

· 四川大学精品立项教材 ·

# 创新基础力学

## ——材料力学卷



HUANGXIN JICHU LIXUE

CAILIAO LIXUE JUAN

编著 胡益平

四川大学出版社

· 四川大学精品立项教材 ·

# 创新基础力学

## ——材料力学卷



HUANGXIN JICHU LIXUE

CAILIAO LIXUE JUAN

编著 胡益平  
编委 曾祥国 熊渊博 陈华燕



四川大学出版社

责任编辑:毕 潜  
责任校对:杨 果  
封面设计:墨创文化  
责任印制:王 炜

### 图书在版编目(CIP)数据

创新基础力学. 材料力学卷 / 胡益平编著. —成都:  
四川大学出版社, 2016. 11  
ISBN 978-7-5690-0071-9

I. ①创… II. ①胡… III. ①力学②材料力学  
IV. ①O3②TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 267803 号

### 书名 创新基础力学——材料力学卷

---

|      |                         |
|------|-------------------------|
| 编 著  | 胡益平                     |
| 出 版  | 四川大学出版社                 |
| 地 址  | 成都市一环路南一段 24 号 (610065) |
| 发 行  | 四川大学出版社                 |
| 书 号  | ISBN 978-7-5690-0071-9  |
| 印 刷  | 遂宁市涪江印务有限公司             |
| 成品尺寸 | 185 mm×260 mm           |
| 印 张  | 19.25                   |
| 字 数  | 468 千字                  |
| 版 次  | 2016 年 12 月第 1 版        |
| 印 次  | 2016 年 12 月第 1 次印刷      |
| 定 价  | 48.00 元                 |

---



版权所有◆侵权必究

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。  
电话:(028)85408408/(028)85401670/  
(028)85408023 邮政编码:610065  
◆本社图书如有印装质量问题,请  
寄回出版社调换。  
◆网址:<http://www.scupress.net>

# 前 言

本教材是专门为参加大学生力学竞赛的学生所编写的一本培训教材，同时也可作为研究生考试的复习参考书，读者对象是已经学习过大学材料力学课程的高年级理工科学生。

本教材从全新的角度就材料力学理论分析方法进行了简要的论述，并就一些重要问题和方法采用专题形式进行了归纳和分析，每个专题都列举了若干由简入深的例题，这些例题特别强调了解题的思路、模型建立以及方法选择等过程，而且很多例题是历届全国大学生力学竞赛的题目，其中许多题目在本教材中进行了重新解答。另外，每个专题后面均有若干习题和研究型问题以供学生练习。

本教材中的例题和习题有出处的均标明了出处，但仍有部分例题和习题无法查到其出处，谨向这些题目的创作者表示感谢！另外，本教材中有一些例题和习题是编者自创的。

本教材中的图片均摘自互联网，谨向这些图片的拍摄者或创作者表示感谢！

本教材是四川大学 2015 年度立项教材，在此感谢四川大学教务处和教材建设委员会的大力支持。

由于本教材的编者水平有限，难免存在错误和遗漏之处，因此，望广大同行和阅读本教材的学生指正。

编 者

2016 年 10 月于四川大学

# 目 录

|                       |         |
|-----------------------|---------|
| 第 1 章 材料力学的理论体系和分析方法  | ( 1 )   |
| 1.1 材料力学的基本概念         | ( 1 )   |
| 1.2 材料力学的理论体系         | ( 3 )   |
| 1.3 材料力学基本问题的分析方法     | ( 4 )   |
| 1.4 组合杆件的拉压问题         | ( 8 )   |
| 1.5 层合梁的弯曲问题          | ( 12 )  |
| 1.6 非线性弹性材料杆件的基本变形问题  | ( 22 )  |
| 1.7 材料力学中的“微段分析法”     | ( 25 )  |
| 习题 1                  | ( 28 )  |
| 第 2 章 材料力学问题的建模与简化    | ( 30 )  |
| 2.1 材料力学问题的建模         | ( 30 )  |
| 2.2 用截面法简化结构          | ( 41 )  |
| 2.3 对称结构与反对称结构的简化     | ( 47 )  |
| 2.4 刚性地基、平台以及圆柱上的梁的简化 | ( 63 )  |
| 2.5 材料力学问题的数学简化       | ( 71 )  |
| 习题 2                  | ( 75 )  |
| 第 3 章 移动载荷和移动支座问题     | ( 79 )  |
| 3.1 移动载荷问题            | ( 79 )  |
| 3.2 移动支座问题            | ( 96 )  |
| 习题 3                  | ( 120 ) |
| 第 4 章 梁弯曲的应力与强度       | ( 123 ) |
| 4.1 梁产生平面弯曲的条件        | ( 123 ) |
| 4.2 梁的应力和强度           | ( 127 ) |
| 习题 4                  | ( 167 ) |
| 第 5 章 梁弯曲的变形及超静定结构问题  | ( 171 ) |
| 5.1 梁变形的计算方法          | ( 171 ) |
| 5.2 超静定结构问题           | ( 182 ) |
| 习题 5                  | ( 210 ) |

