附近波动着,且 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$. 一般来说,试验次数越多,波动越小,这称为频率的稳定性;把频率 $f_n(A)$ 稳定地趋向着的实数 $P(A)$ 称为事件 A 的概率.

4. 概率的定义及其性质

1) 概率的定义

设 Ω 是一个样本空间,$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个事件域,在 $\mathscr{F}$ 上定义了一个实函数 $P(A)(A\in\mathscr{F})$. 若函数 $P(A)$ 满足以下条件:

(1) 对一切 A,有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) $P(\Omega)=1$.

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots$,且 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,则有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

则称 P 为 $\mathscr{F}$ 上的一个概率.

2) 概率的性质

(1) $P(\phi)=0$.

(2) 若 $A_k\in\mathscr{F}(k=1,2,\cdots,n)$,且 $A_iA_j=\phi(i\neq j)$,则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) 对一切 $A\in\mathscr{F}$,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(5) 若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(6) 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

(7) 设 A,B 是任意两个事件,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

(8) (加法公式)设 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件,则

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2})\\&+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})-\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

(9)（概率的下连续性）设 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，且 $A_n \subset A_{n+1}$. 令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(10)（概率的上连续性）设 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，且 $A_n \supset A_{n+1}$. 令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

5. 条件概率及几个重要公式

1）条件概率

定义 设 P 是 $\mathscr{F}$ 上的一个概率，$B\in\mathscr{F}$ 且 $P(B)>0$，$A\in\mathscr{F}$. 令

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

则称 $P(A\mid B)$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 的条件概率.

显然有 $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid B)=1$.

2）乘法公式

(1) $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$，$(P(A)>0)$
$\quad=P(B)P(A\mid B)$，$(P(B)>0)$.

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$，
$(P(A_1)>0, P(A_1A_2)>0,\cdots,P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$.

3）全概率公式与贝叶斯公式

(1) 样本空间的划分.

定义 设 Ω 是一个样本空间，$B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组事件. 若

① $\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\Omega$;

② $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，即 $B_iB_j=\phi(i\neq j)(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 的一个划分（或称 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是一个完备事件组）.

显然，对任意事件 $A\subset\Omega$，A 与 $\bar{A}$ 就是 Ω 的一个划分.

(2) 全概率公式. 设 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意事件 A，有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).\end{aligned}$$

(3) 贝叶斯（Bayes）公式. 设 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 又 $P(A)>0$. 则有

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(AB_k)}{P(A)}=\frac{P(B_k)P(A\mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

6. 事件的独立性

1）事件的独立性

定义 设 A,B 是两个事件，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立.

2）事件的独立性的性质

(1) Ω 和 ϕ 与任何事件 A 相互独立，即对任何事件 A，有 $P(A\Omega)=P(A)P(\Omega)$，$P(A\phi)=$

$P(A)P(\phi)$.

(2) 若 $P(B)>0$,则 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(A)=P(A\mid B)$.

(3) 若 A 与 B 相互独立,则 A 与$\overline{B}$,$\overline{A}$与 B,$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

(4) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则这 n 个事件中的任意 $r(r=2,3,\cdots,n-1)$个事件也相互独立.

(5) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则将其中的任意 $r(r=1,2,\cdots,n)$个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_r}$换成对立事件$\overline{A}_{i_1},\overline{A}_{i_2},\cdots,\overline{A}_{i_r}$后,这 n 个事件仍相互独立.

7. 伯努利概型

1) 伯努利试验

若试验 E 只有 A 与$\overline{A}$两个真正的随机事件,即事件域 $\mathscr{F}=\{\Omega,A,\overline{A},\phi\}$ 且 $P(A)=p(0<p<1)$, $P(\overline{A})=1-p$. 这种情形称为伯努利概型. 可用伯努利概型来描述的试验称为伯努利试验.

若将一个伯努利试验独立地重复做了 n 次,则称这 n 次试验为 n 重伯努利试验.

