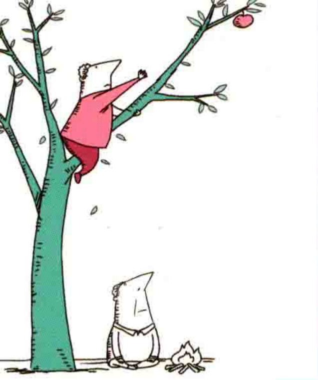
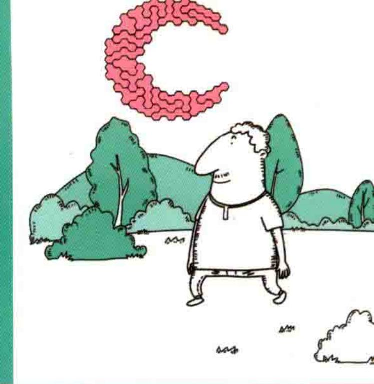


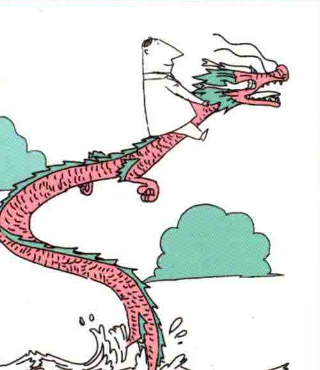


加德纳趣味数学

经典汇编

交际数、龙形曲线及棋盘上的马

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 译



上海科技教育出版社

加德纳趣味数学

经典汇编

交际数、龙形曲线及棋盘上的马

马丁·加德纳 著　　黄峻峰 译

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

交际数、龙形曲线及棋盘上的马/(美)马丁·加德纳著;黄峻峰译.—上海:上海科技教育出版社,2017.1

(加德纳趣味数学经典汇编)

ISBN 978-7-5428-6505-2

Ⅰ.①交… Ⅱ.①马… ②黄… Ⅲ.①数学—普及读物 Ⅳ.①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第255927号

责任编辑　李　凌
装帧设计　李梦雪　杨　静

·加德纳趣味数学经典汇编·

交际数、龙形曲线及棋盘上的马

［美］马丁·加德纳　著
黄峻峰　译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版
（上海市冠生园路393号　邮政编码200235）
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
www.ewen.co　www.sste.com
各地新华书店经销　常熟文化印刷有限公司印刷
ISBN 978-7-5428-6505-2/O·1030
图字09-2013-852号

开本720×1000　1/16　印张11
2017年1月第1版　2017年1月第1次印刷
定价：28.00元

序

许多读者可能不知道加德纳魔术的范围有多大。他是一个拥有高超技巧的艺术家和数以百计魔术游戏的发明者。他在高中时期最早发表的作品，都投给了美国的魔术期刊《斯芬克斯》(*The Sphinx*)。加德纳喜欢给那些有幸认识他的人表演近景魔术，他喜欢在地板上弹一个小圆面包(小圆面包会像一个橡皮球一样反弹回来)，吞下一把餐刀，或者把借来的戒指套在橡皮筋上。他特别喜欢看似违反拓扑定律的技巧。

另一种完全不同类型的魔术显示了加德纳向外行人解释重要数学思想的能力，他总是有办法让他们渴望知道更多。不像其他的数学科普作家，专业人士和业余爱好者同样喜欢加德纳的作品。当问到他如何驾驭这一点时，他总是坚持认为秘密恰恰是他缺乏高深的知识。在大学期间，他一门数学课程都没选，直到1989年，他才与他人合写了一篇有关新发现的正式论文。

虽然加德纳自学数学，但他影响了许多专业学者的生活，包括我们。例如，加德纳通过出版他的一些数学魔术思想，将一个失控的魔术少年转变成崭露头角的数学家，并且后来帮助这位青年找到了他的研究方向。另外，在加德纳为了创造新的谜题而努力理解某些特定谜题的过程中，萌生了许多富于想象力的研究问题。

