21世纪高等院校教材

概率论（经管类）

王文轲　高　慧　卫贵武　主编

科 学 出 版 社

21 世纪高等院校教材

概率论（经管类）

王文轲　高　慧　卫贵武　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是一线教师在对近 10 年的概率论教学经验总结的基础上编写而成的.本书主要内容包括随机事件的概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征、大数定理及中心极限定理.编写过程遵循由浅入深,由易到难,由具体到抽象的原则,以便学生易于理解和掌握. 全书每节都配备了习题,且每章最后配备了总习题,这样便于学生巩固知识,也为自学者提供同步复习的内容,从而达到巩固新知识的目的.

本书可以作为经济管理类专业的教材,也可以作为工科专业及研究生入学考试的参考书,亦可作为相关专业自学者的学习用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论: 经管类/王文轲, 高慧, 卫贵武主编. —北京: 科学出版社, 2016.5
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-048300-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… ②高… ③卫… Ⅲ.①概率论–高等学校–教材
Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 105307 号

责任编辑: 张　凯 / 责任校对: 王　瑞
责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http: //www. sciencep. com
北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 7 月第　一　版　开本: 787 × 1092　1/16
2016 年 7 月第一次印刷　印张: 10 1/8
字数: 195 000
定价: 35.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

概率论是研究随机现象的数学分支. 经过众多学者的潜心研究, 概率论、数理统计、随机过程已经成为相互关联又自成体系的三门严谨的分支学科. 随着科学技术的快速发展和生产力的大幅度提高, 在各个研究领域和工程技术领域中, 人们越来越关注随机模型, 这使得随机理论和方法的应用日益广泛, 几乎渗透到科学技术的各个领域.

本书是编者在对概率论近 10 年教学经验的总结, 并参考现有相关教材的基础上编写而成的. 其主要介绍概率论中的基本概念、基本原理以及基本方法, 并且注重可读性, 强调内容的直观性, 突出基本思想和应用背景. 为了适应科技发展的需要, 适应经济管理类专业的教学的需求, 作者本着简洁、明了、直观、逻辑严谨、精益求精的指导思想, 完善教材结构体系, 注重选择针对性强的例题以及习题, 章节后均配备了大量的习题（习题详细解答可联系出版社索取）, 从而更好地体现了本书的可读性与自学性.

本书在写作过程中参考了众多的国内外优秀教材; 科学出版社智慧干练的张凯、方小丽老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量的心血; 熊梓言、匡露、温家茗、刘佳、刘潇、刘桔、王欣等同学做了大量的具体的工作. 在此一并表示感谢!

限于编者水平, 书中难免有不足之处, 欢迎广大读者批评指正.

编　者

2016 年 5 月

目　录

第一章　随机事件的概率……1
第一节　随机试验与随机事件……1
一、随机试验与样本空间……1
二、随机事件……2
三、事件间的关系与运算……4
习题 1-1……8
第二节　随机事件的概率……9
一、频率与概率……9
二、概率的性质……12
习题 1-2……14
第三节　等可能概型(古典概型)……15
一、古典概型……15
二、几何概型……20
习题 1-3……21
第四节　条件概率与乘法公式……23
一、条件概率……23
二、乘法公式……25
习题 1-4……26
第五节　全概率与贝叶斯公式……27
一、全概率公式……27
二、贝叶斯公式……29
习题 1-5……30
第六节　独立性……31
一、两个事件的独立性……31
二、多个事件的独立性……33