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 第 6 章 能量法及其应用      | (213) |
| 6.1 应变能概念及杆件应变能的计算 | (213) |
| 6.2 卡氏定理           | (216) |
| 6.3 单位载荷法          | (218) |
| 6.4 图形互乘法          | (221) |
| 6.5 能量法在超静定结构中的应用  | (223) |
| 6.6 互等定理           | (226) |
| 习题 6               | (252) |
| 第 7 章 压杆稳定和动载荷问题   | (255) |
| 7.1 压杆稳定问题         | (255) |
| 7.2 动载荷问题          | (270) |
| 习题 7               | (292) |
| 附录：简单梁特殊截面处的挠度与转角  | (295) |
| 习题答案               | (297) |
| 参考文献               | (302) |

# 第 1 章 材料力学的理论体系和分析方法

【内容提要】本章简单概述了材料力学的理论体系，介绍了材料力学基本问题的分析方法，强调了“静力学方程”“实验推测”“微段分析法”在材料力学理论分析中的重要性。本章着重介绍了不同材料组合杆件的拉压问题以及不同材料组合梁特别是层合梁的分析方法，还介绍了非线性弹性杆件在小变形条件下的拉压、扭转以及弯曲问题的分析方法等。本章列举了若干例题，有些例题所研究的问题在一般材料力学教材中很少涉及。

## 1.1 材料力学的基本概念

材料力学的主要研究对象是杆件或杆件结构系统，如图 1.1 所示。主要任务是研究杆件或杆件结构系统在外力作用下的安全性问题，即其强度、刚度和稳定性方面是否安全的问题，并在安全的条件下为工程结构选择合理的成本经济的构件。

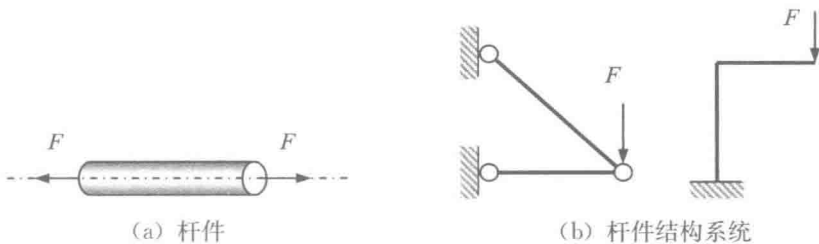


图 1.1 杆件和杆件结构系统

强度、刚度和稳定性是材料力学最基本的概念，除此之外，内力、应力、应变、单元体以及杆件的基本变形（拉压、扭转、弯曲、剪切）和组合变形、基本假设等也可归属于材料力学的基本概念，另外，简单虎克定律、广义虎克定律、切应力互等定理、叠加原理以及变形体的能量原理等是材料力学的一些基本规律，这些内容假定读者完全熟悉。

特别要强调的是，杆件横截面上的各应力分量与横截面上的各内力分量之间的关系称为静力学方程，是材料力学理论分析中一组至关重要的方程，无论杆件处于什么变形情况，该组方程都必须满足。

如图 1.2 所示，一般情况下，杆件横截面上的应力分量有三个，即正应力  $\sigma_x$  和切

应力  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ; 而杆件横截面上的内力分量在最一般情况下有六个, 即轴力  $F_N$ , 剪力  $F_{Sy}$ ,  $F_{Sz}$ , 扭矩  $T$ , 弯矩  $M_y$ ,  $M_z$ 。注意到应力可理解为某截面上在应力作用点处内力的大小, 根据理论力学的力系合成原理, 在横截面上连续分布的各个点处的内力, 即各个点处的应力, 可在横截面的某个特殊的点处合成, 合成的结果就是静力学方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_N = \int_A \sigma_x dA \\ F_{Sy} = \int_A \tau_{xy} dA \\ F_{Sz} = \int_A \tau_{xz} dA \\ T = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA \\ M_y = \int_A \sigma_x z dA \\ M_z = - \int_A \sigma_x y dA \end{array} \right. \quad (1.1)$$