在 n 重伯努利试验中,事件 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为

$$p_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n,(0<P(A)=p<1).$$

三、典型例题解析

【例1】 射击运动员进行 n 次打靶射击,试根据不同的试验目的写出试验的样本空间:(1)记录每次射击是否命中靶;(2)记录命中靶的次数;(3)记录每次射击命中的环数;(4)记录 n 次射击的总环数.

【解】 (1) 每次射击,命中记为1,未命中记为0,用向量 $\boldsymbol{\omega}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示试验的基本结果,其中分量 $x_i=0$ 或 1,则样本空间 $\Omega=\{\boldsymbol{\omega}\}$,样本点总数为 2^n.

(2) 用 $\omega_i=i$ 表示 n 次射击命中的次数(即试验的基本事件),则样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,n\}$,共有 $n+1$ 个基本事件.

(3) 用 n 维向量 $\boldsymbol{\omega}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示试验的基本结果,其中分量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)(x_i\in\{0,1,\cdots,10\})$表示第 i 次射击命中的环数,则样本空间 $\Omega=\{\boldsymbol{\omega}\}$,样本点总数为$11^n$.

(4) 用 $\omega_i=i$ 表示 n 次射击命中的总环数(即试验的基本事件),则样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,10n\}$, 共有 $10n+1$ 个基本事件.

【例2】 设 A,B,C 为随机事件,证明:

(1) $(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}$; (2) $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$.

【证明】 (1) 由事件运算的差积转换律、分配律及对偶律,得

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}.$$

而 $A-AB=A\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=A\overline{B}$,故$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}$.

(2) 由事件运算的差积转换律、分配律及对偶律,得

$$A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$$

$$=A\cup B\overline{AB}\cup C\overline{AC}$$
$$=A\cup[B(\bar{A}\cup\bar{B})]\cup[C(\bar{A}\cup\bar{C})]$$
$$=A\cup(B\bar{A})\cup(C\bar{A})$$
$$=[(A\cup B)\cap(A\cup\bar{A})]\cup(C\bar{A})$$
$$=[(A\cup B)\cap\Omega]\cup(C\bar{A})$$
$$=(A\cup B)\cup(C\bar{A})$$
$$=[(A\cup B)\cup C]\cap[(A\cup B)\cup\bar{A}]$$
$$=(A\cup B\cup C)\cap\Omega=A\cup B\cup C.$$

故 $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$.

【例 3】 某城市的电话号码由 7 位数字组成(第一位数字不为 0),随机选取一电话号码,求下列事件的概率:$A=$“所选号码 7 位数字完全相同”;$B=$“所选号码 7 位数字各不相同”;$C=$“所选号码 7 位数字不含 7 和 4”;$D=$“所选号码 7 位数字不含 7 或 4”;$E=$“所选号码 7 位数字含 7 不含 4”.

【解】 基本事件总数为 $n=9\times10^6$,事件 A,B,C,D,E 所含的基本事件数分别为 $m_A=9$, $m_B=9\times P_9^6=544320$, $m_C=8^7$, $m_D=9^7+8\times9^6-8^7$, $m_E=8\times9^6-8^7$. 故所求的概率分别为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=0.000001, P(B)=\frac{m_B}{n}\approx0.0605, P(C)=\frac{m_C}{n}\approx0.2330,$$

$$P(D)=\frac{m_D}{n}\approx0.7708, P(E)=\frac{m_E}{n}\approx0.2394.$$

【例 4】 一楼房共有 14 层,假设电梯在一楼启动时有 10 名乘客,且乘客在各层下电梯是等可能的. 试求下列事件的概率:$A=$“10 人在同一层下”;$B=$“10 人在不同楼层下”;$C=$“10 人都在第 14 层下”;$D=$“10 人中恰有 4 人在第 8 层下”.