习题 1-6 …… 35
第一章总习题 …… 37
第二章　一维随机变量及其分布 …… 40
第一节　随机变量 …… 40
习题 2-1 …… 43
第二节　离散型随机变量 …… 43
一、0-1 分布 …… 45
二、伯努利试验与二项分布 …… 45
三、泊松分布 …… 48
习题 2-2 …… 50
第三节　随机变量的分布函数 …… 52
一、分布函数的定义 …… 52
二、分布函数 $F(x)$ 的性质 …… 52
习题 2-3 …… 56
第四节　连续型随机变量及其概率密度 …… 57
一、密度函数的定义 …… 57
二、密度函数的性质 …… 58
三、均匀分布 …… 60
四、指数分布 …… 62
五、正态分布 …… 64
习题 2-4 …… 68
第五节　随机变量的函数的分布 …… 69
一、离散型随机变量的函数的分布 …… 70
二、连续型随机变量的函数的分布 …… 71
习题 2-5 …… 74
第二章总习题 …… 75
第三章　多维随机变量及其分布 …… 78
第一节　二维随机变量 …… 78

一、分布函数的定义 …… 79
二、分布函数的基本性质 …… 80
三、概率密度 $f(x,y)$ 的性质 …… 83
习题 3-1 …… 86
第二节　边缘分布 …… 87
习题 3-2 …… 91
第三节　二维随机变量的条件分布 …… 92
一、条件分布律的定义 …… 93
二、条件概率密度、条件分布函数的定义 …… 95
习题 3-3 …… 98
第四节　相互独立的随机变量 …… 99
一、二维随机变量相互独立的定义 …… 99
二、定理 …… 104
习题 3-4 …… 104
第五节　二维随机变量的函数的分布 …… 105
一、$Z=X+Y$ 的分布 …… 105
二、$Z=\dfrac{Y}{X}$ 的分布、$Z=XY$ 的分布 …… 108
三、$M=\max\{X,Y\}$ 及 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布 …… 109
习题 3-5 …… 110
第三章总习题 …… 111
第四章　随机变量的数字特征 …… 114
第一节　数学期望 …… 114
一、数学期望的定义 …… 115
二、数学期望的性质 …… 119
习题 4-1 …… 120
第二节　方差 …… 121
一、方差的定义 …… 121

二、方差的性质 ······ 124

三、切比雪夫不等式 ······ 128

习题 4-2 ······ 130

第三节　协方差及相关系数 ······ 131

一、协方差的定义 ······ 131

二、协方差的性质 ······ 132

三、相关系数的定义 ······ 132

四、相关系数的性质 ······ 133

习题 4-3 ······ 137

第四节　矩、协方差矩阵 ······ 138

一、矩、协方差矩阵的定义 ······ 138

二、n 维正态随机变量的重要性质(证略) ······ 141

习题 4-4 ······ 141

第四章总习题 ······ 141

第五章　大数定律及中心极限定理 ······ 143

第一节　大数定理 ······ 143

一、切比雪夫定理 ······ 143

二、伯努利大数定理 ······ 144

三、弱大数定理(辛钦定理) ······ 145

第二节　中心极限定理 ······ 145

一、独立同分布的中心极限定理 ······ 145

二、李雅普诺夫定理 ······ 146

三、棣莫弗-拉普拉斯定理 ······ 148

第五章总习题 ······ 149

参考文献 ······ 151

附表 1　泊松分布数值表 ······ 152

附表 2　标准正态分布表 ······ 154

第一章　随机事件的概率

自然现象和社会现象多种多样. 有一类现象, 如在一个大气压下, 水加热到 100℃一定沸腾, 苹果一定从树上掉落, 等等, 这类现象称为**确定性现象**, 其特点是在一定的条件下必然发生, 例如, 一枚硬币向上抛后必然下落; 在市场经济条件下, 某商品供过于求, 其价格必不会上涨, 等等. 另一类现象, 如向上抛掷一枚硬币, 其落地后可能是正面朝上, 也可能是反面朝上; 下周的股市可能会上涨也可能会下跌, 等等, 这类现象称为**随机现象**, 其特点是在一定的条件下可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 并且在试验和观察之前, 不能预知确切的结果.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象所具有的规律性的一门数学学科.

例如, 在相同条件下, 多次抛掷一枚均匀硬币, 得到正面朝上的次数与抛掷的总次数之比随着次数的增多会越来接近于 0.5, 随机现象的这种在大量重复试验中呈现出来的稳定性或固有规律性称为**统计规律性**. 这种规律性的存在使得利用数学工具研究随机现象成为可能. 概率论和数理统计研究的主要问题就是随机现象的统计规律性.

