



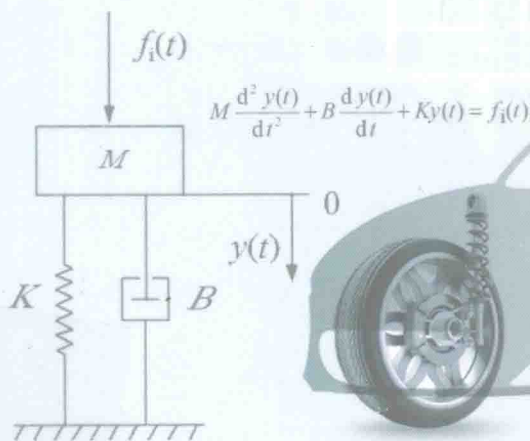
普通高等教育机械类专业“十三五”规划教材



西安交通大学 规划教材

建模、仿真与 机电系统的相似

王孙安 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



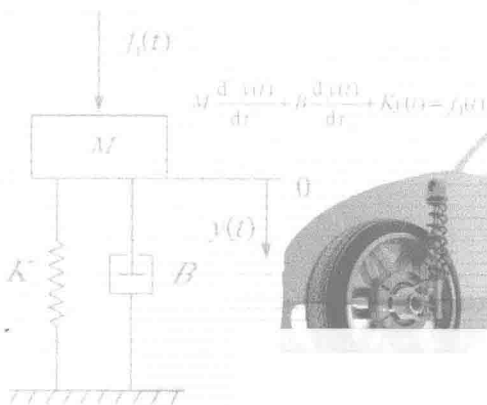
普通高等教育机械类专业“十三五”规划教材



西安交通大学 规划教材

建模、仿真与 机电系统的相似

王孙安 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

建模、仿真与机电系统的相似/王孙安编著. —西安:西安交通大学出版社,2016.6

ISBN 978-7-5605-6105-9

I. ①建… II. ①王… III. ①机械-仿真-研究 IV. ①TH164

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 092251 号

书 名 建模、仿真与机电系统的相似
编 著 王孙安
责任编辑 田 华

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 虎彩印艺股份有限公司

开 本 727mm×960mm 1/16 印张 14.25 字数 261 千字
版次印次 2016 年 11 月第 1 版 2016 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-6105-9/TH·123
定 价 30.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82669097 QQ:8377981

读者信箱:lg_book@163.com

版权所有 侵权必究

前 言

机械电子是一门包括机、电两大类的综合性学科,主要研究机电系统的设计、建模仿真、运行监控等内容。无论是机械还是电子的学生,都既要掌握本学科的知识,又要懂得相关学科知识的概念和含义。

就建模仿真来说,机类学科的模式通常主要指机构(结构)的几何模型,设计出符合强度、运动、装配等方面要求的机械系统;而电类学科的模式,则是指如何描述系统运行时的状态变化。因此,机类学科主要关注如何把几何模型加工制造成实物,保证所设计的机械系统具备精确、可靠运行的能力;而电类(工企)学科研究的是,在充分掌握了物理系统的特性后,再将其简化、抽象成数学符号系统模型。当物理系统运行起来后,借助模型输出特性与系统运动特性之间的关系,对系统实施监测与控制。这就要求机械电子学科的学生,不仅要能设计出满足功能需求的机电物理系统,通常还要把该系统的运行特征抽象成符号(数学)模型,并在借助模型了解系统的运动特性后,最终还原到实际物理系统。

由于专业背景不同,机类和电类的学生有一些概念的理解上各有侧重,同一术语的含义也存在一定差异。本教材首先对机电系统建模与仿真的相关概念进行了阐述和区分。然后介绍了相似原理及其在机电系统建模中的应用,更强调机和电这两个系统之间的相似。除了通常主要讨论数学模型的建立外,本教材还侧重介绍了实物、半实物模型的建立。在讲授完上述内容的基础上,介绍了建模、仿真和相似原理在典型机电系统中的应用,如:轮式移动平台、关节式机械手、驱动系统、飞行动力地面模拟系统等。

通过对本教材的学习,为本学科的进一步学习和科学研究奠定了基础,也可以在一定程度上弥补目前出版的教材主要偏重计算机数学仿真(即介绍运动控制中的建模仿真多、抽象符号和数学计算多,而物理系统和实践环节少),不利于学生全面地了解机、电系统综合知识的问题。