【解】 由于 10 名乘客在 13 个楼层下电梯是等可能的,所以基本事件的总数为 $n=13^{10}$. 事件 A,B,C,D 所含的基本事件数分别为

$$m_A=13, m_B=P_{13}^{10}=1037836800, m_C=1, m_D=C_{10}^4\times12^6=627056640,$$

故所求的概率分别为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=9.43\times10^{-11}, P(B)=\frac{m_B}{n}=1.24\times10^{-7},$$

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=7.25\times10^{-12}, P(D)=\frac{m_D}{n}=4.55\times10^{-3}.$$

【例 5】 设方程 $x^2+bx+c=0$ 中的 b,c 分别是连掷两次一枚骰子先后出现的点数,求此方程有实根的概率和有重根的概率.

【解】 方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根时,$b^2-4c\geqslant0$,即 $c\leqslant\frac{b^2}{4}$. 有重根时,$c=\frac{b^2}{4}$. b 是连掷两次一枚骰子先出现的点数,可能取的值有 $1,2,\cdots,6$; c 是连掷两次一枚骰子后出现的点数,可能取的值如下表:

b	1	2	3	4	5	6
$c\leqslant\frac{b^2}{4}$		1	1,2	1,2,3,4 （共 19 种可能）	1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6
$c=\frac{b^2}{4}$		1		4	（共有 2 种可能）	

设 A 表示事件“方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根”，B 表示事件“方程 $x^2+bx+c=0$ 有重根”，连掷两次一枚骰子先后出现的点数，有 36 种可能的情形．所以

$$P(A)=\frac{19}{36},P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

【例 6】 设考生的报名表来自 3 个地区，各有 10 份，15 份，25 份，其中女生的分别为 3 份，7 份，5 份．随机地从一地区先后任取两份报名表（即采用不放回抽取）．求：(1) 先取到一份报名表是女生的概率 p；(2) 已知后取到的一份报名表是男生的而先取到的一份报名表是女生的概率 q.

【解】 (1) 设 A_i 表示事件“取到的一份报名表是第 i 个地区的”，$i=1,2,3$，则 A_1,A_2,A_3 为 Ω 的一个划分；再设 B_j 表示事件“第 j 次取到的一份报名表是男生的”，$j=1,2$. 由于 $P(A_i)=\frac{1}{3},i=1,2,3$，且

$$P(\overline{B}_1\mid A_1)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10},P(\overline{B}_1\mid A_2)=\frac{C_7^1}{C_{15}^1}=\frac{7}{15},P(\overline{B}_1\mid A_3)=\frac{C_5^1}{C_{25}^1}=\frac{1}{5}.$$

由全概率公式，得

$$\begin{aligned}p&=P(\overline{B}_1)=P(A_1)P(\overline{B}_1\mid A_1)+P(A_2)P(\overline{B}_1\mid A_2)+P(A_3)P(\overline{B}_1\mid A_3)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{29}{90}.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$P(B_2\mid A_1)=\frac{7}{10},P(B_2\mid A_2)=\frac{8}{15},P(B_2\mid A_3)=\frac{20}{25},$$

由条件概率的乘法公式，有

$$P(\overline{B}_1B_2\mid A_1)=P(\overline{B}_1\mid A_1)P(B_2\mid A_1\overline{B}_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)=P(\overline{B}_1\mid A_2)P(B_2\mid A_2\overline{B}_1)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30},$$

$$P(\overline{B}_1B_2\mid A_3)=P(\overline{B}_1\mid A_3)P(B_2\mid A_3\overline{B}_1)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30}.$$

