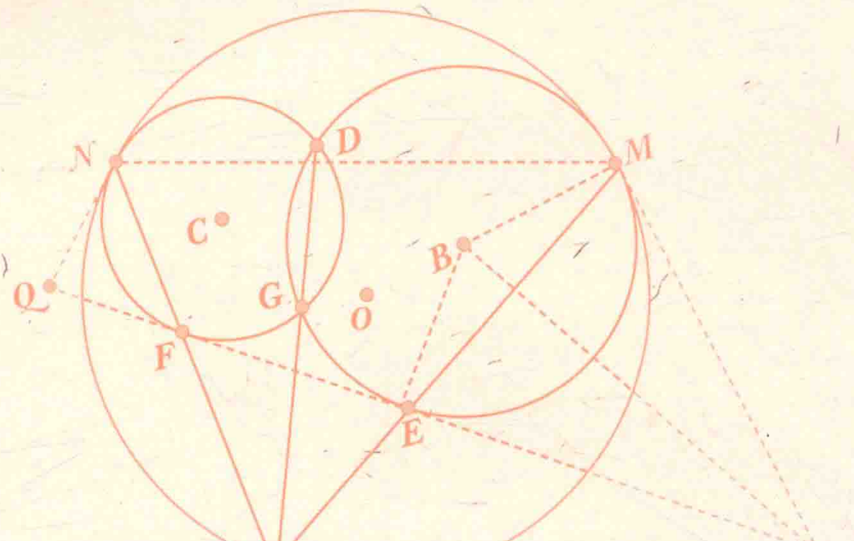
中教百花论丛

中学数学
思维方法与能力培养

ZHONGXUE SHUXUE
SIWEI FANGFA YU NENGLI PEIYANG

张元春／著



湖南师范大学出版社

中教百花论丛

中学数学
思维方法与能力培养

ZHONGXUE SHUXUE
SIWEI FANGFA YU NENGLI PEIYANG

张元春 / 著

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

中学数学思维方法与能力培养 / 张元春著 . —长沙：湖南师范大学出版社，2016.9

ISBN 978-7-5648-2475-4

Ⅰ. ①中…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①中学数学课—教学研究　Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 111561 号

中学数学思维方法与能力培养

张元春　著

◇策划组稿：李　阳
◇责任编辑：张　婷　颜李朝
◇责任校对：郭小燕
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.88873071　88873070　传真/0731.88872636
◇经销：新华书店
◇印刷：湖南省誉成广告印务有限公司
◇开本：787mm×1092mm　1/16 开
◇印张：13.75
◇字数：280 千字
◇版次：2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978-7-5648-2475-4
◇定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线：13873190464　0731.88873070　88872256
投稿热线：0731.88872256　13975805626　QQ：1349748847

作者简介

张元春，特级教师，数学奥林匹克教练。曾任市、区级教研员，具有扎实的教育理论基础和丰富的教学经验，发表论文数十篇。

中教百花论丛

- **中学数学思维方法与能力培养**
- 高中作文技法指导
- 高中化学疑难导学
- 百年中学作文命题发展变革研究
- 分享教育在博才

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前　言

数学是一门古老的学科，从萌芽时期发展至今已有数千年的历史。数学的发展史不只是知识的积累和深化，更重要的是许多思想方法的积淀与提炼。数学思维问题是数学教育的核心问题。回顾近几十年来的数学教育，我们往往注重数学知识的传授以及“以多取胜”的题海战术，忽视知识发生、发展过程中数学思维方法的教学。这有悖于数学的客观规律，也正是传统教育弊端之所在。日本著名教育家米山国藏曾说过：“学生进入社会后，几乎没有机会应用他们初中或高中所学到的数学知识，因而这种作为知识的数学，通常在学生出校门后不到一两年就忘记了，然而不管从事什么业务工作，那种铭刻在头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要作用。”