加德纳的成功来之不易。1936年他从芝加哥大学毕业，获得哲学学士学位，之后成为塔尔萨市的一名新闻记者，开始了他的写作生涯，后来又在芝加

哥大学的媒体关系办公室当撰稿人。第二次世界大战期间在海军服役4年后，他搬到了曼哈顿，开始将小说卖给《时尚先生》(*Esquire*)，并成为《矮胖子杂志》(*Humpty Dumpty S Magazine*)的一名编辑。经过8年为5—8岁的小读者创作稀奇古怪的活动特辑，以及写故事和诗歌后，加德纳在《科学美国人》(*Scientific American*)上开始了他著名的专栏。在此之前，知情者告诉我们，多年来他住在狭小昏暗的房间里，穿着衣领磨损的上衣和有破洞的裤子，他的午餐经常被缩减为咖啡和一块丹麦面包。

加德纳为《科学美国人》专栏投入了大量的精力。他曾经告诉我们，每个月撰写专栏文章外剩下的时间只有短短几日。他离开《科学美国人》的主要原因是需要时间来撰写非数学主题的书和文章。他现在是四十多卷图书的作者，涉及的领域包括科学、哲学、文学以及数学。由他撰写的长期脱销的神学小说《彼得·弗罗姆的飞行》(*The Flight of Peter Fromm*)，1989年由法劳·斯特劳斯·吉鲁出版公司再版，他的许多书是文学随笔和书评集。

我们最近拜访了加德纳。我们中的一人给他表演了一个他以前没看到过的魔术——一个奇怪的假切牌技巧，他所表现出的热情和孩子似的惊奇深深打动了我们。年过七旬，他仍然像在中学读书时那样，急切地想要掌握被魔术师称为新“步骤”的技巧。

格雷厄姆(Ronald L. Graham)
AT&T贝尔实验室和罗格斯大学
迪亚科尼斯(Persi Diaconis)
哈佛大学
1989年秋

前言

这是我的数学游戏专栏内容的第八本集子。自1956年12月以来，这些游戏每月出现在《科学美国人》上。和前几本一样，栏目内容经过了修改、更新，并增加了参考书目和忠实读者提供的有价值的新材料。

其中有一位读者，他不擅长数学但喜欢阅读栏目内容，经常问："你为什么不能关照一下像我这样的读者，给我们提供一些你经常使用但很少给出定义的术语表呢？"

好的，亲爱的读者，下面就是你们要的术语表。该术语表按英文字母顺序排列，即使最卑微的数学家也对它烂熟于心，大多数读者只要瞥一眼就行。但如果你拥有冒险的灵魂，看不懂大部分数学书，却出于某个奇怪的原因决定认真地研读本书，你会发现在阅读本书之前，值得先看一遍这个简洁、非正式的术语表。

算法(Algorithm)：解决一个问题的过程，通常是极为枯燥的重复步骤，除非你用电脑替你完成。当你将两个大数相乘，核对你的支票簿，洗盘子，修剪草坪时，你都在应用算法。

组合(Combination)：一个集合的子集，不考虑顺序，如果集合是字母表，子集CAT是与CTA，ACT，TAC等相同的三个对象的组合。

组合数学(Combinatorial mathematics)：研究组合排列的学问。尤其关于满

足特定条件的排列是否可能，若可能，那么有多少种可能的排列。

例如，幻方，数论中古代组合问题的解。能否将数字1到9放在一个方阵中，使得每行、每列、以及两条主对角线上的三个数之和都相等？可以。有多少种放法可以做到这一点？如果旋转和映射不计为不同的话，只有一种。能否将这九个数排列成任意两个和都不相同，而且所有的和是连续的数？不能。

合数（Composite number）：具有两个或两个以上素因数的整数。换句话说，0，1，-1以外不是素数的整数就是合数。最小的几个正合数为：4，6，8，9，10。1234567是素数吗？不是，它有两个素因数，所以是合数。

