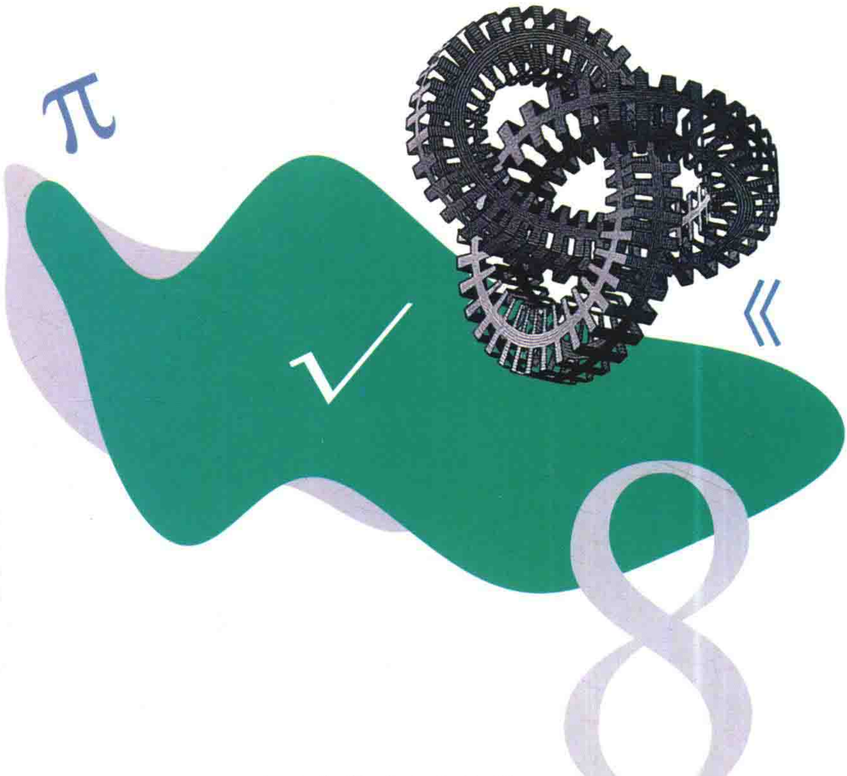
丛书主编 熊斌 田廷彦

数学竞赛教程

（八年级）

陶磊 周慧 编著



上海人民出版社

丛书主编　熊斌　田廷彦

数学竞赛教程

（八年级）

陶磊　周慧　编著

上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛教程. 八年级/熊斌,田廷彦主编;陶磊,周慧编著. —上海:上海人民出版社,2012

ISBN 978-7-208-10808-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①熊… ②田… ③陶… ④周… Ⅲ. ①中学数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 125425 号

责任编辑 马健荣
封面装帧 王小阳

数学竞赛教程
(八年级)
熊 斌 田廷彦 主编
陶 磊 周 慧 编著
世 纪 出 版 集 团
上海人民出版社出版
(200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.cc)
世纪出版集团发行中心发行
江苏启东人民印刷有限公司印刷
开本 890×1240 1/32 印张 13 插页 4 字数 359,000
2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-208-10808-0/G・1524
定价 36.00 元

序　言

一直以来，因材施教是每个教育工作者的理想，也是实现教育公平的途径. 随着国家“十一五”规划中，重点提出培养一批精英人才的需求，除了课本内的知识，如何通过适当的、有益的锻炼，提升资优生的素养，为国家提供合格之栋梁，成为教育一线工作者的一项严峻的课题。《数学竞赛教程》正是基于这样的目的，应运而生。

《数学竞赛教程》综合各家之所长，是一套系统地、精炼地讲解初中数学主要内容的简明教程。从初一到初三，共三个分册。其中，每个分册都包含“基础知识篇”、“能力提高篇”两部分。

基础知识篇：主要内容为初中数学教材内容，难度略高于教材难度；

能力提高篇：主要内容为初中数学竞赛中的补充内容，难易程度可参考各年的初中数学联赛试题。

每篇内容根据知识块可分为若干章，如代数、几何、数论等。每章内容根据知识点分若干节进行讲解。根据每节的内容量和难度再适当分为若干小节，每小节设置 6～8 个例题。每节内容分为“知识结构”、“经典例题”、“归纳总结”和“课后练习”四部分内容。