培养和发展学生的思维能力是发展智力、全面培养数学能力的主要途径。因此，高中数学课程应注重提高学生的数学思维能力，这是数学教育的基本目标之一。人们在学习数学和运用数学解决问题时，不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维过程。这些过程是数学思维能力的具体体现，有助于学生对客观事物中蕴含的数学模式进行思考和做出判断。数学思维能力在学生形成理性思维中发挥着独特的作用。如果从数学思维方面所起的作用来了解它，不学习运用数学思维方法，我们就不可能完全理解人文科学、自然科学、人的所有创造和人类世界，从而为人类作出更大的贡献。我们应该特别重视数学思维在人类进步和社会发展中的重要作用。

数学思维的一般方法是指数学思维过程中运用的基本方法。观察与实验，比较、分类与系统化，归类、演绎与数学归纳法，分析与综合，抽象与概括，一般化与特殊化，模型化与具体化，类比与映射，联想与猜想等，这些方法是数学的思维形式。本书所讲的是中学数学中通用的若干思维方法。这些基本思维方法不仅是探索解题途径的一盏盏灯，而且还是我们所必须具备的数学素养。一位著名教育家说过，真正的教育的旨趣在于把教给的知识都忘记了，这剩下的就是能使学生终生受用的东西，这种

教育才是最好的教育。这里“终生受用的东西”在数学中就是指数学思维和数学基本思维方法。概括地说，数学教学对于学生发展的独特价值，不仅仅是数学知识本身的掌握，更为重要的是，既要帮助学生提升思维品质和数学素养，又要帮助学生学会抽象的符号表达和提高数学语言表达的水平；既要帮助学生建立猜想发现和判断选择的自觉意识，更要帮助学生形成主动学习和研究的心态，建构起一种唯有在数学学科的学习中才有可能经历、体验和形成的思维方式，从而实现数学教学与学生生命成长的双向转化和双向建构。

作者通过几十年教学探索和实践，初步探索出一套培养学生数学思维能力的方法。《中学数学思维方法与能力培养》一书共分九章。书中的第一章，重点介绍了几个数学基本概念的深化理解问题；第二至第九章，分别介绍了常见的几种数学思维与思想方法。这些章节相辅相成，前者是对基本观点的介绍，后者是对思想方法的介绍，目的是让学生懂得只有注重数学思维能力的训练，才能提高数学素养。

对于这本书，我们要求不过分着眼于书中的解题过程，从而使学生又陷入题海之中，而应通过这些解题过程让学生去感受如何运用正确的思维方法找到解题途径，从而说明数学题目虽然千变万化，但思维方法是不变的。

本书中所涉及的内容，是作者多年探索与实践的一种尝试，而对于培养学生数学思维方法与能力的探索仅仅是处于过程当中，虽然作者倾尽心力，数易其稿，但难免有错漏之处，恳请方家不吝赐教。感谢陈开金先生在校对过程中给予的建议和帮助！真诚期待同仁的批评批正。

张元春

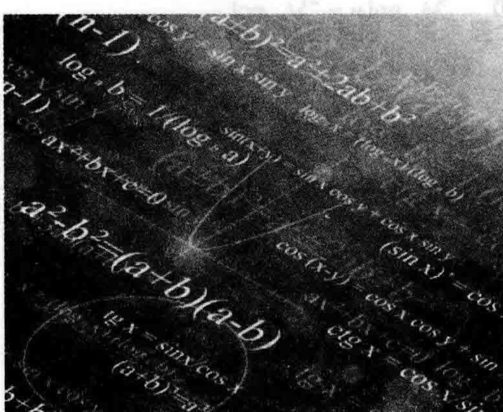
2016 年 3 月 28 日

目 录

第一章　几个数学基本概念的深化理解

数学课程的核心价值在于数学的思想方法及其对学生思维影响的价值。

——怀特海



1.1 代数式运算问题

多项式也是代数式，有许多类似于数的性质，处理数的问题的手段，如整数内部的分解，用数（式）分析等等也是解决多项式问题的常用方法．由于次数和系数是构成多项式的两要素，所以分解次数、比较系数也是解决多项式问题的基本方法．我们学习了有理式、根式、指数式、对数式、三角式，后四个是以有理式为基础的．