（**注** 概率的条件乘法公式为，对事件 A,B,C（其中 $P(AC)>0$），有

$$P(AB\mid C)=P(A\mid C)P(B\mid AC)).$$

由全概率公式，分别有

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P(A_1)P(B_2\mid A_1)+P(A_2)P(B_2\mid A_2)+P(A_3)P(B_2\mid A_3)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{25}=\frac{61}{90},\end{aligned}$$

$$P(\overline{B}_1B_2)=P(A_1)P(\overline{B}_1B_2\mid A_1)+P(A_2)P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)+P(A_3)P(\overline{B}_1B_2\mid A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{7}{30}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{30}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{30}=\frac{2}{9}.$$

所以，$q=P(\overline{B_1}\mid B_2)=\dfrac{P(\overline{B_1}B_2)}{P(B_2)}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\dfrac{20}{61}.$

【例 7】 验收成箱包装的玻璃器皿，每箱 24 只装，统计资料表明，每箱最多有 2 只残品，且含有 0,1 和 2 件残品的箱各占 80%，15% 和 5%．现在随意抽取一箱，并随意检验其中 4 只，若未发现残品，则通过验收，否则要逐一检验并更换．求下列事件的概率：(1) 一次通过验收；(2) 通过验收的箱中确实无残品．

【解】 设 A 表示事件"一次通过验收"；B 表示事件"通过验收的箱中确实无残品"．A_i 表示事件"箱中实际有 i 只残品"，$i=0,1,2$．则 A_0,A_1,A_2 构成一个完备事件组，且

$$P(A_0)=0.80,P(A_1)=0.15,P(A_2)=0.05;$$

$$P(A\mid A_0)=1,P(A\mid A_1)=\frac{C_{23}^4}{C_{24}^4}=\frac{5}{6},P(A\mid A_2)=\frac{C_{22}^4}{C_{24}^4}=\frac{19}{24}.$$

(1) 由全概率公式，所求的概率为

$$P(A)=P(A_0)P(A\mid A_0)+P(A_1)P(A\mid A_1)+P(A_2)P(A\mid A_2)$$
$$=0.80\times1+0.15\times\frac{5}{6}+0.05\times\frac{19}{24}\approx0.9646.$$

(2) 由贝叶斯公式，所求的概率为

$$P(B)=P(A_0\mid A)=\frac{P(A_0)P(A\mid A_0)}{P(A)}\approx\frac{0.80\times1}{0.9646}\approx0.8294.$$

【例 8】 有朋友自远方来，他坐火车、坐船、坐汽车、坐飞机的概率分别为 0.3，0.2，0.1，0.4．如果他坐火车，迟到的概率为 0.25；坐船，迟到的概率为 0.3；坐汽车，迟到的概率是 0.1；坐飞机，则不会迟到（即迟到的概率为 0）．实际上他迟到了，推测他坐哪种交通工具的可能性最大．

【解】 设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示事件"该朋友坐火车""该朋友坐船""该朋友坐汽车""该朋友坐飞机"；B 表示事件"该朋友迟到"．则 A_1,A_2,A_3,A_4 构成一个完备事件组，且

$$P(A_1)=0.3,P(A_2)=0.2,P(A_3)=0.1,P(A_4)=0.4,$$
$$P(B\mid A_1)=0.25,P(B\mid A_2)=0.3,P(B\mid A_3)=0.1,P(B\mid A_4)=0.$$

由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.145.$$

再由贝叶斯公式，可求得已知该朋友迟到的条件下，他坐火车、坐船、坐汽车、坐飞机的概率分别为

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.3\times0.25}{0.145}\approx0.5175,$$

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\frac{0.2\times0.3}{0.145}\approx0.4138,$$

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\frac{0.1\times0.1}{0.145}\approx0.0690,$$

$$P(A_4 \mid B)=\frac{P(A_4)P(B \mid A_4)}{P(B)}=0.$$

比较以上四个概率值,可见该朋友坐火车来的可能性最大,坐汽车来的可能性较小,而绝不会是坐飞机来.

【例 9】 设有三个随机事件 A,B,C 相互独立,且 $ABC=\phi$,$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=($ $)$.

