实变函数论

樊太和　贺平安　编

清华大学出版社

实变函数论

樊太和　贺平安　编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书首先介绍了集合论和拓扑学的基础知识，然后结合微积分的发展简史与不完善之处，从分析学的角度系统地介绍了实变函数的基本理论框架. 全书所列内容均由作者多年讲义结合国际上最新的《实分析》教材内容整理而成，辅以数学史的注解，对初学者真正学懂这门专业课十分有益.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/樊太和, 贺平安编.—北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-46120-3

Ⅰ. ①实…　Ⅱ. ①樊… ②贺…　Ⅲ. ①实变函数论　Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 006063 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　印　张：12　　字　数：208 千字
版　　次：2016 年 12 月第 1 版　　印　次：2016 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：28.00 元

产品编号：071700-01

序

樊太和教授把他们即将出版的教科书《实变函数论》的预印文档发给我, 让我先睹为快. 我在分析学的研究中浸润数十年, 又开过诸多分析学方面包括实变函数论的课程, 阅读过各类实变函数论的专著和教科书, 对分析学领域的总体概观有一些自己的理解, 因此, 我饶有兴趣地读完了这本书.

在数学的发展过程中, 我个人的理解是: 从有限到无穷是分析数学产生的标志. 极限理论和微积分的建立刻画了无穷趋势, 从而在动态的基础上奠定了现代数学的基石. 但是, 微积分的内容主要还是定义在特殊数集 —— 区间的基础上, 因而存在着诸多不完善性, 包括积分系统的不完善性. 实变函数论首先要解决的是如何定义无穷集合特别是数集的“大小”, 即基数, 进而建立在相应一般数集上定义的分析学.

尽管实变函数论已经出版过很多教科书, 但樊贺两位教授的书还是具有一些独特之处.

这本教科书从分析学的角度给学生讲述了微积分发展的简史以及不完善之处, 从此出发, 开始定义无穷集合的基数. 同时结合拓扑, 讲述了实变函数的诸多概念和原理, 最终给出了 Lebesgue(勒贝格) 积分的定义和主要经典定理. 从学生的角度看, 整本书的讲述是循序渐进的, 对有关的基础和定义进行了严谨的论述和证明, 从而建立了自洽的整体结构.

作者在全书章末的注记中对相关内容的历史和进一步发展作出了严肃的介绍和评论, 这对学生理解和掌握知识提供了有效和有益的工具. 结合教学内容, 本书配备了相当数量的练习题, 有助于学生掌握基本的知识面和解题技巧, 还可提供给非数学专业的读者作为参考书使用.

我与两位作者同事和交往多年, 深知他们具备科研、治学严谨，教学追求完美的态度, 本书内容得到课堂检验和修订后, 相信一定可以给学生及年轻的数学爱好者以启迪与帮助.

“路漫漫其修远兮, 吾将上下而求索.” 可以把几千年前诗人的这句诗, 作为对两位作者的勉励, 磨砺以须, 精益求精, 希冀本书最终能成为实分析方面的一本经典的通用教材.

周颂平

2016 年 10 月

引　言

了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤.—— 陈省身

积分学的历史最早可以追溯到公元前 3 世纪时, Archimedes(阿基米德) 利用圆的内接多边形计算圆的周长和面积. 中国古代魏晋时期 (公元 3 世纪) 刘徽独立于西方创立了割圆术计算圆的周长、面积、圆周率等. 随后南北朝时期 (公元 5 世纪) 祖冲之发展了割圆术, 成功地提高了圆周率的精度. 割圆术的思想其实就是现代分析中的无限分割.

17 世纪 Newton(牛顿) 计算积分的流数法和 Leibniz(莱布尼茨) 的《深奥的几何与不可分量及无限的分析》一书宣告微积分的正式诞生. 18 世纪, 微积分发展迅速, 大部分积分计算方法都是这一时期给出的, 其中对分析学的发展贡献巨大的数学家有 Euler(欧拉)、Bernoulli(伯努利) 兄弟、Taylor(泰勒)、Lagrange(拉格朗日)、Legendre(勒让德) 等. 需要特别指出的是, 18 世纪微积分发展的一个历史性转折是函数被放到了核心位置, 此前数学家是以曲线作为主要研究对象的. Euler 在他的《无限小分析引论》中明确宣布:“数学分析是关于函数的科学”.

需要说明的是, Newton 和 Leibniz 的微积分关于无限小概念的使用比较随意, 容易引起混乱, 当时引起不少人的质疑. 因此数学家们意识到分析需要严格化来消除这些混乱和随意性. 分析的严格化工作的杰出人物有 d'Alambert(达朗贝尔)、Euler、Lagrange 等人, 其中 Euler 和 Lagrange 引入了形式化的观点, 而 d'Alambert 则引入了极限的观点. 到了 19 世纪初, 分析的严格化已经卓有成效, 其中最重要的代表人物是 Cauchy(柯西), 他给出了微积分基本定理的现代形式和级数的收敛性的定义等一系列重要工作. 19 世纪中期, 为了弥补 Cauchy 等人采用的“无限地趋近”这种说法不够严谨的不足, Weierstrass(魏尔斯特拉斯) 引入了现在分析中采用的严谨的 ε-δ 语言, 重新定义了极限、连续函数、导数等分析中的主要概念, 使得分析达到了非常严密的程度, 因此 Weierstrass 被称为现代分析之父.