本书是在参考国内外相关文献的基础上,结合作者从事机械电子工程教学、研究工作的经验以及我国实际情况,按照理论联系实际的原则编写而成的。全书分为7章:第1章阐述了建模仿真的基本概念,以及机械系统和电气系统的相似;第2章介绍了系统的半实物模型,以及机电系统的一阶、二阶数学模型及其特性;第3章简要讨论了系统的数学模型的描述方法,以及计算机在建模仿真中的作用;第4

章探讨了动力学模型的建立,动、静态特性测试方法,以及建模仿真在轮式移动平台中的应用;第5章以关节式机械手为例,介绍了机构分析和机械传动系统的运动学模型建立与仿真;第6章阐述了驱动系统(电机)的建模、实物仿真和数字仿真;第7章通过分析飞行动力地面系统,建立了数学模型加机械实物的仿真模型,然后运用相似原理,以电路替代原有机机械系统,建立了简化模型。

各章后的思考题有的是帮助读者回顾本章的要点,有的则是引导读者进一步思考,不一定能在书中找到现成的答案。

在本书编写过程中,陈先益、程元皓、王冰心、张斌权等参与了资料的搜集、翻译、整理以及绘图等工作,在此表示感谢。

由于编著者水平有限,挂一漏万之处在所难免,对此恳请有关专家和读者给予批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 基本概念	(1)
1.1 实物系统及其模型的建立	(1)
1.2 物质本质(运动)的相似	(5)
1.3 相似性原理、类比推理及其对仿真设计的影响	(10)
1.4 机电系统的一般性质	(14)
1.5 机械电子系统的模型	(17)
1.6 机电系统的数学模型	(19)
思考题	(21)
第 2 章 系统的半实物仿真	(22)
2.1 简单机电系统的半实物仿真	(22)
2.1.1 系统仿真	(22)
2.1.2 仿真作用	(22)
2.1.3 仿真分类	(22)
2.2 一阶系统的特性及其相似	(25)
2.2.1 典型机械元件及其特性	(25)
2.2.2 典型电气元件及其特性	(26)
2.2.3 机械系统的一阶模型	(26)
2.2.4 电气系统的一阶模型	(28)
2.2.5 拉普拉斯变换	(29)
2.2.6 一阶系统的解及其特性与相似	(29)
2.2.7 一阶系统阶跃输入的输出响应	(30)
2.3 二阶系统的特性及其相似	(31)
2.3.1 机械系统的二阶数学模型	(31)
2.3.2 电气系统的二阶数学模型	(32)
2.3.3 二阶系统的解及其特性与相似	(33)
2.3.4 二阶系统的阶跃响应	(34)
2.3.5 二阶系统的性能指标	(35)
* 2.4 控制器的设计	(41)
2.5 基于运算放大器模拟电路的半实物仿真	(48)
2.5.1 半实物系统的仿真	(48)

2.5.2 微机的接入	(54)
思考题	(55)
第3章 系统的数学建模及性能分析	(56)
3.1 引言	(56)
3.2 连续系统的数学模型	(58)
3.3 系统的频率特性分析	(64)
3.3.1 频率特性分析的输入——正弦信号	(64)
3.3.2 频率特性的含义	(65)
3.3.3 频率特性的表示方法	(67)
3.3.4 典型环节的频率特性	(68)
3.4 MATLAB 工具箱的数学建模	(77)
3.4.1 数学模型的建立	(79)
3.4.2 数学模型的连接	(82)
3.4.3 时域分析	(85)
3.4.4 频域分析	(88)
3.5 Simulink 仿真的数学建模	(89)
3.5.1 打开模型窗口的方法	(89)
3.5.2 模块的复制、移动与删除	(90)
3.5.3 模块的连接	(91)
3.5.4 模块名称的修改	(92)
3.5.5 模型文件的保存与打开	(92)
3.5.6 Simulink 中的常用模块库	(93)
思考题	(100)
第4章 建模仿真在轮式移动平台设计中的应用	(101)
4.1 系统概述	(101)
4.2 机构分析的建模仿真	(102)
4.3 运动控制的建模与仿真	(115)
4.3.1 运动学分析	(116)
4.3.2 动力学分析	(117)
*4.4 实物平台模型的控制实例应用	(130)
思考题	(136)
第5章 机械传动系统的运动分析与仿真	(137)
5.1 关节式机械手的运动学建模	(137)