一、多项式与单项式

有理式包括多项式与单项式，它们是同一个事物的两种不同的表现形式．例如 $ab+bc$ 是多项式，而 $b(a+c)$ 就是单项式．因此，多项式与单项式是以最后一步运算来划分的．

要把多项式 $ab+bc$ 变为单项式 $b(a+c)$ 只需提取公因式，即因式分解．而要把单项式 $b(a+c)$ 化解为多项式 $ab+bc$，则要去括号展开．这里值得一提的是通分具有括号的功能，如 $1-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-(x-1)}{x}=\dfrac{1}{x}$．

代数式运算的主要类型之一是化简．对于多项式来讲，由于它的最后一步运算是加法或减法，故多项式的化简主要是合并同类项，而单项式的最后一步运算是乘法，所以单项式的化简主要是约分．在初中教学中，以字母代替数，把数的问题上升到代数式的问题．

例 当 $a^3-a-1=0$ 时，$a+\sqrt{2}$ 是某个整系数多项式的解，求最高系数为 1 的满足上述条件的次数最低的多项式．

分析 由题意，所求的多项式 $f(x)$ 应含有因式 $a=x-\sqrt{2}$，即由 $a^3-a-1=0$ 可得 $(x-\sqrt{2})^3-(x-\sqrt{2})-1=0$，得 $x^3-3\sqrt{2}x^2+5x-1=\sqrt{2}$，得 $x^3+5x-1=\sqrt{2}(3x^2+1)$，两边平方即得 $f(x)$．

解 设 $x=a+\sqrt{2}$

则 $a^3-a-1=(x-\sqrt{2})^3-(x-\sqrt{2})-1=x^3-3\sqrt{2}x^2+5x-1$

有 $x^3-3\sqrt{2}x^2+5x-1=\sqrt{2}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

即 $x^3+5x-1=\sqrt{2}(3x^2+1)$

将上式两边平方整理，即得所求的多项式为：

$$f(x)=x^6-8x^4-2x^3+13x^2-10x-1$$

二、对数式化简

由于对数式是以有理式为基础，所以对数式化简是以有理式化简为基础，但又与有理式有些不同．其不同点具体体现在对数公式上：

（1）$\begin{cases} a^b=N \\ \log_a N=b \end{cases}\quad (a>0且a\neq 1,\ N>0)\Rightarrow a^{\log_a N}=N$

由于对数式与指数式是基于一对互逆运算，故这个公式是体现它们合二为一的最好形式．

$$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)\ （a>0且a\neq 1，\ M>0，\ N>0）$$

只需令 $\log_a M=b\quad \log_a N=c$

则 $a^b=M\quad a^c=N$

$\therefore a^b\cdot a^c=a^{b+c}=MN$

$\because b+c=\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

由此可见，这个公式的证明用到了“同底数幂相乘，底数不变，指数相加”这个性质．同样利用指数运算的其他性质还可得到：

（2）$\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$（$a>0且a\neq 1$，$M>0$，$N>0$）

$$\log_a M^n=n\log_a M\quad（a>0且a\neq 1，\ M>0）$$

$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

推论 1：

$$\log_{a^m} N^n=\frac{n\log_b N}{m\log_b a}$$

推论 2：

$$\log_{\sqrt[m]{a}} \sqrt[n]{N}=\frac{\frac{1}{n}\log b^N}{\frac{1}{m}\log b^a}=\frac{m\log b^N}{n\log b^a}$$

换底公式

$$\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}\quad (a>0且a\neq 1,\ b>0,\ m>0且m\neq 1)$$

（3）$M^{\log_a N}=N^{\log_a M}$

理清了对数公式后，接下来讲对数化简的步骤：

1．先用对数公式直接化简

由于任何一个公式都可看作两个公式，即从等号的左边往右看或从等号的右边往左边看．对于等号的左右两边，必会有一边形式复杂，而另一边形式简单，要利用公式直接化简，那就首先要明白究竟什么样的变化是由繁到简．

