饱和受限非线性系统控制策略及应用

魏爱荣　编著

清华大学出版社

饱和受限非线性系统控制策略及应用

魏爱荣 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书结合编者的研究工作, 详细介绍了非线性饱和受限控制系统的概念、理论及设计方法. 全书共分 10 章. 第 1 章介绍饱和受限非线性系统的发展及研究状况. 第 2 章介绍本书所需要的基本知识, 包括系统稳定性理论、饱和函数、非线性系统 L_2 增益等知识. 第 3, 4 章主要研究饱和受限非线性系统的控制理论, 内容包括饱和受限非线性系统的鲁棒和自适应控制. 第 5, 6 章介绍有限多个饱和受限非线性系统并行同时镇定、自适应并行同时控制及鲁棒同时镇定等. 第 3~6 章介绍的都是开环稳定的饱和非线性系统, 第 7 章则研究了开环可能不稳定的饱和非线性系统吸引域的估计及干扰容许控制等. 第 8~10 章为饱和受限非线性时滞、切换系统的镇定和鲁棒控制及饱和受限多自主体系统的协调控制.

本书可供从事控制理论和应用的科研工作者、工程技术人员、高校教师和研究生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

饱和受限非线性系统控制策略及应用/魏爱荣编著.—北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-43769-7

Ⅰ. ①饱…　Ⅱ. ①魏…　Ⅲ. ①非线性系统(自动化)　Ⅳ. ①TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 100161 号

责任编辑： 冯　昕　赵从棉
封面设计： 陈国熙
责任校对： 赵丽敏
责任印制： 宋　林

出版发行： 清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm × 260mm　　**印　张：** 12　　**字　数：** 295 千字
版　　次： 2016 年 11 月第 1 版　　**印　次：** 2016 年 11 月第 1 次印刷
印　　数： 1 ~ 1000
定　　价： 49.00 元

产品编号：069447-01

前　　言

众所周知, 各类工程系统中均存在大量约束, 特别地受到执行器饱和 (actuator saturation) 非线性约束. 如混合动力电动汽车 (hybrid electric vehicle, HEV) 驱动系统中电动机的转速、力矩和功率变换器的输出等只能在一定的范围内变化, 舵机的旋转幅度和速率不能超过一定的限度, 大型执行阀门不仅有最大开度限制, 同时开启速率也不可能任意大等. 饱和的存在影响了系统控制精度, 降低了系统稳定性, 饱和已成为严重制约系统性能的主要因素之一, 并且饱和的加入增加了系统分析与设计的复杂性, 为此饱和受限系统的研究受到了国内外很多学者的广泛关注, 已成为控制界的研究热点之一.

目前饱和受限非线性系统的研究成果主要针对的是一类非线性程度较弱的系统, 如有理系统、二次系统、可精确线性化系统, 适用范围较窄, 具有很大的局限性, 对具有一般非线性结构的饱和受限系统的研究工作还十分有限. 这是因为该类系统结构比较复杂, 其研究方法也相对匮乏. 然而很多实际系统包括电力系统等的动态行为非常复杂, 不能简单地用线性结构来描述, 此时应建立非线性饱和受限模型. 对于具有非线性结构的饱和受限系统的镇定研究以及控制器设计等问题, 是公认的具有挑战性的问题.

近年来, 基于能量的分析与控制方法 (即 Hamilton 系统方法) 越来越引起非线性控制界的关注. Hamilton 系统是非线性科学研究中的一个重要领域, 它的产生和发展具有深刻的实际背景. 经典的 Hamilton 系统都是在偶数维相空间上定义的，这使得它的应用范围受到了限制, 为了使 Hamilton 系统的研究方法能应用于实际研究中广泛存在的奇数维系统, 人们将经典 Hamilton 系统扩展到广义 Hamilton 系统.