知识结构：以简练、明白的文字介绍本节的知识、方法，如相关知识点的梳理、题型说明、竞赛知识点与热难点、方法陈述等，适当用结构图表示，力求精简准确。

经典例题：每小节为 6～8 道例题，少而精，有代表性，有新意。每道题目之间有相关性，是梯度关系，层层递进。每道题的解答分为“分析”、“解”、“说明”三部分，其中渗透了基本的数学思想，讲思路，讲方法，表达规范、简练，特别有助于提高同学们的分析能力。

归纳总结：每小节后有归纳总结，主要讲解这部分内容的关联处，以

及不同解法的选择应用，起到能力提升的作用。

课后练习：每节结束后有课后练习，根据难度分为 A、B 两部分，A 部分为基础训练，是必须掌握的基本内容；B 部分为提高题，选取了历年的竞赛真题或中考真题。两部分一共 20～30 道左右，题型以解答题为主。对不太难的题目给出了最后结果，使读者有一个思维空间；对较难的题目，给出了关键性的提示。

当今，中学教学参考书花样繁多，说有数百种也不为过，常令学子们眼花缭乱，无从选择。本书则力求使读者通过循序渐进的过程，夯实基础，再进行能力的提升。同时，通过对初中数学中的重点知识进行深入、细致的分析和讲解，使得学生能够解决学习中的困难，提高分析问题和解决问题的能力，使自己的数学能力有进一步的提升。

我们衷心希望广大教师和学生对本套丛书的编写提出宝贵的建议和意见。

《数学竞赛教程》编委会

目　录

能力提高篇

基础知识篇

第一章　整式、分式与根式

1.1　因式分解

知识结构

因式分解是把一个多项式化为几个整式积的形式，是整式乘法的逆应用，与分解因数类似，是多项式的一种恒等变形.

因式分解作为中学数学中最重要的恒等变形之一，具有一定的灵活性和技巧性. 其基本方法有：提取公因式法、公式法、分组分解法；进一步发展有：十字相乘法、添(拆)项法、待定系数法、换元法、对称式的分解等.

因式分解的一般步骤如下：

提出公因式→看项数定方法→能分解再分解.

经典例题

例 1　**分解因式：$(a-b)x^4+(b-a)y^4$**

解　$(a-b)$ 和 $(b-a)$ 互为相反数，所以它们有公因式 $(a-b)$，应该将它先提出来：

原式 $=(a-b)(x^4-y^4)$.

这里 (x^4-y^4) 是平方差，可以用公式，得

原式 $=(a-b)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$.

要注意这里 (x^2-y^2) 还是平方差，要继续分解下去：

$\therefore$ 原式 $=(a-b)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

说明 (1) 要注意 $(a-b)$ 与 $(b-a)$ 互为相反数，而 $(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$ 是相等的；

(2) 分解因式必须分解到每一个因式都不能再分解为止.

例 2 **当 $x-y=1$ 时，求 $x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值.**

解 原式

$$\begin{aligned}&=(x^4-xy^3)+(y^4-x^3y)+(3xy^2-3x^2y)\\&=x(x^3-y^3)+y(y^3-x^3)+3xy(y-x)\\&=(x-y)(x^3-y^3)-3xy(x-y)\\&=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)-3xy(x-y).\end{aligned}$$

$\because x-y=1$,

$\therefore$ 原式

$$\begin{aligned}&=1\times(x^2+xy+y^2)-3xy\times 1\\&=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\\&=1.\end{aligned}$$

说明 当已知某个代数式的值时，我们若能通过因式分解得到含有这个代数式的因式，常可将其整体代入，从而简化运算过程，提高计算的准确性.

例 3 **分解下列因式：**

(1) $63x^2+22x-8$；

(2) $x^2+5xy+6y^2+8x+18y+12$.

分析 (1) 是二次三项式用十字相乘法；

(2) 是二次六项式，可考虑把多项式看成 x 的二次三项式，把 y 看成常数，采用十字相乘法，进行因式分解.

解 (1) 十字相乘法

$$\begin{aligned}&63x^2+22x-8\\&=(7x+4)(9x-2).\end{aligned}$$

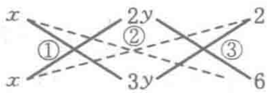
$$\begin{array}{ccc}7 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 4\\ 9 & & -2\\ \hline \multicolumn{3}{c}{7\times(-2)+9\times4=22}\end{array}$$

(2) **解法 1**

$$x^2+5xy+6y^2+8x+18y+12$$

$$= x^2 + (5y+8)x + (6y^2+18y+12)$$
$$= x^2 + (5y+8)x + (2y+2)(3y+6)$$
$$= (x+2y+2)(x+3y+6).$$

解法 2



$$x^2 + 5xy + 6y^2 + 8x + 18y + 12$$
$$= (x+2y+2)(x+3y+6).$$

说明 如果二次项系数是负数，不妨先把符号统一提取出来进行变形，再进行分解.