对于对数公式来说：

（1）$a^{\log_a N}=N\ (a>0且a\neq 1,\ N>0)$（从左往右是由繁到简）

（2）$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)\ (a>0且a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$（同上）

（3）$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}\ (a>0且a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$（同上）

（4）$\log_a M^n=n\log_a M\ (a>0且a\neq 1,\ M>0)$（等号左右两边的繁简程度相差无几）

（5）$\log_a b=\dfrac{\log_m b}{\log_m a}\ (a>0且a\neq 1,\ b>0,\ m>0且m\neq 1)$（从右往左是由繁到简）

另外还要弄清每个公式化简的条件．

（1）$a^{\log_a N}=N$　条件：指数式，指数位置上是一个对数式，且指数的底数与对数的底数是同一个．

（2）$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$　条件：同底对数的加、减、除．

（3）$\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$

（4）$\log_a b=\dfrac{\log_m b}{\log_m a}$

例 1　求值 $6^{\lg 40}\times 5^{\lg 36}$

解　由恒等式 $M^{\log_a N}=N^{\log_a M}$，

有　原式 $=40^{\lg 6}\times 5^{2\lg 6}=(40\times 25)^{\lg 6}=10^{3\lg 6}=6^3=216$

例 2　化简 $\dfrac{\log_a b+\log_a c}{1+\log_a c}$

分析　把 1 变为 $\log_a a$，则分子、分母都是同底对数相加，可直接化简，然后再用换底公式.

解　原式 $\dfrac{\log_a b+\log_a c}{\log_a a+\log_a c}=\dfrac{\log_a bc}{\log_a ac}=\log_{ac} bc$.

2．不能用对数公式直接化简的，就采用有理式化简（变形）方法，为约分、合并同类项做准备工作

由于这时要把 $\log_a b$ 看作一个整体，故所做的准备工作有两个：

① 化同底；

② 把真数进行质因数分解.

例 3　计算 $\lg 5\lg 8000+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2$

分析　不能利用对数公式直接化简，因为底数相同，所以只要把真数进行质因数分解即可.

解　原式 $=\lg 5\lg(2^3\times 10^3)+(\sqrt{3}\lg 2)^2$

$$\begin{aligned}&=\lg 5(3\lg 2+3)+3\lg^2 2\\&=3\lg 2\lg 5+3\lg 5+3\lg^2 2\\&=3\lg 2(\lg 5+\lg 2)+3\lg 5\\&=3\lg 2+3\lg 5\\&=3.\end{aligned}$$

例 4　计算 $(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)-\log_2\sqrt[4]{32}$

分析　不能利用对数公式直接化简，利用换底公式把底数化成相同.

解　原式 $=\left(\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}+\dfrac{\lg 3}{3\lg 2}\right)\left(\dfrac{\lg 2}{\lg 3}+\dfrac{\lg 2}{2\lg 3}\right)-\dfrac{5}{4}$

$$=\frac{\lg 3}{2\lg 2}\cdot\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 3}{2\lg 2}\cdot\frac{\lg 2}{2\lg 3}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\cdot\frac{\lg 2}{\lg 3}+\frac{\lg 3}{3\lg 2}\cdot\frac{\lg 2}{2\lg 3}-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{5}{4}$$

$$=0.$$

例 5 计算 $\dfrac{\lg 8+\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{1000}}{\lg 1.2}$

分析 分子是同底对数的加、减，故此题可直接用公式化简.