广义耗散 Hamilton 系统所描述的是一类既有与外部环境能量的交换, 又有能量耗散及能量产生的更为广泛的开放系统. 它结构清晰, 物理意义明确, Hamilton 函数 $H(x)$ 是系统的广义能量并在一定条件下构成系统的 Lyapunov 函数. 由于广义 Hamilton 系统的上述特点, 使得这类系统在稳定性分析、镇定控制、H_∞ 控制等问题中起着重要作用, 并被广泛用到许多实用的控制系统中. 近几年, 这种基于能量的分析与控制方法已在众多实际控制问题中得到了应用, 并取得了非常理想的效果. 现在, 它已成为研究非线性控制的一种更直接有效的方法.

近年来, 编者对饱和受限非线性系统进行了卓有成效的研究, 特别是在饱和受限非线性系统的鲁棒控制与自适应控制等方面取得了较大的进展. 本书结合编者的研究工作, 详细介绍了非线性饱和受限控制系统的概念、理论及设计方法. 较为系统地介绍非线性饱和受限系统的全局镇定和鲁棒控制, 区域自适应镇定和鲁棒控制设计, 有限多个系统的并行同时 (自适应) 镇定和鲁棒控制, 吸引域的估计和电力系统的应用及一些相关的研究结果.

编者努力将饱和受限非线性系统的最新研究成果和方法反映在本书中, 但限于篇幅, 书中所包含的内容仅仅是饱和受限非线性系统控制研究成果的很少一部分. 鉴于本书讲述的是“非线性系统”, 书中存在大量的多维向量或矩阵, 为便于阅读, 不再将向量和矩阵一一标为黑体, 不会影响读者理解.

限于编者的水平, 书中不妥和错误之处在所难免, 恳请广大读者不吝指正.

本书的撰写及出版得到了国家自然科学基金 (61573218, 61174036) 的资助, 在此表示衷心的感谢.

编者

2016 年 2 月于山东大学

主要符号说明

$M_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵集合
M_n	$n\times n$ 矩阵集合
$\otimes$	Kronecker 积
$\mathbb{R}^n$	n 维 Euclidean 空间
X^{-1}	矩阵 X 的逆
A^{T}	矩阵 A 的转置
$A^{-\mathrm{T}}$	矩阵 A 的转置逆
$\mathrm{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$\mathrm{diag}\{a_1,\cdots, a_n\}$	以 $a_1,\cdots, a_n$ 为对角元的对角矩阵
$\mathrm{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\mathbb{N}$	自然数集
$A>0(A\geqslant 0)$	实对称矩阵 A 为正定 (半正定) 矩阵
$A-B>0(A-B\geqslant 0)$	矩阵 $A-B$ 为正定 (半正定) 矩阵
I_n	$n\times n$ 单位矩阵
$L_2[0,\infty)$	所有平方可积的向量集合
$\\|\cdot\\|$	诱导矩阵 2-范数
$\lambda(A)$	矩阵 A 的特征根
$\mathrm{Re}\lambda(A)$	矩阵 A 的特征根的实部
$\mathrm{Hess}(h(x))$	标量函数 $h(x)$ 的 Hesse 矩阵
$\mathrm{sign}(\cdot)$	符号函数
$H(x)$	Hamilton 函数
$\nabla H(x)$	$\dfrac{\partial H(x)}{\partial x}$
$\\|y\\|_\infty=\max\{\, \|y_i\|, 1\leqslant i\leqslant n\}$	其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$
$1_n\in\mathbb{R}^n$	1_n 是一向量, 其所有分量为 1
$\dot{x}(t)$(或$(x(t))'$)	数量函数 $x(t)\in\mathbb{R}$ 或向量函数 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 的一阶导数

目　　录

第 1 章　绪　　论

本章通过介绍饱和受限系统及 Hamilton 控制系统的研究现状, 阐述了本书的研究目的、研究内容和主要研究结果, 共分三节: 1.1 节介绍饱和受限系统的研究进展; 1.2 节介绍 Hamilton 系统的产生及研究进展; 1.3 节介绍本书的研究思路和主要研究结果.