5.1.1	基于闭环矢量法的运动学建模	(138)
5.1.2	基于 D-H 法的系统运动学建模	(141)
5.2	机械传动系统的动力学建模	(151)
5.2.1	连杆上任意一点的速度计算	(152)
5.2.2	动能和位能的计算	(153)
5.2.3	动力学方程推导	(155)
5.3	机器人仿真实例	(156)
5.3.1	Robotics Toolbox 简介	(157)
5.3.2	在 MATLAB 中安装 Robotics Toolbox	(157)
5.3.3	PUMA560 的 MATLAB 仿真	(157)
	思考题	(163)
第 6 章	驱动系统的建模和仿真	(164)
6.1	概述	(164)
6.2	直流伺服电动机的建模与仿真	(165)
6.3	永磁无刷直流电机建模与仿真	(176)
6.4	永磁同步电动机建模与仿真	(188)
6.5	本章小结	(193)
	思考题	(193)
第 7 章	飞行动力地面模拟系统的相似模型	(194)
7.1	系统主要参数	(194)
7.2	初步设计	(195)
7.2.1	设计任务设想	(195)
7.2.2	系统方案选择	(197)
7.2.3	驱动装置的选择	(197)
7.2.4	系统结构形式	(199)
7.2.5	微处理机选型	(201)
7.3	具体设计	(201)
7.3.1	设计重点	(202)
7.3.2	设计方法	(203)
7.3.3	安全问题	(218)
7.4	本章小结	(218)
	思考题	(219)

第 1 章 基本概念

1.1 实物系统及其模型的建立

人类生存在物质世界，物质世界是客观存在的。人类的大脑具有思维能力，人类能够用自己的思维和意识来表达物质世界的存在。

存在与思维的关系问题是哲学的根本问题。

人类最初与动物一样，只能对客观世界做出直接反映，但从制作工具开始，就有了思维的萌芽。随着脑的进化，大脑获得模拟活动模式的能力，并将思维过程的结果与身体的活动中枢分离，具备了符号思维的能力。于是开始采用各种符号来表达他所生存的物质世界：如一花一木、一山一石，以及日、月、水、火等，就是用一套结构化的符号系统来表述客观存在的物质世界。这套符号系统就是物质世界的“模型”，这就是最早的建模，就是用“思维”来表达“存在”。

1. 符号：思维的载体

我们可以用文字符号来描述一片花瓣的色彩、形状、气味等，也可以用一幅图画来描绘一棵树的高矮、外观、树叶的几何形状，但却无法表达它的质量、触觉等，因此，任何一种模型都只是表达物质存在的局部特征。对自然界中的任何物质或事物，如果想要认知它的全部细节并表述出来，是十分困难的。

科学革命以后，人们认识到物质的第一属性是运动。“现代科学之父”伽利略第一个把对物质世界的哲学思维和数学描述，通过观察与实验的科学方法结合起来，对物体的运动轨迹进行了描述，这种科学的描述与天体的运行十分吻合。牛顿创建动力学的研究成果揭示了物质为什么会动。用爱因斯坦的话说：“西方科学的发展是以两个伟大的成就为基础的，那就是：希腊哲学家发明形式逻辑体系（在欧几里德几何学中），以及通过系统的实验发现有可能找出因果关系（在文艺复兴时期）。”

由于运动是物质的基本属性，运动的轨迹又是用数学的精准方式来描述的，因此与前面所提到的对花瓣、树叶的描述相比，前者用语言、绘画等建立的是静态模型，是相对次要、粗略的描述；而后者用数学手段对物质运动的描述则建立的是动态模型，是本质的、精准的描述。用数学符号所描述物质存在的特性，被称为数学模型。

但是,对于某个具体的研究对象描述,无论是我们前面提到的花瓣的色彩、形状、气味,树的高矮、外观及树叶的几何形状,还是行星运行的轨迹,它们自身的组织和结构,以及它们与外部事物之间的联系,都有着难以想象的复杂性。因此,要想认识对象的全部细节十分困难,甚至是不可能的。所以无论用什么符号系统来描述,都只是物质存在的部分属性。因此需要对研究对象建立其简化和综合的概念,这就是模型。