计数数（或自然数）（Counting numbers）：1，2，3，4，…。

数字（Digits）：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9是十进制的10个数字。0，1是二进制的两个数字；0，1，2是三进制的数字；更高数系以此类推。一个以12为基的计数法有12个数字。

丢番图方程（Diophantine equation）：字母（未知量）代表整数的方程。这类方程用“丢番图分析法”求解。

e：π之后人人皆知的超越数。当n趋向无限大时是$(1+1/n)^n$的极限。在十进制记数法中，其值为2.718 281 828…，1828四个数字的疯狂重复完全是巧合。

整数（Integers）：包括自然数，负整数和零。

无理数（Irrational numbers）：不是整数的实数，并且在十进制记数法中，它们是不循环的无限小数，π、e、$\sqrt{2}$都是无理数。

模（Module）：当我们说一个数（模k）等于n，意思是这个数除以k时，余数是n。例如，17=5（模12），因为17除以12余数为5。

***n*维空间**（*N*-space）：一个n维欧几里得空间。一条线是一维空间，一个平面是二维空间，这个世界处于三维空间中，一个超正方体是一个四维空间超立方体。

非负整数(Nonnegative integers):0,1,2,3,4,5,…。

***n*阶**(Order *n*):一种用非负整数标记数学对象将其分类的方法。若我们在一侧数国际象棋棋盘的方格,它是一个8阶的方阵,如果我们在一侧数国际象棋棋盘的线而不是格子,则它是一个9阶方阵。

排列(Permutation):一个集合的有序子集。如果集合是字母表,CAT,CTA,ACT等等则是三个字母的相同子集的不同排列。红色、蓝色、白色是红色、白色和蓝色的一个排列。

多面体(Polyhedron):一个由多边形边界围起来的立体图形。四面体是有4个面的多面体,立方体是有6个面的多面体。

素数(Prime):一个整数,不包括0,1,-1。除了其自身和1以外,不能被其他整数整除。最前面的几个正素数是2,3,5,7,11,13,17,19,…,有两个有趣的素数1 234 567 891和11 111 111 111 111 111 111 111。已知的最大素数是1985年找到的,它是$2^{216091}-1$,有65050位数。

有理数(Rational numbers):整数和分数线上、下都是整数的分数统称为有理数。在十进制记数法中,有理数或者没有小数部分,或者有有限的小数部分,或者有带循环节的小数。

实数(Real numbers):有理数和无理数。实数是相对于虚数而言的,如-1的平方根即是虚数,尽管虚数与实数一样真实。

倒数(Reciprocal):一个分数上下颠倒。$\frac{2}{3}$的倒数是$\frac{3}{2}$,3(或$\frac{3}{1}$)的倒数是$\frac{1}{3}$,1的倒数是1。

集合(Set):任何事物的集。如实数,自然数,奇数,素数,字母表,你头上的头发,这一页上的词,国会议员,等等。

奇点(Singularity):当一个或多个变量具有特定值时,使一个方程(或由一

个方程表示的物理过程)发生奇特状态的某个点位或时刻。如果你在空中向上抛一个球,球向上飞的轨迹在顶点时达到奇点,因为在那一刻球的速度降到零。根据相对论,宇宙飞船的速度无法超过光速,因为在光速时关于长度、时间和质量的方程到达奇点,长度变为零,时间停止,质量趋于无穷大。