1.1　饱和受限非线性系统

众所周知, 各类工程系统中均存在大量约束, 特别地受到执行器饱和 (actuator saturation) 非线性约束. 如混合动力电动汽车 (hybrid electric vehicle, HEV) 驱动系统中电动机的转速、力矩和功率变换器的输出等只能在一定的范围内变化, 舵机的旋转幅度和速率不能超过一定的限度, 大型执行阀门不仅有最大开度限制, 同时开启速率也不可能任意大等. 饱和的存在影响了系统控制精度, 降低了系统稳定性, 已成为严重制约系统性能的主要因素之一 [1], 并且饱和的加入增加了系统分析与设计的复杂性, 为此饱和受限系统的研究受到了国内外很多学者的广泛关注, 目前已成为控制界的研究热点之一 [2–8].

对饱和受限系统的研究, 通常要考虑以下三个方面的问题.

(1) 全局镇定: 给定一输入饱和系统, 研究其能否可全局镇定. 文献 [9,10] 对一类有界输入渐近零可控系统进行了研究, 给出系统可全局镇定与有界输入渐近零可控的关系, 指出即使有界输入渐近零可控系统也不可能用线性状态反馈使其得以全局镇定.

(2) 区域镇定 (吸引域估计): 研究并寻找满足什么条件时, 系统只能局部镇定, 并估计系统的稳定区域 (吸引域估计). 于是, 找寻使系统吸引域尽可能大的反馈控制成为饱和受限系统的研究热点 [11–13].

(3) 鲁棒控制器设计: 在系统存在外部干扰时, 设计鲁棒控制器, 使系统在其吸引域内能够抑制干扰.

关于饱和受限系统的研究，最早见于 Fuller 1962 年发表的论文 [14], 提出: 若一个输入饱和系统的积分器长度 $n \geqslant 2$, 则不存在使系统全局稳定的饱和线性反馈控制器. Sontag 和 Sussman 的论文 [10] 在很大程度上激活了对有界控制线性系统的研究热情并指出了新的研究方向. 在相继的 20 多年里, 国内外控制界对饱和受限系统的研究也给予了高度关注, 许多知名学者都认识到该研究的重要性并积极参与其中, 目前已做出了诸多重要的贡献 [1,8–13,15].

饱和受限系统的研究方法早期可借鉴的是相平面法、描述函数法等. Pontriakii 极大值原理可最大限度地调动控制力 (bang-bang 型), 处理高阶系统及模型不确定的系统却是

相当困难甚至是几乎不可能的[16]. 几乎同时发展起来的另一处理方法是绝对稳定理论[17], 它将饱和纳入一类非线性扇区中而忽略其特定的结构, 但带来很大的保守性. 目前处理输入饱和控制问题的手段基本上可以归纳为以下两种方法.

(1) 在执行器饱和的时候, 首先不考虑饱和来设计控制器, 然后采用附加设计的措施, 比如抗饱和积分补偿器 (anti-windup compensator) 来弥补或削弱饱和所产生的负面影响.

(2) 在设计控制器的最初阶段就考虑饱和的问题, 并采用有界控制避免饱和的发生以达到系统渐近稳定, 可以称为直接法. 这种方法在对控制系统进行分析和设计时, 一直对控制量的约束考虑在内, 能够使系统的稳定性、动态性等综合性能更优.

这两种方法主要是基于线性矩阵不等式、凸优化、Lyapunov 函数等相关知识[18,19]. 对饱和系统的研究还有许多其他的手段, 比如分段连续 LQ 控制器的设计方法、最优控制、预测控制、自适应控制、动态规划、不变集等.

需要指出的是, 以上所述对饱和控制系统的研究基本上是针对线性控制系统, 很好地解决了饱和受限线性系统问题, 但很难用于饱和受限非线性系统. 目前饱和受限非线性系统的研究成果主要针对的是一类非线性程度“较弱”的系统, 如有理系统[20]、二次系统[21]、可精确线性化系统[22], 适用范围较窄, 具有很大的局限性, 对具有一般非线性结构的饱和受限系统的研究工作还十分有限. 这是因为该类系统结构比较复杂, 其研究方法也相对匮乏. 然而很多实际系统包括电力系统等的动态行为非常复杂, 不能简单地用线性结构来描述, 此时应建立非线性饱和受限模型. 对于具有非线性结构的饱和受限系统的镇定研究以及控制器设计等问题, 是公认的具有挑战性的问题.