实际上人们都是通过对物质存在的简单化概念来完成对事物的认识 and 操作的。所以说,模型就是对真实物理世界的简化。

2. 相似系统与实物模型

现有的数学工具有时仍缺乏对物质世界有效的描述手段。比如,若想要对某地区降雨所引起的水土流失状况进行研究,却缺乏有效而准确的数学公式来描述雨水对该地区冲刷后的影响。此时,可以按照该地区的地貌,做一个如图 1-1 所示缩小的相似物理模型,再用人工模拟降雨的方法,获取降雨量与水土流失的关联数据。



图 1-1 人工降雨的地貌水土流失

再如,想要研究飞机在发动机不同推力下的升力。但由于飞机整体机身的不规则形状,以及空气流动时不同的边界条件,很难给出一个精准的数值关系。此时,我们可以造一个缩小的飞机,即相似的物理模型,并通过在风洞中做实验来获取需要的数据,如图 1-2 所示。

上述关于物理模型的两个例子说明物理模型在试验中扮演着十分重要的角色。通常,在缺乏现成的物理定律来建立数学模型时,会采用物理建模的方法。物理模型是实际系统某种特性的简化或进行尺度的缩放变化后,所得到的理想化对象。物理建模也带来了一些问题。如人造的地形、地貌缩小后,雨滴是否也应该缩小,而同样的土质对缩小的雨滴是否处于同样的水土流失?又如,飞机在风洞中的

空间飞行,与飞机在无限大的空间中飞行相比,所获得的数据是否准确等。因此,建模重要的一点是模型的有效性和准确性。

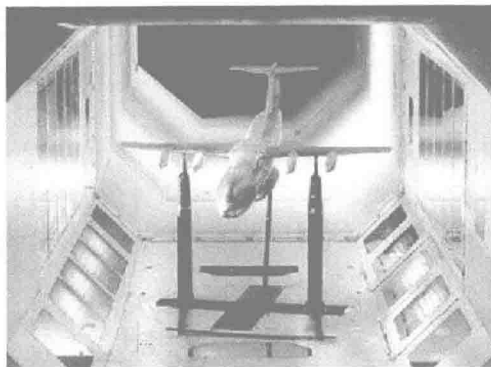


图 1-2 飞机在风洞中的空气动力学

如在上述实验获取了降雨量与水土流失或飞机速度与升力的关联数据,并找到相对精准的数值描述表示方法,实际上也是建立数值模型的手段。数值模型能够用一系列数学公式组成,可以用来描述系统功能,或者对系统行为进行定量预测。

如上所述,通过借助符号系统或者建立物理实体模型,来描述物质世界中客观存在及其因果关系的方法,被称为系统的建模。所建的模型可以是物理模型或数学模型。

3. 数学模型

数学模型是对物质世界一个特定的对象,为了一个特定的目的,根据系统内在的规律,进行一些必要的简化假设,然后运用适当的数学工具,得到一个数学结构。如前面提到的天体运行,反映的是天体位置与时间的关系。又如通过地貌的物理模型来得到的水土流失和降雨量的定量关系,以及气流速度与飞机所受浮力之间的定量关系,都属于数学模型。

更特殊的是,对于工程中的人造系统来说,在设计之初就确定了对系统某种预期的运行规律。而这些由机械、电气或液压组成的物理系统,大多遵从我们所熟知的微分方程,通过求解微分方程,就可以得到系统在某种激励下的响应,或者说当系统接收到某种输入信号的作用时,就可以得到系统的输出响应。我们称这类模型为解析的数学模型。

建立微分方程形式的数学模型,一般步骤如下:

(1)从系统的输入端开始,依据各变量所遵循的物理学定律,依次列写出各元

件、部件的微分方程；

(2) 消去中间变量, 得到描述系统输入量与输出量之间关系的微分方程；

(3) 有时将某些小参数或轻微的非线性问题忽略掉, 可以降低方程的阶次, 简化分析而保持满意的精度。

借助模型, 我们可以估计系统历史或预测系统未来的状态, 也可以了解系统的内部变化。

实际上, 对物质世界的实际系统, 还可以建立多种形式的模型, 如相似模型、语言模型等等, 这些都是根据具体的问题和不同的背景而采用不同的手段得到的。但更重要的是提出一个所要解决问题的思路, 即提出一个概念模型。