例 4 **分解因式：$2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$.**

分析 原式不缺项，直接分组分解难以进行，可考虑拆项分解，把中间的两项各拆成两项，原式变成六项，再按组系数对应成比例的原则分成三组，每组两项，使三组系数的比分别为 $2:(-2) = 11:(-11) = 14:(-14)$ 或 $2:(-4) = (-9):18 = 7:(-14)$ 或 $2:(-7) = (-6):21 = 4:(-14)$，得到不同的拆项方法.

解

$$2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$$
$$= (2x^3 - 2x^2) - (11x^2 - 11x) + (14x - 14)$$
$$= 2x^2(x-1) - 11x(x-1) + 14(x-1)$$
$$= (x-1)(2x-7)(x-2).$$

例 5 **求证：具有如下性质的自然数 a 有无穷多个，对于任意的自然数 n，$z = n^4 + a$ 都不是素数.**

分析 如果能将 $z = n^4 + a$ 右侧的多项式分解成为两个或两个以上因式的乘积（并且说明这两个因式所表示的数均是大于 1 的数），即可. 这里我们用添项法.

解 设 $a = 4k^4$（k 为大于 1 的自然数），则

$$
\begin{aligned}
z &= n^4 + a = n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 \\
&= (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 \\
&= (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk) \\
&= [(n+k)^2 + k^2][(n-k)^2 + k^2].
\end{aligned}
$$

因为 k 为大于 1 的自然数,所以 $(n+k)^2 + k^2 > 1$, $(n-k)^2 + k^2 > 1$,故 $z = n^4 + a$ 可以分解为两个都大于 1 的因子的乘积,是合数. 由于大于 1 的自然数 k 有无穷多个,故有无穷多个自然数 a,使 $z = n^4 + a$ 对一切自然数 n 总非素数.

说明 例 4 采用了拆项法,例 5 采用了添项法,拆项添项的目的是使多项式能用分组分解的方法进行因式分解.

例 6 **已知多项式 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 的系数都是整数. 若 $bd + cd$ 是奇数,求证:这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.**

分析 先设这个多项式能分解为两个整系数多项式的乘积,然后利用已知条件及其他知识推出这种分解是不可能的.

证明 设 $x^3 + bx^2 + cx + d = (x+m)(x^2 + nx + r)$,

$x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 + (m+n)x^2 + (mn+r)x + mr$ (m, n, r 都是整数)

比较系数,得 $mr = d$.

因为 $bd + cd = d(b+c)$ 是奇数,则 $b+c$ 与 d 都为奇数,那么 mr 也是奇数,由奇数的性质得出 m, r 也都是奇数.

在 $x^3 + bx^2 + cx + d = (x+m)(x^2 + nx + r)$ 中,令 $x = 1$, 得

$$1+b+c+d = (1+m)(1+n+r),$$

由 $b+c$ 与 d 都为奇数,得 $1+b+c+d$ 是奇数. 而 m 为奇数,故 $1+m$ 是偶数,所以 $(1+m)(1+n+r)$ 是偶数. 这样 $1+b+c+d = (1+m)(1+n+r)$ 左边是奇数,右边是偶数,这是不可能的. 因此,题中的多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

说明 本题解法中运用了待定系数法,其原理为:

若两多项式 $f(x)=g(x)$，则它们同次的对应项系数一定相等.

所要证明的命题涉及到“不能”时，常常考虑用反证法.

归纳总结

把一个多项式因式分解，如果多项式的各项有公因式，就先提取公因式，公因式可以是数、单项式，也可以是多项式；如果各项没有公因式，再看能否直接运用公式法或十字相乘法分解，如果还不能分解，就试用分组分解法或其他方法. 分解因式时，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止，结果一定是乘积的形式，每个因式都是整式，相同因式的积要写成幂的形式.

课后练习

A 组

1. 分解因式：a^3-a.
2. 分解因式：$a^4x^4-6a^3x^6+9a^2x^8$.
3. 分解因式：x^2-y^2-4x+4.
4. 分解因式：$4a^3-4a^2+a$.
5. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$.
6. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)+x^2$.
7. 已知 $a+b+c=0$，求证：$c^2+2ac=(a+b)(b-a)$.
8. 已知正数 a、b、c 满足 $ab+a+b=bc+b+c=ca+a+c=3$，求 $(a+1)(b+1)(c+1)$ 的值.
9. 分解因式：a^6-b^6.
10. 分解因式：$a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab$.
11. 分解因式：$a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$.