1.2 Hamilton 系统

近年来, 基于能量的分析与控制方法 (即 Hamilton 系统方法) 越来越引起非线性控制界的关注[23,24]. Hamilton 系统是非线性科学研究中的一个重要领域, 它的产生和发展具有深刻的实际背景. 经典的 Hamilton 系统都是在偶数维相空间上定义的, 这使得它的应用范围受到了限制, 为了使 Hamilton 系统的研究方法能应用于实际研究中广泛存在的奇数维系统, 人们将经典 Hamilton 系统扩展到广义 Hamilton 系统.

广义 Hamilton 系统的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x} &= T(x)\dfrac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u,\ x \in \mathcal{M}, \\ y &= g^{\mathrm{T}}(x)\dfrac{\partial H(x)}{\partial x}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中, $\mathcal{M}$ 是 n 维流形, $u \in \mathbb{R}^m$, $T(x)$ 是结构矩阵, $H(x)$ 是 Hamilton 函数.

当 $T(x)$ 不含非耗散部分时, 上述系统变为

$$\begin{cases} \dot{x} &= [J(x) - R(x)]\dfrac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u,\ x \in \mathcal{M}, \\ y &= g^{\mathrm{T}}(x)\dfrac{\partial H(x)}{\partial x}, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $J(x)$ 是反对称矩阵, $R(x) \geqslant 0$ 是对称半正定矩阵. 则上述系统变为广义耗散 Hamilton 系

统, 当 $R(x) > 0$ 时为严格耗散 Hamilton 系统.

广义耗散 Hamilton 系统所描述的是一类既有与外部环境能量的交换, 又有能量耗散和能量产生的更为广泛的开放系统. 它结构清晰, 物理意义明确, Hamilton 函数 $H(x)$ 是系统的广义能量并在一定条件下构成系统的 Lyapunov 函数. 由于广义 Hamilton 系统的上述特点, 使得这类系统在稳定性分析、镇定控制、H_∞ 控制等问题中起着重要作用, 并被广泛用到许多实用的控制系统中 [23–28]. 近几年, 这种基于能量的分析与控制方法已在众多实际控制问题中得到了应用, 并取得了非常理想的效果. 现在, 它已成为研究非线性控制的一种更直接有效的方法 [29–31].

然而, 将一个一般的非线性系统表示为广义 Hamilton 系统的形式, 是一个极为重要和极富挑战性的课题. 广义 Hamilton 实现的本质是寻找某个 $n \times n$ 的结构矩阵 $T(x)$ 及一个适当形式的函数 $H(x)$, 将 n 维向量场 $\dot{x} = f(x)$ 表示为系统 (1.1) 的形式. 这是一个偏微分方程, 而偏微分方程往往又难以求解. 因此, 避开求解偏微分方程, 建立一套较为系统的 Hamilton 实现理论体系和处理方法是极为重要的. Wang 和 Cheng 等人对非线性系统的 Hamilton 实现问题进行了深入研究，成功地避开了求解偏微分方程, 建立了一套较为系统的 Hamilton 实现理论体系和处理方法, 得到了许多有关 Hamilton 实现的新结果 [30, 32–35]. 首先, 根据 Hamilton 实现的本质特性, 利用 Kronecker 积, 构造了两组代数方程, 将实现问题转化为求解代数方程, 降低了问题的难度; 然后在此基础上研究了自治非线性系统的 Jacobi 矩阵行 (或列) 的可积性, 给出了几个新的易于操作的实现方法, 并构造性地证明了在适当坐标变换下, 任一光滑自治非线性系统均有 Hamilton 实现. 在反馈耗散 Hamilton 实现问题的研究中, 通过研究一般向量场与 Hamilton 向量场之间的差异, 以及一般向量场与标准 Hamilton 函数所构成的等值面的关系, 提出了正交分解法和控制切换法, 并给出了几个反馈实现的充分条件. 与此同时, 为某些非线性系统提供了其 Lyapunov 函数的构造方法. 针对电力系统的结构特点, 文献 [30] 基于标准的多机电力系统模型, 提出了“预置反馈 + 平衡点调整”的方法, 解决了多机系统耗散 Hamilton 实现问题，并对电力系统的基于能量控制问题进行了研究. 在此基础上, Wei, Yang 和 Sun 等学者又将一般的非线性 Hamilton 系统扩展到了非线性饱和、时滞、奇异等系统, 并提出了其系统实现方法, 得到了稳定性结果以及控制器设计方法 [36–39].