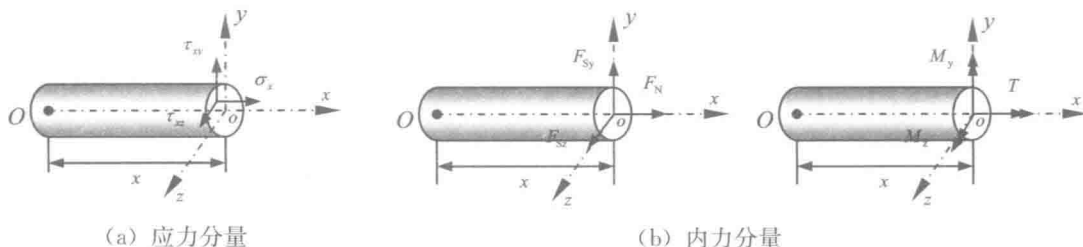


图 1.2 杆件截面上的应力分量和内力分量

公式 (1.1) 中的积分是在轴向坐标为  $x$  的横截面上进行的, 对单一材料制成的杆件来说, 上述横截面的某个特殊点是截面的形心, 而对于不同材料叠合而成的杆件, 则一般情况下不是截面的形心。静力学方程式 (1.1) 可分为两组: 一组只与截面上的正应力有关, 即轴力  $F_N$  和弯矩  $M_y$ ,  $M_z$  三式; 另一组只与截面上的切应力有关, 即扭矩  $T$  和剪力  $F_{Sy}$ ,  $F_{Sz}$  三式。在杆件各种基本变形的分析中, 根据情况分别引用这两组静力学方程, 例如杆件拉压时, 截面上只有正应力而没有切应力, 同时截面上也没有扭矩和两个方向的剪力, 因此, 与切应力有关的三个静力学方程成为零等于零的恒等式, 可认为自然满足, 则对拉压杆来说, 只需满足三个与正应力有关的静力学方程即可。纯弯曲梁的情况与此相同。而当圆轴扭转时, 轴的横截面上只存在切应力而没有正应力, 同时截面上不存在轴力和两个方向的弯矩, 则与正应力有关的三个静力学方程也成为零等于零的恒等式, 可认为自然满足, 因此当圆轴扭转时, 只需满足三个与切应力有关的静力学方程即可。注意后面的一些理论分析问题中我们将直接引用而不再说明。

另外, 静力学方程非常普适, 只要杆件材料满足连续性和小变形假设, 则式 (1.1) 就成立, 即杆件材料无论是线弹性材料还是非线性弹性材料, 杆件无论是单一材料制成的还是由不同材料叠合而成的, 式 (1.1) 都成立。

还需要说明的是, 如果知道了杆件截面上各应力分量的变化规律, 则由静力学方程

式(1.1)通过对杆件截面进行积分,就可求出杆件截面上各应力分量与各内力分量之间的显函数表达式,这就是材料力学中各种变形杆最重要的一个(或一组)公式,即应力计算公式。

## 1.2 材料力学的理论体系

材料力学的基本问题包括单一材料制成的杆件的拉压、圆轴的扭转、梁的弯曲及组合变形的强度和刚度等。

材料力学从内力出发分析杆件的强度和刚度问题,即内力是材料力学一切理论和方法的出发点,对大多数材料力学问题而言,首先要求的就是杆件截面上的内力,一旦求出了杆件截面上的内力,则引用相应问题的应力计算公式和变形计算公式等,就可解决杆件的强度和刚度问题。因此,材料力学的理论体系或主线如图1.3所示,即材料力学主要分析的是拉压杆、扭转圆轴、弯曲和组合变形梁的内力、应力、强度、变形、刚度以及超静定等方面的问题。另外,图1.3虚线框中的内容,即压杆稳定、能量法以及动载荷问题是材料力学重要的三个专题,也属于材料力学理论体系中的重要内容。

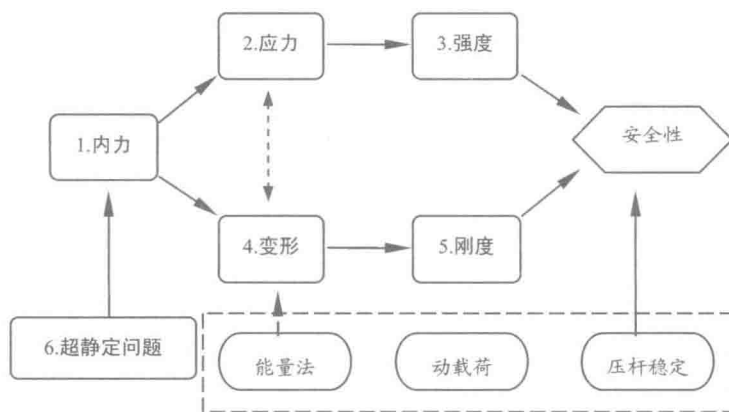


图 1.3 材料力学的理论体系或主线

材料力学的理论分析方法可解决下列几类问题:

①单一材料制成的杆件的拉压、扭转、弯曲及组合变形等问题,即材料力学基本问题。

②不同材料叠合而成的杆件(组合杆件)的拉压、扭转、弯曲及组合变形等问题。

③非线性弹性材料制成的杆件的拉压、扭转、弯曲及组合变形等问题。

要注意的是,上列三类问题都要求杆件是小变形的,①②类问题一般还要求杆件或杆件组分材料是线弹性的。一般材料力学教材只涉及①类问题,有的教材偶尔涉及②③类问题中一些非常简单的情形。

### 1.3 材料力学基本问题的分析方法

由于杆件的几种基本变形中,由横向剪力引起的切应力和剪切变形都很小,因此只在某些特殊情况下才考虑剪力引起的切应力,例如,层合梁在材料界面处抵抗剪切的能力一般较差,此时需要考虑切应力的影响,又如薄壁构件弯曲时极易产生非平面弯曲,切应力的影响较大,一般也需要考虑;而由横向剪力引起的剪切变形在材料力学中完全忽略不计,从未考虑过。因此,材料力学的基本问题主要是单一材料制成的杆件的拉压、圆轴的扭转、梁的弯曲及组合变形等问题,其具体分析过程如下:

①用截面法计算杆件截面上的内力。

②通过三个分析,即静力学分析、几何分析和物理分析,导出各种基本变形形式下杆件截面上的应力计算公式和杆件的变形计算公式。

③确定杆件的危险截面,计算危险截面上的内力,判别危险截面上危险点的应力状态,应用强度条件或强度准则进行杆件的强度计算。

④计算杆件的变形,应用刚度条件进行杆件的刚度计算。

⑤如果问题是超静定问题,先应用超静定问题的求解方法求出多余约束反力(外部超静定问题)或直接求出内力(内部超静定问题),再经①至④的过程解决问题。

注意②中应力计算公式和变形计算公式推导出来后,对同种变形的杆件普遍适用,因此,解决材料力学基本问题简单地说就是两大步:一是计算杆件的内力,二是应用应力公式计算杆件的强度或应用变形公式计算杆件的刚度。

要特别注意的是,三个分析中静力学分析可直接引用式(1.1),物理分析可直接引用简单虎克定律,而几何分析是材料力学理论分析中的重点和难点,其关键在于材料力学理论逻辑过程在此被打断,需要应用“实验推测”和“微段分析法”才能导出杆件截面上各点的应变分布规律,从而导出杆件截面上的应力分布规律和应力计算公式以及杆件的变形计算公式等。

另外,材料力学中杆件的强度计算是基于如下的一种强度观点,即两个判断:

①杆件中最危险的点如果安全,则整个杆件安全。

②杆件中最危险的点如果不安全,则整个杆件也不安全。

因此,材料力学中判断杆件是否安全,实质上判断的是杆件中最危险的点是否安全。上述强度观点中,很显然判断②是比较武断的,但根据该强度观点进行结构设计时,设计出的构件是偏安全的,这从安全角度来说是有利的,但从经济角度来说可能就不太有利。例如工程中广泛使用成本较高的金属构件,如按上述强度观点进行设计时,截面的尺寸要求比较大,则用料及成本就要增加。由于大多数金属材料是典型的塑性材料,而塑性材料达到其强度失效应力时,实际上离其破坏还很遥远,因此,为了减少用料和降低成本,工程中在对金属构件进行设计时,往往采用的是另一种强度观点,即极限强度观点,按这种强度观点设计塑性构件时,可充分发挥材料的塑性特性和强度特性,在安全的条件下减少用料和成本。

下面以单一材料制成的拉压杆为例说明材料力学基本问题的分析方法。

### (1) 内力分析

如图 1.4 所示, 杆件受轴向载荷作用只产生单纯的拉压变形, 离坐标原点  $O$  为  $x$  的截面上的坐标系为  $yo z$ ,  $o$  是截面上各点内力向其简化的特殊点,  $Ox$  轴是沿杆件轴线方向的坐标轴。根据截面法, 杆件截面上的内力分量只有轴力不为零, 其他内力分量全部为零, 假设该截面上的轴力为  $F_N$ , 任意一点的正应力为  $\sigma$ , 注意一般情况下  $\sigma$  是截面坐标  $y, z$  的函数。由于杆件只产生单纯的拉压变形, 则截面上任意点处的切应力分量均为零。

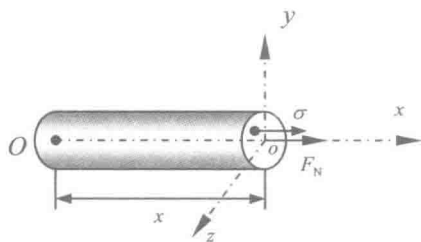


图 1.4 拉压杆截面上的应力和内力

### (2) 应力分析

#### (a) 静力学分析

引用式 (1.1) 中只与正应力有关的那一组静力学方程, 则有:

$$\begin{cases} F_N = \int_A \sigma dA \\ M_y = \int_A \sigma z dA = 0 \\ M_z = -\int_A \sigma y dA = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

这是唯一知道的一组方程, 而由式 (1.2) 是无法求出截面上的正应力与截面上的内力之间的显函数关系式的。这在数学上相当于已知某一函数的积分结果而要求积分号下的这个函数的具体形式, 这不可能做到。怎么办? 面对科学未知领域的问题, 科学研究常常采用下述几个研究层次来解决问题:

①根据已有理论通过严密的数学逻辑分析解决问题。

②在已有理论不能解决问题时, 通过实验总结归纳一些规律性的结果, 再结合已有理论解决问题。

③在已有理论不能解决问题, 同时由于条件限制或成本高昂等使得实验也无法进行时, 还可采用假说的方式解决问题。

因此, 材料力学理论的严密的逻辑分析到式 (1.2) 后实际上已不能继续进行下去了, 还必须采用实验或假说的方式才能解决问题。

#### (b) 几何分析

**实验:** 在杆件表面画上水平和竖直的直线段, 然后在拉力机上做简单拉伸或压缩实验, 载荷作用在杆件轴线上, 如图 1.5 (a) 所示。拉伸实验表明: 杆件表面的水平线

段伸长，而竖直线段在杆件变形后仍然保持为直线，只是相对于原来位置沿轴线方向移动了一段距离，如图 1.5 (b) 所示。据此可进行如下合理的推测：既然杆件表面上的线段如上述方式变形，则杆件内部相应的线段也极大可能产生与表面线段相同的变形。因此引入下述的一个关于拉压杆变形的假设也就是比较合理的。

**平截面假设：**拉压杆的横截面在变形过程中始终保持为平面，而且变形后仍为杆件的横截面。

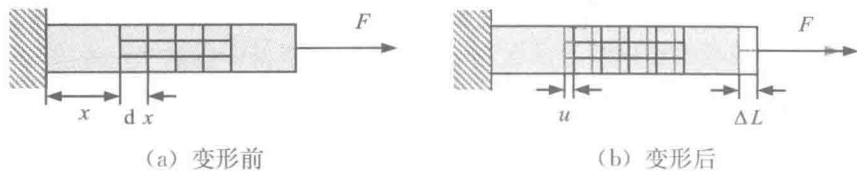


图 1.5 杆件的拉伸实验

注意平截面假设是根据“实验推测”所引进的关于杆件变形的一个未加证明的假设，实际上对于杆件在应力集中区域平截面假设并不能严格成立。

再选取距离坐标原点为  $x$  处的一段微元长度的杆件来分析其变形，只考虑其相对变形，如图 1.6 所示，假设  $A, B$  两点是该处截面上的任意两点，则根据平截面假设这两点处沿水平方向的两个微元长度的线段  $dx$  在杆件变形后其伸长量相同，均为  $\Delta(dx)$ ，则根据线应变的定义， $A, B$  两点沿水平方向的线应变相同，由于  $A, B$  的任意性，则该处截面上各点在水平方向的线应变是相同的，也即是均匀分布的，这一结论称为应变分布规律，可写为：

$$\epsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \epsilon(x) \quad (1.3)$$

即该处截面上各点在水平方向的线应变与截面坐标  $y, z$  无关，式 (1.3) 又称为几何方程。上述的分析方法称为“微段分析法”，是材料力学基本问题特别重要的分析方法。

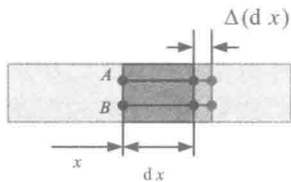


图 1.6 微元长度杆件的变形分析

特别要强调的是，几何方程式 (1.3) 与杆件材料的力学性能无关，即无论杆件材料是线弹性材料还是非线性弹性材料，杆件是单一材料制成的还是不同材料叠合而成的，只要满足平截面假设，则几何方程式 (1.3) 都成立。

### (c) 物理分析

假设杆件由单一材料制成，且处于线弹性小变形状态，则根据简单虎克定律，杆件截面上任意一点处均有  $\sigma = E\epsilon$ ，由于材料的弹性模量  $E$  是常数， $\epsilon$  在截面上均匀分布，则杆件截面上各个点的应力也是相同的，即也是均匀分布的。这一结论称为应力分布规律，可写为：

$$\sigma = E\varepsilon(x) = \sigma(x) \quad (1.4)$$

即该处截面上各点的应力与截面坐标  $y, z$  无关。

将式 (1.4) 代入静力学方程式 (1.2) 后面两式, 有:

$$\begin{cases} M_y = \int_A \sigma z dA = \sigma \int_A z dA = \sigma S_y = 0 \\ M_z = -\int_A \sigma y dA = -\sigma \int_A y dA = -\sigma S_z = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

其中  $S_y, S_z$  分别是截面对坐标轴  $y, z$  的静矩。则有  $S_y = S_z = 0$ , 即  $y, z$  坐标轴过截面的形心, 则截面坐标系的原点  $o$  是截面的形心,  $Ox$  轴即是杆件的轴线。也就是说, 对单一材料制成的杆件, 要使其在轴向载荷作用下只产生拉压变形, 则轴向载荷一定要作用在杆件的轴线上; 否则  $M_y, M_z$  不全为零, 则杆件将产生拉压与弯曲 (偏心拉压) 或拉压与斜弯曲的组合变形。

将式 (1.4) 代入静力学方程式 (1.2) 的第一式, 有  $F_N = \sigma \int_A dA = \sigma A$ , 则有:

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (1.6)$$

式 (1.6) 就是拉压杆横截面上的应力计算公式, 即应力在杆件截面上均匀分布, 等于该截面上的轴力除以该截面的面积。

### (3) 强度分析

根据材料力学的强度观点, 拉压杆的强度条件可写为:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{F_N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma] \quad (1.7)$$