为了便于后面的分析和讨论, 本章介绍概率论的一些基本概念: 事件、概率、条件概率及独立性等. 这些概念将贯穿全书, 为进一步讨论做准备.

第一节　随机试验与随机事件

一、随机试验与样本空间

这里将试验作为一个含义广泛的术语, 它包括科学试验、一般的检验, 以及对某一事物的某一特征的观察. 概率论所要讨论的是具有以下三个性质的随机试验:

(1) 试验在相同的条件下能够重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地, 我们把具有上述三个特点的试验称为**随机试验**, 或简称**试验**, 用英文大写字母 E 表示.

下面是一些试验的例子:

E_1: 抛一枚硬币, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况;

E_2: 将一枚硬币连抛两次, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况;

E_3: 将一枚硬币连抛两次, 观察正面 H 出现的次数;

E_4: 在某一批产品中任选一件, 检验其是否合格;

E_5: 记录某大型超市一天内进入的顾客人数;

E_6: 在一批电视机中任意抽取一台, 测试其寿命.

显然, 以上的试验都具有上面要求的三条性质, 都是随机试验.

对于任一个随机试验 E, 由于它必须满足条件(2), 所以, 试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**, 记为 Ω. Ω 中的元素, 即 E 的每个结果, 称为**样本点**. 样本点一般用 ω 表示, 于是可记 $\Omega=\{\omega\}$.

前面提到的试验 $E_1, E_2,\cdots, E_6$ 所对应的样本空间 $\Omega_1, \Omega_2,\cdots, \Omega_6$ 为

$$\Omega_1=\{H, T\};$$

$$\Omega_2=\{HH, HT, TH, TT\};$$

$$\Omega_3=\{0, 1, 2\};$$

$$\Omega_4=\{\text{合格}, \text{不合格}\};$$

$$\Omega_5=\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\};$$

$$\Omega_6=\{t \mid t\geqslant 0\};$$

应该注意的是, 试验 E_2 和 E_3 的过程都是将一枚硬币连抛两次, 但由于试验的目的不一样, 所以样本空间 Ω_2 和 Ω_3 截然不同, 这说明试验的目的决定试验所对应的样本空间.

二、随机事件

对于试验的结果, 人们不但关心试验的单个样本点, 而且常常对试验的某些样

本点组成的集合感兴趣. 例如, 在 E_6 中, 若规定电视机寿命超过 10000 小时为合格品, 否则为次品, 那么在试验 E_6 中我们关心的是电视机的寿命是否大于 10000 小时, 满足这一条件的样本点组成 Ω_6 的一个子集 $A=\{t\,|\,t>10000\}$, 我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件. 显然当且仅当 A 中的一个样本点出现时, 有 $t>10000$ 小时, 即电视机为合格产品.

一般地, 我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集 A 为 E 的**随机事件**, 简称**事件**. 随机事件是概率论中最基本的概念, 常用英文大写字母 A, B, C 等来表示.

下面我们看一些随机事件的例子.

例如, 在 E_2 中, A_1 事件 "两次都出现同一面", 即

$$A_1=\{HH, TT\}.$$

A_2 事件 "两次中, 至少出现一次反面", 即

$$A_2=\{HT, TH, TT\}.$$

在 E_3 中, A_3 事件 "正面次数不少于 1 次", 即

$$A_3=\{1, 2\}.$$

在 E_6 中, A_4 事件 "次品", 即

$$A_4=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant 10000\}.$$

在一次试验中, 当且仅当这一子集中的一个样本点出现时称这一事件发生. 例如, 在 E_6 中, 若测试出电视机的寿命 $t=14000$ 小时, 则事件"电视机为合格品"即 $A=\{t\,|\,t>10000\}$ 在该次试验中发生; 同样, 若测试出电视机的寿命 $t=300$ 小时, 则在该次试验中事件 A 没有发生.