1.3 本书的研究思路和主要结果

本书将结合作者的研究工作, 较为系统地介绍饱和受限非线性系统的全局镇定和鲁棒控制、区域自适应镇定和鲁棒控制设计、有限多个系统的并行同时 (自适应) 镇定和鲁棒控制、吸引域的估计和电力系统的应用及一些相关的研究结果.

本书在深入研究饱和受限非线性系统和 Hamilton 系统结构的基础上, 经过反复尝试, 逐步找到了一条新的研究思路, 建立了该类系统的 Hamilton 函数方法, 给出若干新的研究结果. 本书的主要结果如下:

(1) 在 Hamilton 框架下, 研究了非线性控制饱和受限系统的全局镇定和鲁棒控制的问题. 利用 Hamilton 系统的理论知识特点, 从能量的视点对该问题展开研究. 通过分析控制饱和受限特点, 设计了系统全局镇定和鲁棒控制的两个控制器, 得出了系统可全局镇定和

鲁棒控制的充分条件. 另外把所得结果成功应用到电力系统, 并推广到一般的非线性仿射控制受限系统, 为饱和受限非线性系统的研究提供了一种新的研究方法 —— 基于能量的控制方法.

(2) 研究了具有执行器饱和耗散 Hamilton 控制系统的有限增益镇定问题. 利用静态输出反馈使系统达到全局渐近稳定, 并对系统中的非线性函数作进一步演变, 运用相同的反馈控制律可实现闭环系统的有限 L_2 增益输入输出镇定, 同时可获得增益估计值, 最后利用所得方法及结果研究了励磁-气门开度饱和的单机无穷大电力系统在输出反馈控制律作用下的渐近稳定以及 L_2 增益镇定问题.

(3) 针对一类输出饱和受限不确定系统鲁棒滤波器设计问题, 应用系统稳定性理论和线性矩阵不等式, 设计了保守性更小的滤波器. 所设计的滤波器不仅可以保证滤波误差系统渐近稳定, 并使滤波器达到鲁棒性能指标.

(4) 研究了含有不确定参数和控制饱和受限 Hamilton 系统的自适应局部镇定和鲁棒控制问题. 把输入饱和函数转化为对角矩阵函数, 结合 Hamilton 系统的结构特点, 设计了系统自适应局部镇定和鲁棒控制的两个控制器, 得出了系统可局部自适应镇定和鲁棒控制的充分条件. 另外, 把所得结果推广到一般的含有不确定参数仿射非线性饱和受限系统的区域自适应镇定和鲁棒控制研究.

(5) 针对有限多个非线性控制饱和受限系统的全局并行同时镇定和自适应区域并行同时镇定问题, 利用 Hamilton 系统研究方法, 首先研究了两个非线性控制饱和受限系统的全局并行同时镇定和自适应区域并行同时镇定, 然后将其扩展, 设计了有限多个 Hamilton 系统全局并行同时镇定、鲁棒控制和自适应区域并行同时镇定控制器.

(6) 在 Hamilton 框架下, 利用 Hamilton 系统的理论知识特点, 从能量的角度研究了一类非线性控制饱和受限系统的吸引域估计和扩大及干扰容许. 通过分析控制饱和受限特点, 利用 Hamilton 系统的结构特点, 把输入饱和函数转化为凸组合函数. 首先估计了系统的吸引域, 然后利用线性矩阵不等式求解带有约束的优化问题, 把所得到的吸引域最大化. 并且估计了系统从原点出发的轨迹不会越出一椭球, 然后在这一椭球内, 研究系统所允许的最大干扰即干扰容许问题, 并把所得结果推广到一类非线性仿射控制受限系统, 为非线性受限系统的吸引域估计提供了一种新的研究方法.