式 (1.7) 有如下应用: ①校核杆件的强度; ②在满足强度要求的条件下计算杆件的许可载荷; ③在满足强度要求的条件下设计杆件的截面尺寸。式 (1.7) 有以下两种特殊情况:

(a) 杆件是等截面杆件, 则式 (1.7) 简化为:

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (1.8)$$

即杆件的危险截面在轴力最大的截面, 危险点是该截面的任意点。

(b) 杆件材料的拉压力学性能不相同, 则强度条件式 (1.7) 分解为两个条件, 即:

$$\begin{cases} \sigma'_{\max} \leq [\sigma'] \\ \sigma''_{\max} \leq [\sigma''] \end{cases} \quad (1.9)$$

其中,  $\sigma'_{\max}, \sigma''_{\max}$  分别是杆件中的最大拉应力和最大压应力,  $[\sigma'], [\sigma'']$  分别是杆件材料的许用拉应力和许用压应力。

### (4) 变形分析

杆件的变形即杆件的伸长可利用式 (1.3)、式 (1.4) 以及式 (1.6) 得到:

$$\Delta(dx) = \frac{F_N}{EA} dx \quad (1.10)$$

此为微元长度杆件的伸长量，其中  $A$  是杆件截面的面积。而整个杆件的伸长量为：

$$\Delta L = \int_L \frac{F_N}{EA} dx \quad (1.11)$$

式 (1.11) 就是拉压杆的**变形计算公式**，其中积分沿杆件的长度。式 (1.11) 重要的特殊情况是**等截面单一材料制成的二力杆**，其变形计算公式可简化为：

$$\Delta L = \frac{F_N L}{EA} \quad (1.12)$$

### (5) 刚度分析

受拉杆的刚度条件可写为：

$$\Delta L \leq [\Delta L] \text{ 或 } \epsilon_m = \frac{\Delta L}{L} \leq [\epsilon] \quad (1.13)$$

其中  $[\Delta L]$ ,  $[\epsilon]$  分别是杆件的许可伸长和许可应变， $\epsilon_m$  是杆件的平均应变，注意式 (1.13) 只适用于受拉的杆件，这是因为受压的杆件可能存在稳定性问题，所以拉压杆的刚度问题比较复杂，工程中对于受拉或受压的杆件，往往采用柔度型的刚度条件，即：

$$\lambda \leq [\lambda] \quad (1.14)$$

这里  $\lambda = \frac{\mu L}{i}$  是杆件的柔度。式 (1.13) 或式 (1.14) 有如下应用：①校核杆件的刚度；②在满足刚度要求的条件下计算杆件的许可载荷；③在满足刚度要求的条件下设计杆件的截面尺寸。

注意式 (1.6) ~ 式 (1.14) 的应用条件是：**杆件材料处于线弹性小变形状态；杆件是单一材料制成的；轴向载荷作用在杆件的轴线上；杆件变形满足平截面假设。**

以上就是材料力学中单一材料制成的拉压杆的应力和强度及变形和刚度的分析方法，而单一材料制成的圆轴扭转问题以及梁的平面弯曲问题的分析方法与此完全类似。特别要强调的是，根据实验现象经过合理推测，再引进一些未加严密证明的关于杆件变形的假设，这在材料力学理论分析中至关重要，这就是所谓的“**实验推测**”方法。它本质上规定了杆件横截面上各点之间变形的协调性，是材料力学理论逻辑过程的重要补充和不可或缺的部分。

## 1.4 组合杆件的拉压问题

组合杆件是由若干不同材料叠合而成的，每种材料一般只考虑是线弹性材料。在轴向载荷作用下若杆件只产生拉伸或压缩变形，且杆件在变形过程中满足平截面假设。问题：(1) 推导组合杆件各材料区域的应力计算公式。(2) 推导组合杆件的变形计算公式。(3) 要使组合杆件只产生拉伸或压缩变形，轴向载荷应作用在什么位置？

如图 1.7 所示，假设杆件由  $n$  种不同线弹性材料叠合而成，在截面上各材料所占区域的面积分别是  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )，材料的弹性模量分别是  $E_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )；截面坐标系  $y_c o_c z_c$  是形心坐标系， $x_c$  轴是杆件的轴线；而截面坐标系  $yo z$  的原点

$o$  是截面各点内力向其简化的特殊点, 轴向载荷作用在  $x$  轴上,  $o$  在截面形心坐标系下的坐标为  $(\xi, \eta)$ 。

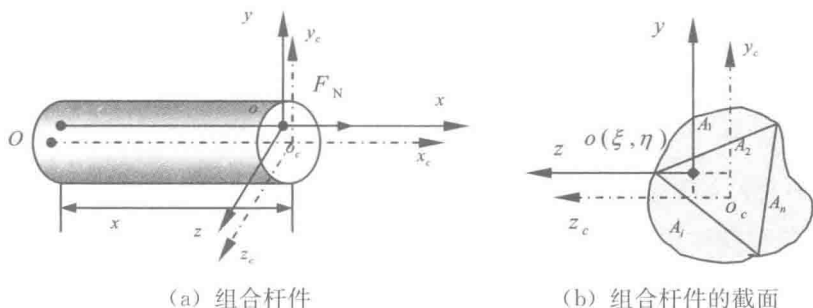


图 1.7 组合杆件的拉伸或压缩

### (1) 各材料区域的应力计算公式

假设组合杆件截面上的轴力为  $F_N$ , 作用点在  $o$  点, 并假设各材料区域的应力为  $\sigma_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 应变为  $\epsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )。由于静力学关系和几何方程与杆件材料的力学性能无关, 则组合杆件静力学关系仍然是式 (1.2), 而在满足平截面假设条件下, 几何方程仍然是式 (1.3), 即应变在截面上均匀分布, 因此有:

$$\epsilon_i = \epsilon \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.15)$$