特别地, 由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**, 例如, 试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$, 试验 E_3 有三个基本事件 $\{0\}, \{1\}, \{2\}$, 在 E_6 中有不可列个基本事件, 如 $\{t=1200\}$, $\{t=700\}$ 等.

样本空间 Ω 有两个特殊子集, 一个是 Ω 本身, 由于它包含了试验的所有可能结果, 所以在每次试验中总是发生, 称为**必然事件**, 另一个子集是空集 $\varnothing$, 它不包含任何样本点, 因此在每次试验中都不发生, 称为**不可能事件**.

三、事件间的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，我们希望通过对简单事件的了解去掌握较复杂的事件. 为此，需要研究事件间的关系与运算.

既然事件是一个集合，那么有关事件间的关系、运算及运算规则也就按集合间的关系、运算及运算规则来处理.

试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A, B, C, A_k(k=1, 2, 3, \cdots)$ 是 Ω 的子集. 注意到在某次试验中事件 A 发生 $\Leftrightarrow$ 该次试验的结果 $\omega\in A$（这里符号“ $\Leftrightarrow$ ”表示“当且仅当”）. 由此出发，可以讨论事件间的关系与运算.

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的**子事件**.

包含关系指“**事件 A 发生必有事件 B 发生**”，图 1-1 给出了这种包含关系的一个直观图示.

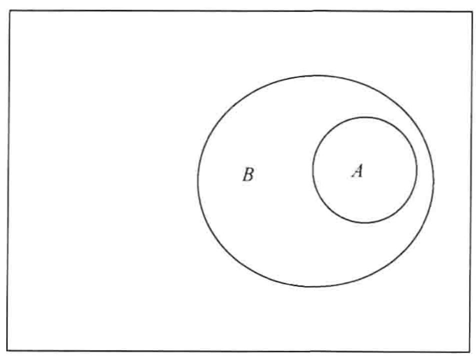

图 1-1

例如，在 E_6 中，记

$$A=\{\text{电视机寿命不超过 6000 小时}\},$$

$$B=\{\text{电视机寿命不超过 8000 小时}\},$$

则 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $B\supset A$，则 $A=B$，即称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件 $A\cup B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**.

$$\text{事件 } A\cup B \text{ 发生} \Leftrightarrow \text{事件 } A \text{ 发生或事件 } B \text{ 发生}$$

$$\Leftrightarrow \text{事件 } A \text{ 与事件 } B \text{ 至少有一个发生}.$$

图 1-2 给出了这种运算的一个直观图示.

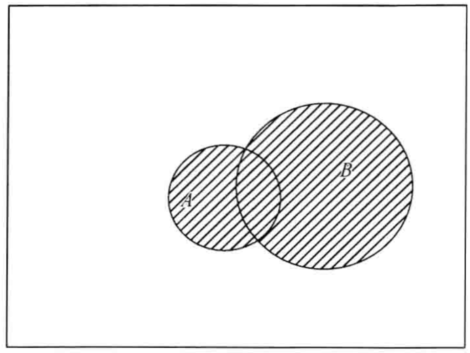

图 1-2

例如, 在 E_2 中, 记

$$A = \{\text{两次都出现正面}\} = \{HH\},$$

$$B = \{\text{两次都出现反面}\} = \{TT\},$$

则 $A \cup B = \{\text{两次同一面}\} = \{HH, TT\}$.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件, 即为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **至少有一个发生**.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B = \{\omega \in A \text{且} \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**.

事件 $A \cap B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与事件 B 同时发生. 积事件 $A \cap B$ 可简记为 AB. 图 1-3 给出了这种运算的一个直观图示.