(7) 研究了具有状态变时滞及执行器饱和的耗散 Hamilton 系统的有限 L_2 增益镇定问题. 根据是否依赖时滞, 所得的稳定性条件分为时滞无关和时滞相关两大类. 分别从时滞无关和时滞相关两方面分析, 利用饱和静态输出反馈使系统达到全局渐近稳定. 对系统中的非线性函数作进一步演变, 实现闭环系统的有限 L_2 增益输出镇定, 并获得增益估计值.

(8) 研究了一类执行器饱和非线性 Hamilton 网络控制系统 H_∞ 状态反馈控制器设计问题. 该类网络控制系统中存在不确定的网络时延及丢包, 待设计的控制器受到饱和因素的约束, 且系统的外部扰动范数有界但统计特性未知. 结合 Hamilton 系统结构特性, 当网络时延和连续丢包有界时, 将网络时延和连续丢包转化为时变时滞, 应用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性理论来分析和设计 H_∞ 控制器, 使其满足 H_∞ 性能指标, 同时控制器中的未知参数可通过求解不等式来确定.

(9) 研究了输入饱和非线性切换 Hamilton 系统在任意切换路径下镇定与 H_∞ 控制问题. 将输入饱和表示为控制输入和补偿, 研究了输入饱和非线性切换 Hamilton 系统在任意

切换路径下镇定问题, 给出两个充分条件, 并设计了合适的状态反馈控制器, 使闭环系统在任意切换路径下全局渐近稳定. 在此基础上进一步研究了带外部干扰的输入饱和非线性切换 Hamilton 系统在任意切换路径下 H_∞ 控制问题, 在基于能量的非线性系统 L_2 干扰抑制理论基础上, 设计系统的 H_∞ 控制器. 在该控制器作用下, 系统存在外部干扰时, γ 耗散不等式成立; 无外部干扰时, 闭环系统全局渐近稳定.

(10) 针对执行器饱和的高阶多自主体系统一致性和 Leader-Follower 的跟踪控制问题, 研究了当系统满足一定条件时, 一个控制器同时镇定多个系统的情况, 并通过对控制器中增益参数分析, 得出了高增益参数不会影响一致性区域, 但会改变系统达到一致的速率研究结果. 并且给出了满足一定条件的系统达到半全局一致的条件以及多自主体半全局跟踪 Leader 的控制协议.

这部分主要研究结果可参阅作者发表的论文 [36, 40–47].

第 2 章　预备知识

本章对系统的稳定性及饱和控制等基本知识做了简要介绍, 目的是为后面的章节提供一个理论基础. 本章共分四节: 2.1 节介绍几个基本概念; 2.2 节介绍系统稳定性理论; 2.3 节介绍饱和函数; 2.4 节介绍非线性系统 L_2 增益.

2.1　几个基本概念

定义 2.1 [30]　称仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

是零状态可观测 (可检测) 的, 如果 $u(t) = 0, y(t) = 0, \forall t \geqslant 0$, 隐含 $x(t) = 0(\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0)$. 其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $u \in \mathbb{R}^m$ 为系统的输入向量, $y \in \mathbb{R}^m$ 为系统的输出向量, $g(x)$ 是 $n \times m$ 矩阵, $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $h(x) \in \mathbb{R}^m$ 为函数向量.

定义 2.2 [39]　称连续函数 $\pi : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ 是 K 类函数 (或属于 K 类函数), 如果

(1) $\pi(0) = 0$;

(2) $\pi(s) > 0, \forall s > 0$;

(3) π 是非减函数.

且 $\pi(s) \to \infty, s \to \infty$.

引理 2.1 [39]　若 $0 \leqslant d(t) \leqslant \tau$, 则对向量函数 $w : [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}^n$ 及任意正定矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 以下不等式成立:

$$\tau \int_{t-d(t)}^{t} w^{\mathrm{T}}(s) Z w(s) \mathrm{d}s \geqslant \left(\int_{t-d(t)}^{t} w(s) \mathrm{d}s \right)^{\mathrm{T}} Z \left(\int_{t-d(t)}^{t} w(s) \mathrm{d}s \right), t \geqslant 0.$$