【解】 由已知条件可知

$$\begin{aligned}
&P(AB)=P(A)P(B)=[P(A)]^2,\\
&P(AC)=P(A)P(C)=[P(A)]^2,\\
&P(BC)=P(B)P(C)=[P(A)]^2,\\
&P(ABC)=P(\phi)=0.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\
&=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}.
\end{aligned}$$

解得 $P(A)=\frac{1}{4}$或$\frac{3}{4}$. 由 $P(A)<\frac{1}{2}$,所以 $P(A)=\frac{1}{4}$.

【例 10】 证明三个事件 A,B,C 相互独立的充要条件是下面 2^3 个等式同时成立:

(1) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$;

(2) $P(\overline{A}BC)=P(\overline{A})P(B)P(C)$;

(3) $P(A\overline{B}C)=P(A)P(\overline{B})P(C)$;

(4) $P(AB\overline{C})=P(A)P(B)P(\overline{C})$;

(5) $P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$;

(6) $P(\overline{A}B\overline{C})=P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})$;

(7) $P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})$;

(8) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$.

【证明】 充分性　由(1)和(2),得

$$\begin{aligned}
P(BC)&=P(ABC\cup\overline{A}BC)=P(ABC)+P(\overline{A}BC)\\
&=P(A)P(B)P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)\\
&=[P(A)+P(\overline{A})]P(B)P(C)\\
&=P(B)P(C).
\end{aligned}$$

即

$$P(BC)=P(B)P(C). \tag{1.1}$$

同理,由(1)和(3),得

$$P(AC)=P(A)P(C). \tag{1.2}$$

由(1)和(4),得

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1.3}$$

由(1)及式(1.1)~式(1.3),得 A,B,C 相互独立.

必要性 因为 A,B,C 相互独立,故(1)成立,

由(1)及式(1.3),得 AB 与 C 独立,从而 AB 与$\overline{C}$独立,故

$$P(AB\overline{C})=P(AB)P(\overline{C})=P(A)P(B)P(\overline{C}),$$

即(4)成立. 类似可证得(2)和(3)成立.

又因为 A,B,C 相互独立,则 B 与 C 相互独立,从而$\overline{B}$与 C 相互独立,故有 $P(\overline{B}C)=P(\overline{B})P(C)$. 而由概率的有限可加性及(3),得

$$\begin{aligned}P(\overline{B}C)&=P(A\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A}\,\overline{B}C).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}C)&=P(\overline{B}C)-P(A)P(\overline{B})P(C)\\&=P(\overline{B})P(C)-P(A)P(\overline{B})P(C)\\&=[1-P(A)]P(\overline{B})P(C)\\&=P(\overline{A})P(\overline{B})P(C).\end{aligned}$$

即(5)成立. 类似可证得(6)和(7)成立.

又因为 A,B,C 相互独立,则 A 与 B 相互独立,从而$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立;由(5)知$\overline{A}\,\overline{B}$与 C 相互独立,故$\overline{A}\,\overline{B}$与$\overline{C}$相互独立,所以有

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})P(\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}),$$

即(8)成立.

【例 11】 事件 A 在一次试验中发生的概率为 p,将试验独立地重复做 n 次,试求:(1)事件 A 至少发生一次的概率 p_n;(2)为使 A 以不小于 q 的概率至少发生一次,需重复进行多少次试验.

【解】 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$表示事件"A 在 i 第次试验中发生",则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示"事件 A 在 n 次试验中至少发生一次",且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,且 $P(A_i)=p(i=1,2,\cdots,n)$.

(1) $$\begin{aligned}p_n&=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)\\&=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)=1-(1-p)^n.\end{aligned}$$

注 若 $0<p<1$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}[1-(1-p)^n]=1$. 这说明,只要 $0<p<1$(即使 p 非常小),在试验次数无限增多的情况下,事件 A 迟早会发生.