解 原式 $=\dfrac{\lg\dfrac{8\sqrt{27}}{\sqrt{1000}}}{\lg 1.2}$

$$=\frac{\lg\sqrt{\dfrac{64\times 27}{1000}}}{\lg 1.2}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\lg\left(\dfrac{4\times 3}{10}\right)^3}{\lg 1.2}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{2}\lg 1.2}{\lg 1.2}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

例 6 计算 $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$

解法 1 先将真数作变形，由 $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

有 $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})=\lg\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right)=\lg\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$

解法 2 分析 辅以对数的运算性质对真数作变形

有原式 $=\dfrac{1}{2}\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

$$=\frac{1}{2}\lg\sqrt{10}=\frac{1}{2}.$$

例 7　计算 $\log_{15}{}^2 3+\dfrac{\log_{15}45}{\log_5 15}$

分析　先用换底公式把 $\dfrac{1}{\log_5 15}$ 化为 $\log_{15}5$，再把真数进行质因数分解.

解　原式 $=\log_{15}{}^2 3+\log_{15}(5\times 3^2)\log_{15}5$

$$=\log_{15}{}^2 3+2\log_{15}3\log_{15}5+\log_{15}{}^2 5$$

$$=(\log_{15}3+\log_{15}5)^2$$

$$=1.$$

1.2　等式问题

在中学阶段，差不多每个章节都要牵涉到等式问题. 对于等式问题的处理能力，在很大程度上反映了一个学生数学思维能力的强弱.

等式分为两种，一种叫恒等式，另一种叫条件等式.

恒等式：一个含有字母的等式，当字母在它的允许取值范围内取任何值等式都成立，这种等式叫做恒等式.

条件等式：一个含有字母的等式，只有当字母满足某种特定条件时，等式才能成立，这种等式叫做条件等式. 如等式 $ab=1$，只有当 $a=\dfrac{1}{b}$ 时等式才能成立，又如等式 $x^2-2x-8=0$，只有当 $x=4$ 或 $x=-2$ 时才能成立. 很明显方程都是条件等式.

下面着重介绍在处理恒等式和条件等式时的基本方法和思路.

一、恒等式的基本解法

解决恒等式一般有两个基本方法：

（1）根据恒等式的定义，由于字母在它的允许值范围内取任何值等式都成立，只要根据题目要求挑选适当的字母值代入，就可把问题解决.

（2）根据两个多项式恒等对应项系数相等的性质.

例 1　n 是奇数，且 $(x-1)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，求 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$ 的值

分析　已知等式是恒等式，只要令 $x=1$ 代入可得 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0$. 再令 $x=0$ 可

求出 a_0 的值，即可得到所求的值.

解 令 $x=1$，则 $(1-1)^n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$

即 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$

又 $\because n$ 是奇数 $\therefore$ 令 $x=0$，得 $a_0=(-1)^n=-1$

$\therefore a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1=1$

例 2 是否存在 a、b、c 使等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots++n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$ 对 $n\in N$ 恒成立，并证明你的结论.

分析 首先求出 a、b、c. 三个未知数需建立三个方程. 而已知等式是关于 n 的恒等式，只要取三个不同的 n 值代入可得到 a、b、c 的三个方程.

解 取 $n=1$，2，3 可得

$$\begin{cases}24=a+b+c & ①\\44=4a+2b+c & ②\\70=9a+3b+c & ③\end{cases}$$

解此方程组可得 $\begin{cases}a=3\\b=11.\\c=10\end{cases}$

说明 有些同学认为求出了 a、b、c 的值就证明了 a、b、c 的存在，这是错误的. 因为这里 n 可取不同的值代入，求出的 a、b、c 是否还是 3、11、10 呢？因此可用数学归纳法证明. 这里证明从略.

例 3 已知 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，$g(x)=\dfrac{2}{cx+d}(c\neq 0)$. 且 $f[g(x)]=\dfrac{x}{x-2}$，$g[f(x)]=\dfrac{1}{2x-1}$，求 $abcd$ 之值.

分析 以上几个等式都是关于 x 的恒等式，只要把它们化简后，应用多项式恒等式的性质可把问题解决.

解 $\because f[g(x)]=a\cdot\dfrac{2}{cx+d}+b=\dfrac{bcx+bd+2a}{cx+d}=\dfrac{x}{x-2}$，即 $\dfrac{bx+\dfrac{bd+2a}{c}}{x+\dfrac{d}{c}}=\dfrac{x}{x-2}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com