概念模型是关于一个系统及其组成部分以及各部分之间相互作用的智力想象图。一个概念模型提供了一个框架, 并在该框架中思考系统的运行或者通常要解决的问题。概念模型的形成经常会比实际操作方案的形成更为重要。概念模型的限制条件或前提假设错误将会产生错误的推理结果。

4. 仿真: 以模型代替原型

所建立模型是否准确, 需要通过比较实际系统和模型的接近程度来确定, 即需要对模型检验后才能确认模型是否可信。仿真(Simulation)就是在建立了实际系统的模型后, 用模型来代替实际系统, 即用模型来进行实验研究的过程。

仿真与数值计算求解方法的区别在于它首先是一种实验技术。仿真的过程包括建立仿真模型和进行仿真实验两个主要步骤。

当所研究的系统造价昂贵、实验的危险性大, 或需要很长的时间才能了解系统参数变化所引起的后果时, 仿真是一种特别有效的研究手段。仿真的重要工具是计算机。

按所用模型的类型(物理模型、数学模型、物理-数学模型)不同, 可以将仿真分为物理仿真、计算机仿真(数学仿真)、半实物仿真。

半实物仿真是将控制器(实物)与在计算机上实现的控制对象的仿真模型(见数学仿真)联接在一起进行试验的技术。在这种试验中, 控制器的动态特性、静态特性和非线性因素等都能真实地反映出来, 因此它是一种更接近实际的仿真试验技术。

这种仿真技术既可用于修改控制器的设计(即在控制器尚未安装到真实系统中之前, 通过半实物仿真来验证控制器的设计性能, 若系统性能指标不满足设计要求, 则可调整控制器的参数, 或修改控制器的设计), 同时也广泛用于产品的修改定型、产品改型和出厂检验等方面。

半实物仿真的特点如下。

(1) 只能是实时仿真, 即仿真模型的时间标尺和自然时间标尺相同。

(2)需要解决控制器与仿真计算机之间的接口问题。例如,在进行飞行器控制系统的半实物仿真时,在仿真计算机上解算得出的飞机姿态角、飞行高度、飞行速度等飞行动力学参数会被飞行控制器的传感器所感受,因而必须有信号接口或变换装置。这些装置是三自由度飞行仿真转台、动压-静压仿真器、负载力仿真器等。

(3)半实物仿真的实验结果比数学仿真更接近实际。

1.2 物质本质(运动)的相似

图1-3是几种自然界中“物理存在”的画面,其中(a)是高山瀑布,(b)是冰原上的太阳,而(c)则是一道闪电。这是我们以图像信息的方式为自然界存在的景观所建立的静态的、艺术的模型。从画面上看,它们并无“相似”之处。但是如果从物理上来看,从运动的本质看,它们都有一个质或能沿势能减小方向的流动,即水、热和电荷都是从高势能流向低势能的,如图1-4所示。

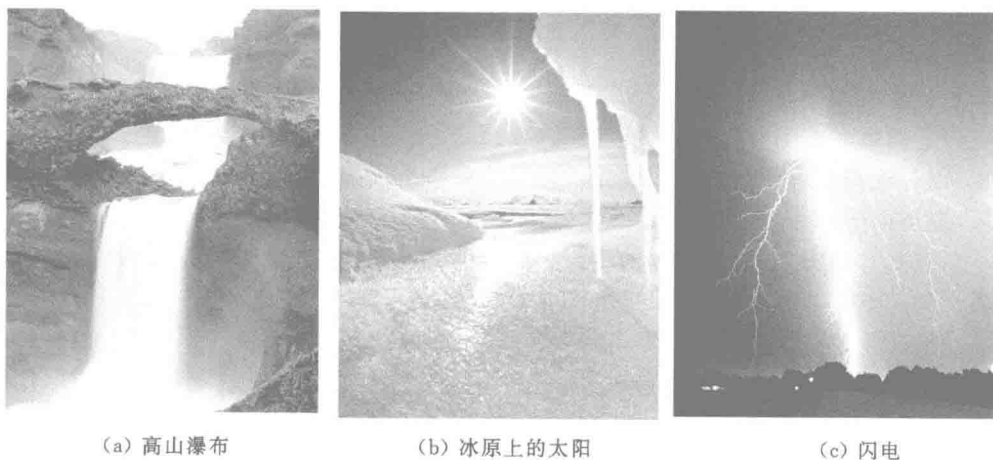


图1-3 自然界的“物理存在”