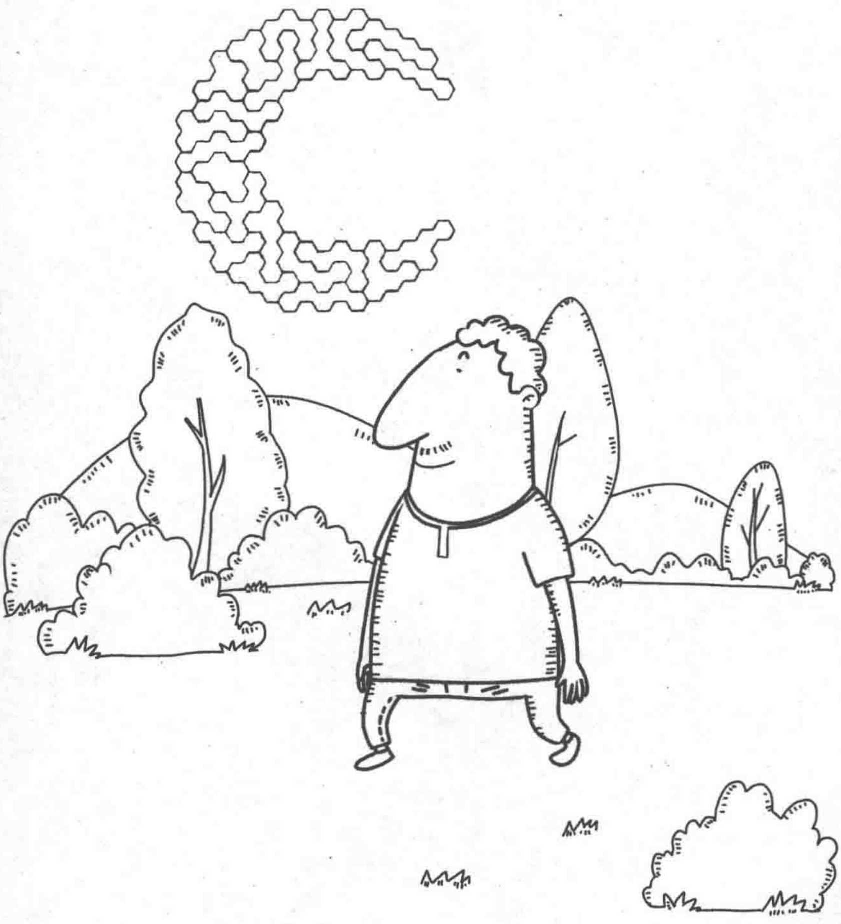
这个前言就要到达突然停止的奇点。

马丁·加德纳

目录

第 1 章

多联六边形与多联等腰直角三角形



普通的拼图游戏缺乏数学趣味性：通过试错法将拼板拼在一起，只要一个人有足够的决心与耐心，图集的拼构最终一定能完成。但是如果拼板是简单的多边形，将其拼成预定的形状，则此任务就成了一种组合几何问题，为相当的数学巧妙性提供了空间，有时也会引出重要的数学问题。如果一组多边形拼板是通过运用简单的组合规则得到的，它将呈现出优雅的品质，研究这类集合的组合特征尽管很耗费时间，却令人着迷。

对于消遣数学的狂热者来说，这种复杂的拼图中最受欢迎的就是多联骨牌。它们是由n个单元正方形以所有可能的方式拼接在一起的骨牌。有许多专门关于此类问题的文章，南加州大学工程学及数学教授格罗姆(Solomon W. Golomb)还写了一本专著《多联骨牌》(*Polyminoes*)。将等边三角形沿着边拼起来，会得到另一种已被深入研究的图形家族，名字叫“多形组”。在我的《数学游戏之六》(*Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*)中讨论过了六形组(由六个等边三角形组成的多形组)。

许多喜欢多联骨牌以及多形组的读者来信，提出了用其他方法可以获得一组基础的多边形，用来作为类似的消遣。在本章中，我将讨论两组引起最多来信的图形，这两种图形都有出版商提及它们。

由于仅有三种正多边形可以拼成平面：正方形、等边三角形以及正六边

形，人们立刻会想到利用全等六边形来拼构图形。将两个正六边形拼在一起只有一种方法，三个正六边形拼在一起有三种方法，四个有七种。由于这些图形很像“苯环”化合物的结构图，有两位读者施瓦兹(Eleanor Schwartz)和克劳特(Gerald J. Cloutier)建议称其“苯环”。也有读者提出其他名字，但我认为最好的名字是“多联六边形”。戴维·克拉纳(David Klarner)采用了该名字，他是最早研究多联六边形的学者。图1.1中列出了从众多读者来信中精选出来的七种四联六边形(包括名字)。其次最多的一组是五联六边形，有22种不同的形状，作为消遣有点过于困难。有82种六联六边形，333种七联六边形以及1448种八联六边形。(经过旋转和镜像得到的图形仍视为相同)。如同多联骨牌以及多形组，还没有公式来确定给定的多联六边形的个数。