引理 2.2　对任意向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$, M 为适当维数的正定矩阵, 则以下不等式成立:

$$2a^{\mathrm{T}} b \leqslant a^{\mathrm{T}} M a + b^{\mathrm{T}} M^{-1} b.$$

定义 2.3 (Lipschitz 连续性条件)[24]　若存在常数 K, 使得对定义域 D 内任意两个实数 x_1, x_2, 且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant K\|x_1 - x_2\|, K > 0$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 D 上满足 Lipschitz 连续性条件. 若 $f(x)$ 在区间 $[a_1, a_2]$ 上满足 Lipschitz 连续性条件, 则必定有 $f(x)$ 在区间 $[a_1, a_2]$ 上一致连续. 另外设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足如下条件:

(1) 当 $x \in [a,b]$ 时, $\varphi(x) \in [a,b]$, 即 $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$;

(2) 对任意的 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 有 $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, L > 0$ 恒成立.

即 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 其中 L 称为 Lipschitz 常数.

2.2　系统稳定性理论

稳定性是控制理论和控制设计中的一个基本问题, 控制理论中存在着许多不同类型的稳定性问题的提法. 其中工程中比较关心的是系统在平衡点附近的一类稳定性问题, 这通常可以用 Lyapunov 函数来刻画.

考虑下面系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \tag{2.2}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x(t), t) \in \mathbb{R}^n$ 是满足局部 Lipschitz 连续性条件的函数.

定义 2.4　令 x_e 为系统 (2.2) 的平衡点, 即 $f(t, x_e) \equiv 0$, 则:

(1) 若对于任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在一个实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$, 对于满足 $\|x_0 - x_e\| \leqslant \delta$ 的初值 $x(t_0) = x_0$, 解 $\psi(t, x_0, t_0)$ 存在, 且 $\forall t \geqslant t_0$, 有 $\|\psi(t, x_0, t_0) - x_e\| \leqslant \varepsilon$, 则平衡点 x_e 在 Lyapunov 意义下是稳定的 (见图 2.1).

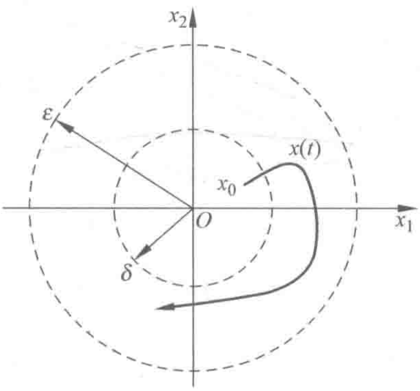

图 2.1　系统的稳定性

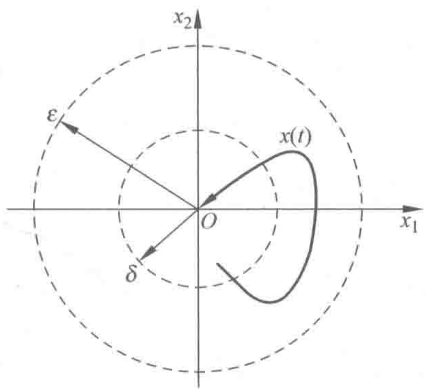

图 2.2　系统的渐近稳定性

(2) 如果平衡点 x_e 在 Lyapunov 意义下是稳定的, 存在一个实数 $\alpha(t_0)$, 对于满足条件 $\|x_0 - x_e\| \leqslant \alpha$ 的初值 x_0, 解 $\psi(t, x_0, t_0)$ 存在, 且 $\forall t \geqslant t_0$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\psi(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$, 则平衡点 x_e 在 Lyapunov 意义下是渐近稳定的 (见图 2.2).

(3) 如果平衡点 x_e 在 Lyapunov 意义下是稳定的, 且无论初始状态 x_0 取何值, 均有 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\psi(t, x_0, t_0) - x_e\| = 0$, 则平衡点 x_e 在 Lyapunov 意义下是全局渐近稳定的.

Lyapunov 稳定性定理 (直接法) 是:

定理 2.1　对于系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ f(0, t) = 0, \forall t, \end{cases} \tag{2.3}$$

如果满足以下两个条件:

(1) 存在函数 $V(x_e,t)=0,\ V(x,t)>0,\ x\neq x_e$;

(2) $\dot{V}(x,t)$ 是半负定的, 即 $\dot{V}(x,t)\leqslant 0$,

则系统在平衡点 $x_e=0$ 是稳定的.