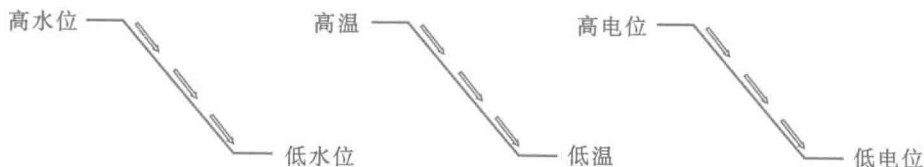


图1-4 物质或能量从势能高处流向势能低处

如果我们称：

水位高处为高势能，水位低处为低势能，则水从高势能处流向低势能处；
 从高势能到低势能的差称水位差，水在流动中所遇到的阻力称之为液阻；
 水的流量大小与水位差大小成正比，与液阻的大小成反比；
 质、能抵抗阻力流动会做功；反过来说，驱动质和能流动需要能量。

若定义 $h_{\text{高}}$ 为高水位、 $h_{\text{低}}$ 为低水位， $q_{\text{水}}$ 为水的流量、 $R_{\text{液}}$ 为液阻。那么水流的数学表达如式(1-1)所示

$$q_{\text{水}} = \frac{h_{\text{高}} - h_{\text{低}}}{R_{\text{液}}} = \frac{h_{\text{液位差}}}{R_{\text{液}}} \quad (1-1)$$

类似地，可以得到热流量 $q_{\text{热}}$ 的数学表达为

$$q_{\text{热}} = \frac{T_{\text{高}} - T_{\text{低}}}{R_{\text{热}}} = \frac{T_{\text{温度差}}}{R_{\text{热}}} \quad (1-2)$$

式中： $T_{\text{高}}$ 为高温度的势能； $T_{\text{低}}$ 为低温度的势能； $R_{\text{热}}$ 为热阻。

而电流量 $q_{\text{电}}$ 的数学表达式为

$$q_{\text{电}} = \frac{V_{\text{高}} - V_{\text{低}}}{R_{\text{电}}} = \frac{V_{\text{电位差}}}{R_{\text{电}}} \quad (1-3)$$

式中： $V_{\text{高}}$ 为高电位处的势能； $V_{\text{低}}$ 为低电位处的势能； $R_{\text{电}}$ 为电阻。

下面来考察当有“质”或“能”流入(或流出)时，这些物理容器的“充(或放)”过程，以及流动过程中阻性和容性元件表现出的特征。显然，对于不同的物理量的流入，容器内势能将会发生变化。

以水容器为例，如果容器的横截面积为常数，且水的流入量也是常数，则容器内水的总量 $Q_{\text{水}}$ 数学表达式，是流量与时间的乘积，即

$$Q_{\text{水}} = V_{\text{容积}} \cdot \rho = h s \rho = q_{\text{水}} \cdot t \quad (1-4)$$

阻性元件通常是一个常数，因此只要势能差不变，输入的水流量就保持一个常量。当流入的水流量恒定，且没有水流出时，即 $q_{\text{出}} = 0$ ，则容器内的液位将随着水流量的“充”入而升高，且是一个时间的线性函数，这个过程被称为完全积分。