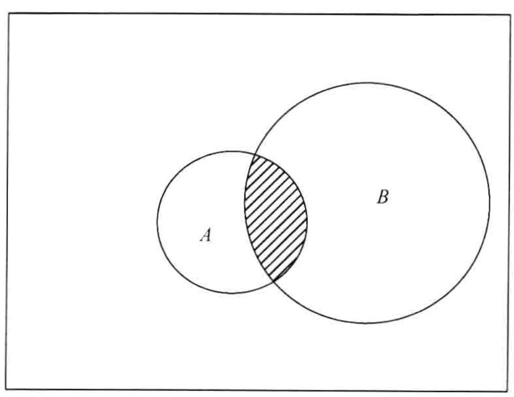

图 1-3

例如, 某输油管道长 100 千米, 事件 $A = \{\text{前 50 千米输油管正常工作}\}$, 事件 $B = \{\text{后 50

千米输油管正常工作}, 那么 $A\bigcap B=$ {整个输油管正常工作}.

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件, 即表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **同时发生**.

同理, 称 $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件.

(4) 事件 $A-B=\{\omega\,|\,\omega\in A且\ \omega\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**.

事件 $A-B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生而事件 B 不发生. 图 1-4 给出了这种运算的一个直观图示.

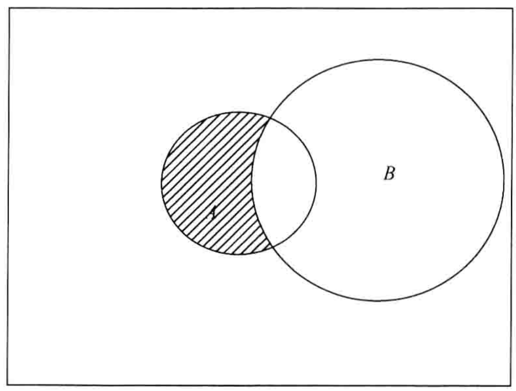

图 1-4

例如, 在 E_2 中, 若记 $A=\{HH,TT\}$, $B=\{HH,HT\}$, 则 $A-B=\{TT\}$.

思考: 何时有 $A-B=\varnothing$？何时有 $A-B=A$?

(5) 若 $A\bigcap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的, 或**互斥**的.

显然 $A\bigcap B=\varnothing\Leftrightarrow$ **事件 A 与事件 B 不能同时发生**. 图 1-5 给出了这种关系的一种直观图示.

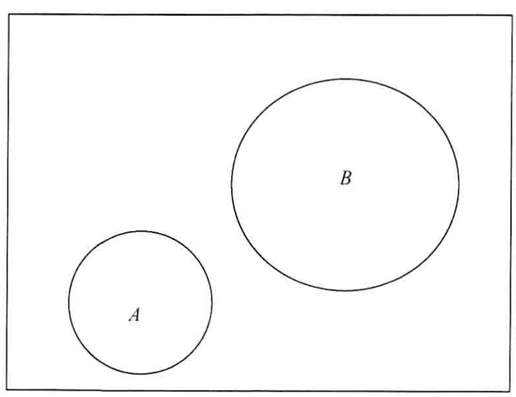

图 1-5

例如, 对一个随机试验 E, 它的基本事件都是两两互不相容的.

(6) **事件 $\Omega - A$ 称为事件 A 的对立事件或逆事件**, 记作 $\overline{A}$, 即 $\overline{A} = \Omega - A$. 事件 $\overline{A}$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 不发生. 由于 $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, 因此在每次试验中, 事件 A, $\overline{A}$ 中必有一个且仅有一个发生. 又 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件, 所以称事件 A 与 $\overline{A}$ 互逆. 图 1-6 给出了这种关系的一个直观图示.

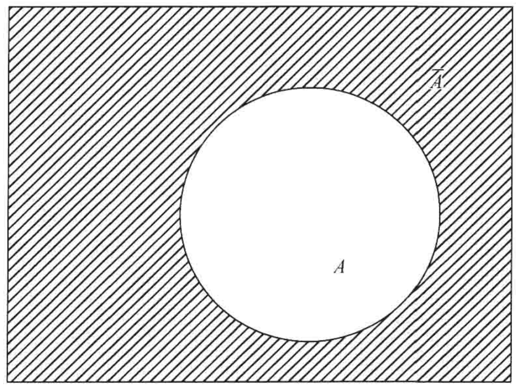

图 1-6

例如, 若事件 A 表示“抽到一个女生”, 则事件 $\overline{A}$ 表示“抽到一个男生”.