如果条件 (2) 改为: $\dot{V}(x,t)$ 是负定的, 则系统的平衡点 $x_e=0$ 是渐近稳定的. 若系统的平衡点 $x_e=0$ 是渐近稳定的, 且 $V(x,t)$ 是径向无界的, 即 $\|x\|\to\infty$ 时, $V(x,t)\to\infty$, 则系统的平衡点 $x_e=0$ 是全局渐近稳定的.

定理 2.1 中的 $V(x,t)$ 为 Lyapunov 函数, 该定理仅需要判断 $V(x,t)$ 的特性就能判定系统 (2.3) 的稳定性. 需注意的是定理中的条件都是充分条件, 这就必须找到一个适当的 Lyapunov 函数 $V(x,t)$ 来判别系统的稳定性.

定理 2.2 (Lyapunov-Krasovskii 定理) 假设函数 $f: C_{n,\tau}\mapsto\mathbb{R}^n$, $C_{n,\tau}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, $u(s),v(s)$ 是 K 类函数, $w(s)$ 是连续非减函数. 若存在一个连续且可微的函数 $V: C_{n,\tau}\mapsto\mathbb{R}^n$, 满足如下条件:

(1) $u(\|x_t(0)\|)\leqslant V(x_t)\leqslant v(\|x_t\|_c)$;

(2) $\dot{V}(x_t)\leqslant -w(\|x_t(0)\|)$,

则系统 $\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x_t), & t>0\\ x(t)=\phi(t), & t\in[-\tau,0]\end{cases}$ 的零解是一致稳定的. 若 $w(s)>0, s>0$, 则系统零解是一致渐近稳定的. 若 $u(s)$ 为 K_∞ 类函数, 则系统是全局一致渐近稳定的.

定理 2.3 (Lyapunov-Razumikhin 定理)[48] 假设函数 $f: C_{n,\tau}\mapsto\mathbb{R}^n$, $C_{n,\tau}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, $u(s),v(s)$ 是 K 类函数, $w(s)$ 为连续非减函数. 若存在一个连续函数 $V: C_{n,\tau}\mapsto\mathbb{R}^n$, 满足如下条件:

(1) $u(\|x\|)\leqslant V(x(t),t)\leqslant v(\|x\|)$;

(2) $\dot{V}(x(t),t)\leqslant -w(\|x(t)\|)$, 无论何时 $V(x(t+\theta),t+\theta)\leqslant V(x(t),t),\theta\in[-\tau,0]$,

则系统 $\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x_t), & t>0,\\ x(t)=\phi(t), & t\in[-\tau,0]\end{cases}$ 的零解 $x(t)=0$ 是一致稳定的. 若 $w(s)>0, s>0$, 且存在一个连续非减函数 $p(s)>0, s>0$, 使得若 $V(x(t+\theta),t+\theta)\leqslant p(V(x(t),t))$, $\theta\in[-\tau,0]$, 恒有 $\dot{V}(x(t))\leqslant -w(\|x(t)\|)$, 则系统零解是一致渐近稳定的. 若 $u(s)$ 是 K_∞ 类函数, 则系统是全局一致渐近稳定的.

2.3 饱和函数

考虑如下执行器饱和线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+B\mathrm{sat}(u),\\ y=Cx,\end{cases}\tag{2.4}$$

其中, $x\in\mathbb{R}^n$ 为系统的状态, $u\in\mathbb{R}^m$ 为控制输入, $y\in\mathbb{R}^p$ 为测量输出, $\mathrm{sat}(u):\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为饱和函数, 描述了执行器的特性, 它的定义如下:

定义 2.5 称一个函数 $\mathrm{sat}:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 为饱和函数, 如果它满足如下条件:

(1) $\mathrm{sat}(s)$ 为离散的, 即 $\mathrm{sat}(s)=[\mathrm{sat}_1(s_1),\mathrm{sat}_2(s_2),\cdots,\mathrm{sat}_m(s_m)]^{\mathrm{T}}$;