$$h = \frac{q_{\text{水}}}{s \rho} \cdot t \quad (1-5)$$

但是更一般的情况是，势能差是随时间变化的，因而流量也将随之发生变化。

对式(1-1)、式(1-2)、式(1-3)来说，只要能量的势能存在差别，就会有物理量流动。因此，类似地，热容器的温度和电容器的电压也有相似的特性。

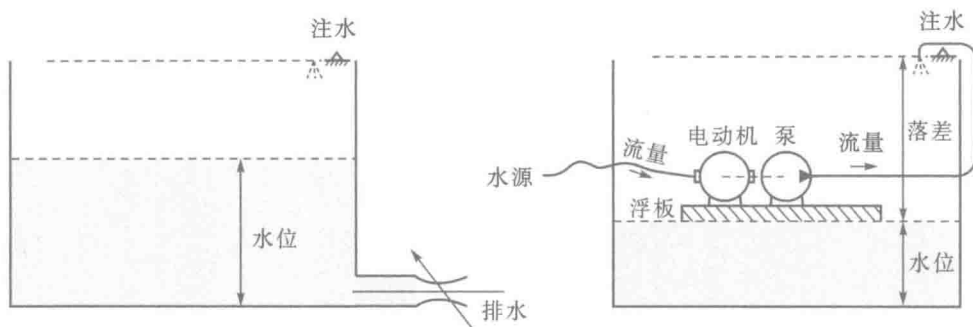
液容器的液位：随水流的流入量升高，随水流的流出量降低。

热容器的温度：随热流的流入量升高，随热流的流出量降低。

电容器的电压：随电流的流入量升高，随电流的流出量降低。

对于图 1-3 所示几个自然界的大系统，相对而言，水的流动与水位的变化最

容易观察,也最直观。因此,为了分析方便,把高山瀑布简化成如图 1-5(a)所示的局部水流模型。



(a) 高端势能变化导致流量改变

(b) 低端势能变化导致流量改变

图 1-5 水位势能差的变化

可以看出,水的液位会随着流入、流出的水流量变化而变化。我们定义一个参数液容 $C=Q/h$,它反映了水头变化对容器内水这种物质质量变化的影响,则容器内水的质量

$$Q_{\text{水}} = Cdh = (q_i - q_o)dt \quad (1-6)$$

对式(1-6)两边同除以 dt ,当流入水量等于流出水量 $q_i=q_o$ 时,可以看出

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - q_o = 0 \quad (1-7)$$

水位势能差的导数为 0,即水位保持不变,此时流出的水流量亦恒定不变。

当 $q_i \neq q_o$ 时,由式(1-1)可得到流出水量 $q_o = h/R$,将此带入式(1-7),则得到

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (1-8)$$

如果流入的水流量 $q_i=0$,即式(1-8)的右边 $=0$,则该微分方程是一个齐次方程,其解为

$$h(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (1-9)$$

式中: $A=h_0$,是初始条件 $t=0$ 时刻的液位高度,其变化曲线如图 1-6(a)所示。

如果 $q_i \neq 0$,则对该系统来说,容器内的势能的变化是由于流入、流出的水量在容器内积聚而引起的,即如果水的流入、流出量不相等,则容器内的势能差 h 就会变化。亦即水流入、流出容器的总量为输入原因,而容器内的液位是输出结果。如果流入的水流量 q_i 是常数,根据我们已经掌握的有关微分方程解的知识,可以得到这个非齐次一阶微分方程的解

$$h(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B \quad (1-10)$$

式中:当 $t=0$ 时,液位为初始高度 H_0 ;而当 $t=\infty$ 时,液位会在某一个时刻达到一个高度 H_∞ ,使 $q_1=q_0$,可以根据上述初始条件解出 A 和 B 的值。

再来考察图 1-5(b) 所示系统。图 1-5(a) 所示系统排出的水流的流量为 h/R ,对时间积分后为排出的总水流量,见式(1-11)右边;当它流入图 1-5(b) 所示的容器时,水容器里的水量是液容对高度的积分,如式(1-11)左边。水的流量平衡方程为

$$C \int_0^{h(t)} dh(t) = \int_0^t \frac{h_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt \quad (1-11)$$