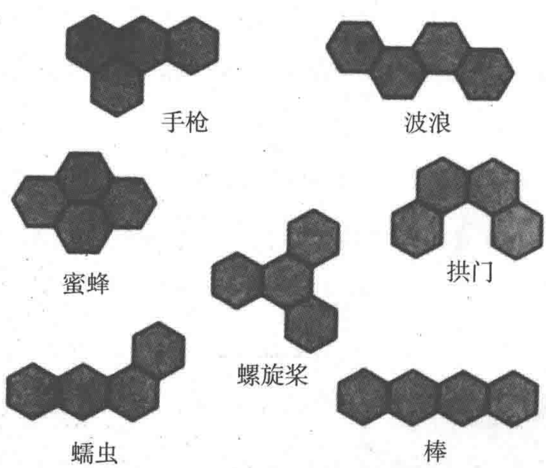


图1.1　七种不同的四联六边形

请读者从一张纸板上剪下一组四联六边形。(如果你的地板是由六边形瓷砖拼成，你可以让骨牌的大小与瓷砖的尺寸一致，这样，地板就可以作为解决四联六边形问题的基础了。)图1.2的八种对称的图形中，所有的图形(除了一种)都可以由七个四联六边形拼成。许多读者给出了“平行四边形”、“三角形”