根据简单虎克定律, 截面上各材料区域的应力为:

$$\sigma_i = E_i \epsilon_i = E_i \epsilon \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.16)$$

即应力在杆件截面上分片均匀。将式 (1.16) 代入静力学方程式 (1.2) 的第一式, 注意在各材料区域进行分片积分, 有:

$$\begin{aligned} F_N &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \sigma_k dA_k = \sum_{k=1}^n E_k A_k \epsilon = \left( \sum_{k=1}^n E_k A_k \right) \epsilon \\ \epsilon &= \frac{F_N}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} \end{aligned} \quad (1.17)$$

此即杆件截面上各点沿轴向方向的线应变。引入无量纲参数  $\kappa_k = \frac{E_k}{E_m}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ),  $E_m$  是组合杆件某一组分材料的弹性模量, 一般选最大弹性模量; 再引入等效截面面积  $A_0 = \sum_{k=1}^n \kappa_k A_k$ , 则式 (1.17) 可简单表示为  $\epsilon = \frac{F_N}{E_m A_0}$ 。

将式 (1.17) 代回到式 (1.16), 得组合杆件截面上各材料区域的应力计算公式为:

$$\sigma_i = \frac{E_i F_N}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} = \kappa_i \frac{F_N}{A_0} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.18)$$

可见与单一材料制成的杆件的应力计算公式 (1.6) 是不同的, 实际上式 (1.18) 更普适, 因当  $E_i = E$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 时, 式 (1.18) 退化到式 (1.6)。

### (2) 杆件的变形计算公式

由式 (1.17) 和线应变的定义有:

$$\Delta(dx) = \frac{F_N}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} dx = \frac{F_N}{E_m A_0} dx \quad (1.19)$$

式 (1.19) 是微元长度组合杆件的伸长量, 则整个杆件的伸长量为:

$$\Delta L = \int_L \frac{F_N}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} dx = \int_L \frac{F_N}{E_m A_0} dx \quad (1.20)$$

其中积分沿杆件的长度进行。式 (1.20) 即为组合杆件的变形计算公式。

### (3) 轴向载荷作用的位置

如图 1.7 (b) 所示, 设载荷作用点的位置在截面形心坐标系  $o(\xi, \eta)$  点, 则截面坐标系  $yo z$  与截面形心坐标系  $y_c o_c z_c$  之间的坐标变换式为:

$$\begin{cases} z_c = z + \xi \\ y_c = y + \eta \end{cases} \quad (1.21)$$

将式 (1.16) 和式 (1.17) 代入静力学方程式 (1.2) 的后两式, 注意到要分片积分, 有:

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} \sigma_k z dA_k = \sum_{k=1}^n E_k \epsilon \int_{A_k} z dA_k = \sum_{k=1}^n E_k \epsilon \int_{A_k} (z_c - \xi) dA_k \\ &= \epsilon \sum_{k=1}^n E_k \left( \int_{A_k} z_c dA_k - \xi A_k \right) = \epsilon \sum_{k=1}^n E_k (S_{y_c k} - \xi A_k) \\ &= \epsilon \left( \sum_{k=1}^n E_k S_{y_c k} - \xi \sum_{k=1}^n E_k A_k \right) = 0 \end{aligned}$$

同理可得  $\epsilon \left( \sum_{k=1}^n E_k S_{z_c k} - \eta \sum_{k=1}^n E_k A_k \right) = 0$ , 于是可得轴向载荷作用点的位置为:

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^n E_k S_{y_c k}}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \kappa_k S_{y_c k}}{A_0}, \quad \eta = \frac{\sum_{k=1}^n E_k S_{z_c k}}{\sum_{k=1}^n E_k A_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \kappa_k S_{z_c k}}{A_0} \quad (1.22)$$

其中,  $A_k$  是组合杆件截面上第  $k$  个材料区域的面积,  $A_0$  是等效截面面积。  $S_{y_c k} = \int_{A_k} z_c dA_k$ ,  $S_{z_c k} = \int_{A_k} y_c dA_k$  分别是第  $k$  个材料区域面积对截面形心坐标系的坐标轴  $y_c$  轴和  $z_c$  轴的静矩。式 (1.22) 有一个重要的推论, 即: 如果组合杆件截面的某轴是对称轴, 且材料和材料区域也对称这根轴, 则轴向载荷作用点  $o(\xi, \eta)$  一定在这根对称轴上。同样, 当  $E_k = E$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 时, 此时杆件是单一材料制成的杆件, 式 (1.22) 将退化成为  $\xi = \eta = 0$ , 即轴向载荷要作用在杆件的轴线上, 杆件才产生单纯的拉压变形。