B 组

1. 分解因式：a^3+3a^2+3a+2.
2. 已知二次三项式 x^2-mx-8（m 是整数）在整数范围内可以分解为两

个一次因式的积，求 m 的可能取值.

3. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

4. 分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)-3x^2$.

5. 分解因式：x^5+x+1.

6. 若 $(x-a)(x-b)-k$ 中含有因式 $x+b$，求用 a、b 表示 k 的代数式.

7. 分解因式：x^4+4.

8. 已知 x^2+2x+5 是 x^4+ax^2+b 的一个因式，求 $a+b$ 的值.

9. 若多项式 $8x^2-2xy-3y^2$ 可写成两个整系数多项式的平方差 M^2-N^2，求用 x、y 表示 M、N 的一种形式.

10. 已知 n 为正整数，求证：n^3-n 的值必是 6 的倍数.

11. 分解因式：$6x^2-13xy+6y^2+22x-23y+20$.

12. 分解因式：$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

13. 分解因式：$2x^2+7xy+3y^2-5y-2$.

14. 分解因式：$x^{5n}+x^n+1$.

15. 分解因式：$(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$.

16. 已知 n 是正整数，且 n^4-16n^2+100 是素数，求 n 的值.

17. 分解因式：$x^3+(2a+1)x^2+(a^2+2a-1)x+a^2-1$.

18. 分解因式：$x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$.

19. 分解因式：$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

20. 分解因式：$a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$.

21. 若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，求 $x+y$ 的值.

22. 分解因式：$x^3+y^3+3xy-1$.

23. 若代数式 $x(x+1)(x+2)(x+3)+p$ 恰好能分解为两个二次整式的乘积(其中二次项系数均为 1 且一次项系数相同)，则 p 的最大值是多少?

24. 分解因式：$(x+5)^4+(x+3)^4-82$.

25. 计算：$\dfrac{(10^4+64)(18^4+64)(26^4+64)(34^4+64)}{(6^4+64)(14^4+64)(22^4+64)(30^4+64)}$.

26. 若 a 为正整数，则 a^4-3a^2+9 是质数还是合数? 给出你的证明.

27. 分解因式：$(x^4-4x^2+1)(x^4+3x^2+1)+10x^4$.

1.2 分式的运算

知识结构

两个整式A，B相除，即$A\div B$时，可以表示为$\dfrac{A}{B}$，如果B中含有字母，那么$\dfrac{A}{B}$叫做分式.

分式的运算与分数的运算相似，是以分式的基本性质、运算法则、通分和约分为基础，是以整式的变形、因式分解为工具.

分式的运算是重要的代数式恒等变形，其主要运算法则有

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}(n\text{是正整数}).$$

进行异分母分式加减运算的基本方法是转化为同分母分式加减运算，转化的关键是通分. 但有时并不必将所有分式全部通分，而且利用一些技巧简化运算，如用逐步通分法、拆项分项法、分组通分法、换元法等.

经典例题

例 1　a取什么值时，分式$\dfrac{a^2-4}{1+\dfrac{1+3a}{2a}}$无意义？

分析 当分式的分母为零时，分式无意义，由于分式复杂，考虑问题要周密细致.

解 如果 $1+\dfrac{1+3a}{2a}=0$，

解方程，得 $a=-\dfrac{1}{5}$.

所以当 $a=-\dfrac{1}{5}$ 时，分式 $\dfrac{a^2-4}{1+\dfrac{1+3a}{2a}}$ 无意义.

例 2 已知 $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$，求 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

分析 从已知条件 $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$ 很难解出 x 的值，但可以求出 $x+\dfrac{1}{x}$ 的值.

解 $\because$ $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore$ $\dfrac{x^2+x+1}{x}=3$.

$\therefore$ $x+\dfrac{1}{x}=2$.

$\therefore$ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=2^2-2=2$.

$\therefore$ $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+1=2+1=3$.

$\therefore$ $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{3}$.

说明 由 $x+\dfrac{1}{x}$ 的数值求出 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^3+\dfrac{1}{x^3}$，$x-\dfrac{1}{x}$ 的方法在运算中经常用到，希望同学们熟练掌握它们之间的关系.

例 3 化简：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{1}{c}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{d}\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)-\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\left(1+\dfrac{1}{d}\right)$.

分析 分式较为复杂，可先进行分式的变形，添加“1”.