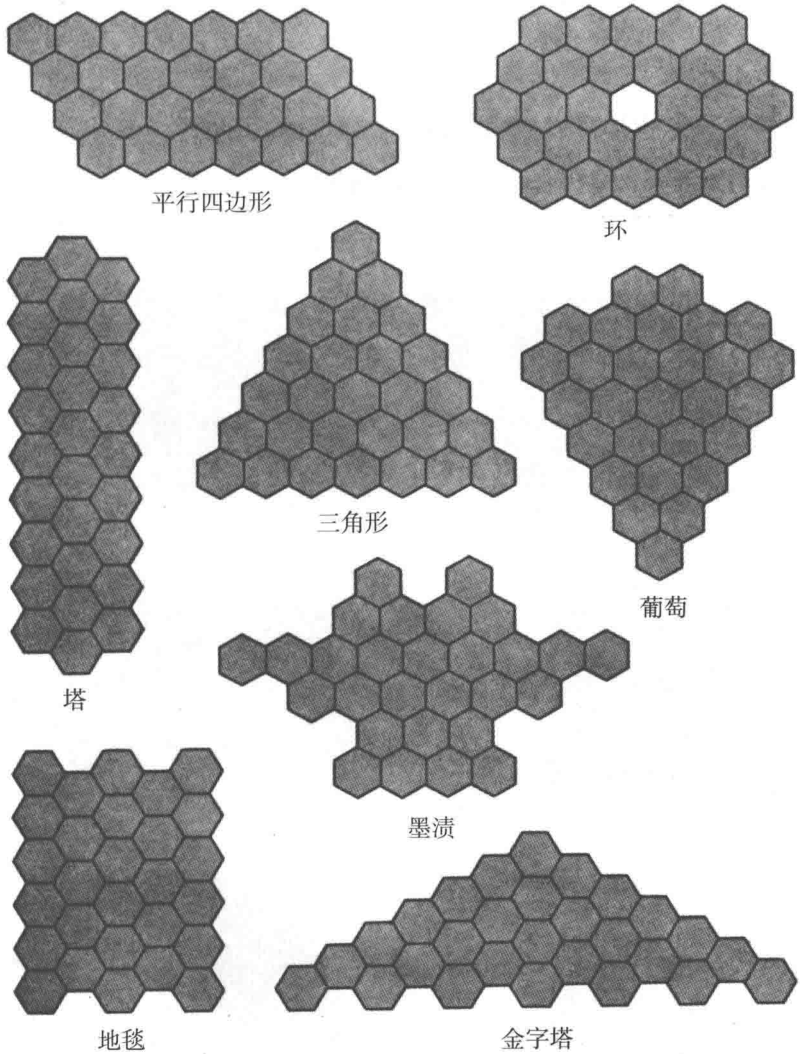


图1.2　由四联六边形骨牌拼成的图形，但是其中一个不可能实现的

以及“塔”。霍维茨(Richard A. Horvitz)给出了“墨渍”与“葡萄”，克劳特给出了“环”，克拉纳给出了“金字塔”，马洛(T. Marlow)和克拉纳给出了“地毯”。你能确定出哪个图形是不可能的吗?关于它的不可能性还没有简单的证明方法。(答案不可能是“塔”，尽管它很难，但有唯一解，不包含简单地翻转两个骨牌组

成的镜像对称图形。)所有的七块骨牌都必须使用,通过将整个图形轴映射得到的结果不算作另一种答案。

22种五联六边形可以拼成许多令人惊奇的对称图形(参见图1.3)。罗伯特·克拉纳(Robert G. Klarner)(戴维·克拉纳之父)发现了“地毯”(可以将其分成两块,将两个末端相连,形成一块更加狭长的地毯)。德国汉堡的霍夫曼

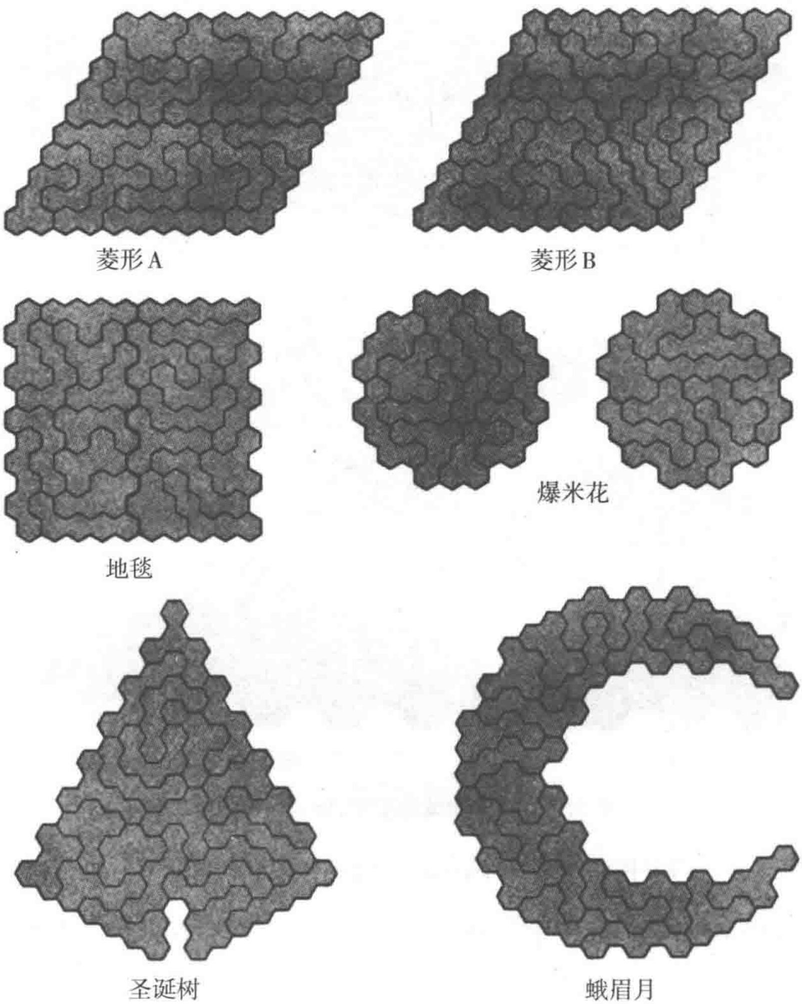


图1.3　由五联六边形骨牌拼成的图形