$$h(t) = h_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (1-12)$$

图 1-5(b) 所示系统的水位变化过程曲线如图 1-6(b) 所示。

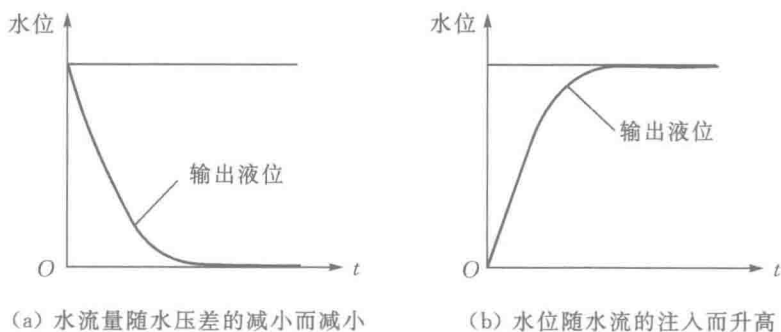


图 1-6 阻性和容性系统

如果我们用电子元件建立一个如图 1-7(a) 所示类似的电路系统,即由直流电源、开关、一个电阻和一个电容组成的电路系统,则当把开关掷向 a 时,相当于电源通过阻性元件向电容器充电(见图 1-7(b));而当开关掷向 b 时,则此时的电容器通过电阻对地放电(见图 1-7(c))。

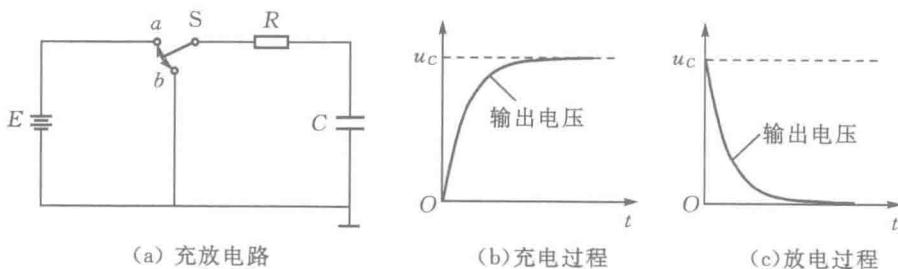


图 1-7 阻容电路及其充放电过程

在此我们定义一个参数电容 $C=Q/u$ ，它反映了电压变化对容器内电荷这种物质质量变化的影响。电压差等于电源电压与电容器电压之差，充电时，电容器初始电压为零，显然电容器电压升高会使电压差减小，电流也将随之减小，直至充到等于电源电压 E 。

当电容充满电，即电容电压等于电源电压时，若开关掷向 b ，则可以得到放电过程。

无论是“充”还是“放”，对电流列出的平衡方程为

$$\frac{E - u_c}{R} = C \frac{du_c}{dt} \quad (1-13)$$

两边同乘 dt 得

$$C du_c = \left(\frac{E}{R} - \frac{u_c}{R} \right) dt \quad (1-14)$$

式(1-14)中的 E/R 和 u_c/R 分别是流入和流出电容器的电流 i_i 和 i_o ，于是有

$$C \frac{du_c}{dt} = i_i - i_o \quad (1-15)$$

对照式(1-14)和式(1-5)，这两个微分方程的形式完全一样，而这个“充”与“放”的物理过程，可以同样叙述为：流入流出的电荷在电容器内的积聚，对电容器 C 中电压势能的影响，如果我们把 i_i 和 i_o 与前面水流 q_i 和 q_o 对应起来，可以得到与之相应的解。

类似地，我们得到充电和放电过程的表达式分别为式(1-16)和式(1-17)，而充电和放电过程电容器内电压势能变化的曲线如图 1-7(b)和图 1-7(c)所示。

$$u(t) = u_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (1-16)$$

$$u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1-17)$$

以上这两个物理系统虽然不相同，但由于存在势能差而引起“质”或“能”的流动，以及阻性、容性元件的特性，“充”和“放”的物理过程，都是极其相似的。两者的微分方程中的输入、输出的关系，液阻和电阻、液容和电容等元件的参数，以及微分方程的初始条件，也都可以对应起来，在数学描述上是极其相似的。

对于图 1-5(a)所示系统，如果流入的水流 q_i 等于流出的水流 q_o ，则水位的高度差保持不变，即充水时水源的势能差不变，并以此达到充水的流量恒定不变，从而实现完全积分。但在现实情况中，要做到这一点并不是很简单的事情。

如果加上一个运算放大器构成阻容电路，如图 1-8 所示，就能保证电阻一端的电位是零。当输入电压 u_i 恒定时，充电的电流就恒定，此时电容电压的充、放过程就成为一条直线，如图 1-8(b)、图 1-8(c)所示。通常把图 1-7 所示的系统电容的充、放过程称为不完全积分，而图 1-8(a)由运算放大器、电阻和电容构成的