(2) 由(1)知,n 次独立重复试验中 A 至少发生一次的概率为

$$p_n=1-(1-p)^n.$$

现在要求由条件 $p_n\geqslant q$ 求 n. 因此有

$$p_n = 1-(1-p)^n \geqslant q,$$
$$(1-p)^n \leqslant 1-q,$$
$$n\lg(1-p) \leqslant \lg(1-q).$$
由于 $\lg(1-p)<0$，故 $n \geqslant \dfrac{\lg(1-q)}{\lg(1-p)}$.

若$\dfrac{\lg(1-q)}{\lg(1-p)}$为整数,则为使 A 以不小于 q 的概率至少发生一次,需重复进行 $m=\dfrac{\lg(1-q)}{\lg(1-p)}$次试验;若$\dfrac{\lg(1-q)}{\lg(1-p)}$不是整数,则为使 A 以不小于 q 的概率至少发生一次,需重复进行 $m=\left[\dfrac{\lg(1-q)}{\lg(1-p)}\right]+1$ 次试验,其中“[ ]”表示取整.

例如,设 $q=0.95$,$p=0.5$，得 $n \geqslant 4.318$,即:A 在一次试验中发生的概率 $p=0.5$,为使 A 以不小于 0.95 的概率至少发生一次,至少需要重复进行 5 次试验.

【例 12】 某射击运动员进行打靶射击训练,每次中靶的概率为 p. 设各次射击中靶与否彼此独立,求下列事件的概率:(1)第 n 次才击中靶;(2)永远击不中靶.

【解】 设 A,B 分别表示事件“第 n 次才击中靶”与“永远击不中靶”;再设 $A_i(i=1,2,\cdots)$表示事件“第 i 次击中靶”,则 $A=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n$. 由于 $A_1,A_2,\cdots,A_{n-1},A_n$ 相互独立,从而$\overline{A}_1$,$\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_{n-1},A_n$ 也相互独立.

(1) $P(A)=P(\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{n-1})P(A_n)$
$=[1-P(A_1)][1-P(A_2)]\cdots[1-P(A_{n-1})]P(A_n)=(1-p)^{n-1}p,n=1,2,\cdots$.

(2) 设 $B_n(n=1,2,\cdots)$表示事件“前 n 次没击中靶”,则 $B_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i,n=1,2,\cdots$，且 $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$，而 $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 由概率的上连续性,所求的概率为
$$P(B)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)=\lim_{n\to\infty}(1-p)^n.$$
所以,当 $p=0$ 时,$P(B)=1$; 当 $p>0$ 时,$P(B)=0$.

【例 13】 某大学的校乒乓球队与数学系乒乓球队举行对抗赛,校队的实力较系队为强.当一个校队运动员与一个系队运动员比赛时,校队运动员获胜的概率为 0.6. 现在校、系双方商量对抗赛的方式,提了三种方案:(1)双方各出 3 人;(2)双方各出 5 人;(3)双方各出 7 人.三种方案中均以比赛中获胜人数多的一方为胜利. 问对系队来说,哪一种方案有利?

【解】 显然,该问题符合伯努利概型.

每场比赛,由校、系队各派一名运动员进行,设 A 表示事件“该场比赛系队队员获胜”,则 $P(A)=0.4$,$P(\overline{A})=0.6$. 由二项概率公式,在上述三种方案中,系队获胜的概率分别为:

(1) $p=\sum\limits_{k=2}^{3}p_3(k)=\sum\limits_{k=2}^{3}C_3^k(0.4)^k(0.6)^{3-k}\approx 0.352$.

(2) $p=\sum\limits_{k=3}^{5}p_5(k)=\sum\limits_{k=3}^{5}C_5^k(0.4)^k(0.6)^{5-k}\approx 0.317$.

(3) $p=\sum\limits_{k=4}^{7}p_7(k)=\sum\limits_{k=4}^{7}C_7^k(0.4)^k(0.6)^{7-k}\approx 0.290$.