另外要说明的是, 由于杆件拉伸压缩时对杆件的截面形状没有要求, 因此具体求解组合杆件的拉压问题时, 很多时候是直接将其当成超静定问题来进行求解。因此, 组合杆件的拉压问题有两种求解方法: 一是采用上述的静力学分析、几何分析和物理分析三个分析的方法进行求解, 二是采用超静定方法进行求解。

#### 【例题 1.1】圆形截面组合杆件问题

如图 1.8 (a) 所示, 半径为  $R$  的圆形截面杆件由两根材料不同的半圆形截面杆件牢固叠合而成, 两种材料的弹性模量分别为  $E_1, E_2$ , 且  $E_1 > E_2$ , 杆件只在两端受拉

力  $F$  作用, 则在杆件只产生单纯拉伸变形情况下, 求: (1) 两种材料区域的应力。(2) 载荷  $F$  的偏心距  $e$  是多大?

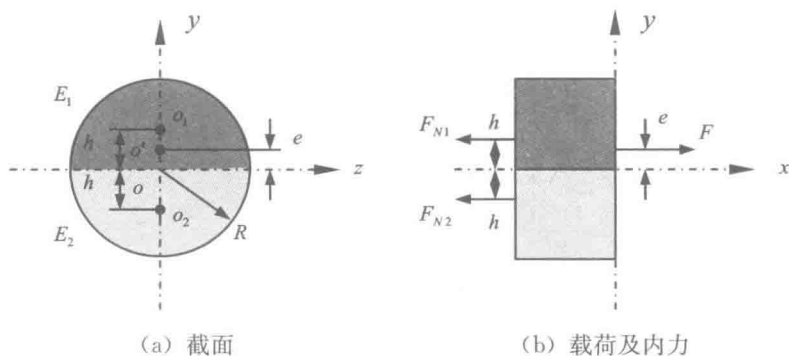


图 1.8 组合杆件的截面和载荷及内力

【解】明显载荷  $F$  的作用点在  $y$  轴上。问题 (1) 可采用上述的三种分析方法进行求解, 直接引用式 (1.18) 和式 (1.22) 即可解决问题。问题 (2) 也可采用超静定方法进行求解。如果不能直接记住式 (1.18) 和式 (1.22) 等公式, 采用三个分析的方法进行求解是比较麻烦的, 因此, 此时适宜采用超静定方法进行求解。

将组合杆件分解成两根杆件, 每根杆件都是由单一材料制成的, 假设两根杆中的内力分别是  $F_{N1}$ ,  $F_{N2}$ , 如图 1.8 (b) 所示, 则平衡方程为:

$$\begin{cases} F_{N1} + F_{N2} = F \\ (F_{N1} - F_{N2})h = Fe \end{cases}$$

几何方程:  $\Delta L_1 = \Delta L_2$

物理方程:  $\Delta L_1 = \frac{F_{N1}L}{E_1A}$ ,  $\Delta L_2 = \frac{F_{N2}L}{E_2A}$

其中  $A$  是半圆的面积,  $L$  是杆件的长度。

则补充方程为:  $\frac{F_{N1}}{E_1} = \frac{F_{N2}}{E_2}$ ,  $F_{N2} = \kappa F_{N1}$ ,  $\kappa = \frac{E_2}{E_1}$

联立平衡方程第一式可解得:  $F_{N1} = \frac{F}{1+\kappa} = \frac{E_1}{E_1+E_2}F$ ,  $F_{N2} = \frac{\kappa F}{1+\kappa} = \frac{E_2}{E_1+E_2}F$

(1) 两种材料区域的应力

材料 1 区域的应力:  $\sigma_{(1)} = \frac{F_{N1}}{A} = \frac{1}{1+\kappa} \cdot \frac{F}{A} = \frac{2E_1}{E_1+E_2} \cdot \frac{F}{\pi R^2}$

材料 2 区域的应力:  $\sigma_{(2)} = \frac{F_{N2}}{A} = \frac{\kappa}{1+\kappa} \cdot \frac{F}{A} = \frac{2E_2}{E_1+E_2} \cdot \frac{F}{\pi R^2}$

(2) 载荷的偏心距

半圆的形心位置:  $h = \frac{4R}{3\pi}$ , 则由平衡方程第二式可得:

$$e = \frac{(F_{N1} - F_{N2})h}{F} = \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \cdot h = \frac{E_1-E_2}{E_1+E_2} \cdot h = \frac{E_1-E_2}{E_1+E_2} \cdot \frac{4R}{3\pi}$$

注意在计算中引入无量纲参数  $\kappa = \frac{E_2}{E_1}$  使计算过程和结果表示都非常简洁。