按差事件和对立事件的定义, 显然有 $A - B = A\overline{B}$.

与集合论中集合的运算一样, 事件之间的运算满足下述运算规律:

(ⅰ) **交换律**　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(ⅱ) **结合律**　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(ⅲ) **分配律**　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(ⅳ) **对偶律**　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

这些运算规律可以推广到任意多个事件上去. 例如, 由

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

可推出

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A}_k, \quad \overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A}_k.$$

例 1　甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹, 以 A, B, C 分别表示甲、乙、丙命中目

标, 试用 A, B, C 的运算关系表示下列事件:

$A_1=\{$至少有一人命中目标$\}$;

$A_2=\{$恰有一人命中目标$\}$;

$A_3=\{$恰有两人命中目标$\}$;

$A_4=\{$最多有一人命中目标$\}$;

$A_5=\{$三人均命中目标$\}$;

$A_6=\{$三人均未命中目标$\}$.

解　上面六个事件分别表示如下:

$$A_1=A\cup B\cup C;$$

$$A_2=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C;$$

$$A_3=AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C;$$

$$A_4=\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B};$$

$$A_5=ABC;$$

$$A_6=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}.$$

例 2　某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1, 2, 3 组成(图 1-7), 每个水源都足以供应城市的用水, 设事件

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 号管道正常工作}\}\quad(i=1,2,3),$$

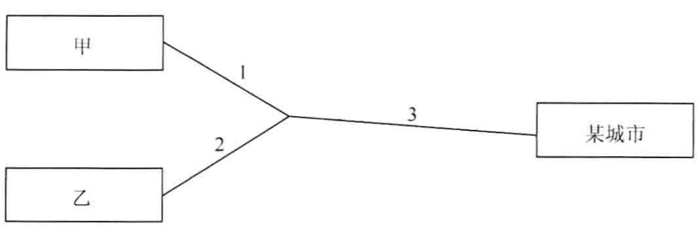

图 1-7

于是, “城市能正常供水” 这一事件可表示为 $(A_1\cup A_2)\cap A_3$, “城市断水” 这一事件可表示为

$$\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{A_3}=(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\cup\overline{A_3}.$$

习题 1-1

1. 说明随机试验具有的三个特点的内容.

2. 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 生产产品直到有 10 件正品为止, 记录生产产品的总件数.

(2) 对某工厂出厂的产品进行检查, 合格的记上“正品”, 不合格的记上“次品”, 如连续查出 2 件次品就停止检查, 或检查了 4 件产品就停止检查, 记录检查的结果.

3. 设 A, B, C 是随机事件, 则下列事件如何表达:

(1) A 与 B 发生, C 不发生;

(2) A, B, C 至少有两个发生;

(3) A, B, C 恰好发生两个;

(4) A, B, C 中有不多于一个事件发生;

(5) A, B, C 都不发生;

(6) A, B, C 不全发生.

4. 对于任意两事件 A 和 B, 与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

(A) $A\subset B$　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$

(C) $A\overline{B}=\varnothing$　　(D) $\overline{A}B=\varnothing$

5. 以 A 表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

(A)“甲种产品滞销, 乙种产品畅销”

(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

6. 两个事件互不相容与两个事件对立有何区别, 举例说明.

第二节　随机事件的概率

一、频率与概率

除必然事件和不可能事件外, 任意事件在一次试验中可能发生, 也可能不发生. 我们希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性大小. 例如, 在抛一颗骰子观察它的点数的试验中, 事件“出现偶数点”比事件“出现 1 点”发生的可能性要大. 我们希望对每个事件都能找到一个数, 能够用它来表示事件在一次试验中发生的可能性大小.