在分析的严格化过程中, 数学家们遇到了极大的困难. 一些基本概念如极限、实数、级数等的研究涉及无穷多个元素构成的集合, 比如不连续函数的连续点和不连续点构成的集合. 为了克服这些困难, Dirichlet(狄利克雷)、Riemann(黎曼) 等人作了不少工作. 而 Cantor(康托尔) 则走得更远, 他在这一研究过程中系统发展了点集理论, 开拓了一个全新的数学领域 —— 集合论. 集合论已经成为现代数学的基础.

19 世纪末 20 世纪初, 分析已经成为数学的基础, 其内容已经非常丰富, 体系也相对比较完整. 然而, 在很多地方分析学还存在较大的局限性和不完美之处. 比如: (1) 一个函数 Riemann 可积的充要条件是什么? 能否给出类似于连续性的 Riemann 可积的充要条件? (2) 极限与积分次序交换问题. 如果函数列不一致收敛, 是否函数列的极限和积分次序一定不可交换? (3) 微积分基本定理在被积函数不连续时是否成立?

针对上述问题, 在集合论的基础上 Lebesgue 发展了一套完整的积分理论 ——Lebesgue 积分.

和 Riemann 积分相比, Lebesgue 积分具有更好的分析性质. 比如, 可积函数类更广; Lebesgue 积分和极限可以交换次序的条件很弱; 微积分基本定理成立的条件不仅限于连续函数. 此外, 利用 Lebesgue 积分可以给出函数 Riemann 可积的充要条件. Lebesgue 积分理论已成为许多现代数学分支的基础, 如公理概率论、计算数学、分形几何等; 也被广泛应用于经济学、计算机科学等应用学科当中.

本书介绍的实变函数论历来对数学专业来说是一门较难的课程. 作者近年来一直从事实变函数论课程的教学工作. 这本《实变函数论》教材以授课讲义为基础, 结合国际上最新的《实分析》教材内容而形成.

本书首先对学习实变函数论需要的集合论和拓扑学基础知识作了系统介绍. 作者在教学过程中深感初学者学习实变函数论的第一个难点就是对无限概念的理解, 因此在集合论部分对相关的无限集知识, 如集合的基数、选择公理、连续统假设等作了较详细的介绍. 为了便于和拓扑学课程衔接, 教材中拓扑学部分的内容是采用拓扑学课程的体系进行讲授. 例如在测度的讲述当中本书尽量采用拓扑学的方式, 结合 Solovay(索洛韦) 关于不可测集存在性的结论对 Lebesgue 测度与积分的非构造性特征作了系统介绍, 力图让读者理解 Lebesgue 测度之所以抽象的根本原因, 这也是实变函数学习的第二个难点. 度过了上述两个难点后相信读者学习后续部分内容就不会有太大困难. 在测度论部分对集合可测性的不同定义方式作了系统介绍, 从而方便读者阅读参考书.

本书对积分的讲述采用和数学分析类似的处理方式, 即先系统讲述有界集上的有界函数积分再过渡到一般函数积分, 这样做的目的是便于读者和数学分析课程进行比较. 微分部分的讲述采用的是较为简洁的极大函数方法.

本书所有内容主要讲述低维情形, 如测度部分主要是讲一维情形. 只要把低维情形学习好了, 再推广到高维不应有太大困难. 本书对相关知识的发展历史作了适当介绍, 我们相信相关知识历史背景的了解对学好实变函数论是必不可少的, 至少可以增强学习的目的性, 了解前人当时是怎么思考的.

本书篇幅虽然简短, 但自成一体. 尤其是学习实变函数论所需要的集合论和拓扑学知识的介绍比较完备. 限于篇幅, 我们只讲述实变函数论最基本的理论框架, 许多深入的内容, 如 L_p 空间、Fourier(傅里叶) 分析等完全未涉及.

本书引用了书后参考文献中的相关内容和习题; 编写过程中函数论专家、浙江理工大学周颂平教授给出了不少建设性建议, 他细致审阅了本书全文并作序; 本书出版得到浙江理工大学教材建设项目和浙江省一流数学学科建设经费资助. 在此一并表示感谢. 本书以讲义形式在浙江理工大学实变函数论课程中多次讲述, 因此同时感谢几届学生提出的宝贵意见. 最后特别感谢清华大学出版社为本书出版所付出的努力.

编　　者

2016 年 12 月于浙江理工大学

目　录

第 1 章

集　　合

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中最为基本的概念. 在通常讨论问题时, 一般只采用描述性的定义. 通常我们把具有某种特性的对象全体看成一个集合, 该集合中的对象称为元素.

关于集合的最基本的一些概念如子集、包含等读者在数学分析甚至高中数学课程中都已见过, 不再赘述.

实际上, 集合有严格的数学定义, 关于集合的研究是基础数学的一个分支 —— 集合论.

通常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示集合中的元素. $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 分别表示全体自然数、全体整数、全体有理数以及全体实数构成的集合. $\mathbf{Z}_+, \mathbf{R}_+$ 分别表示全体正整数和全体正实数构成的集合. 注意, 按照近年来的习惯, 集合 $\mathbf{N}$ 中包含 0.

设 x 为对象, A 为集合. $x \in A$ 表示 x 为 A 中元素, 或称 x 属于 A. 而 $x \notin A$ 表示 x 不是 A 中元素. $x \in A$ 或 $x \notin A$ 二者必居其一.

设 P 为某种性质, 则具有性质 P 的元素全体构成的集合 A 通常表示如下:

$$A = \{x | x\text{具有性质}P\},$$

其中 P 可以是任意性质, 如 P 为方程 $x^2 - 1 = 0$, 则 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$. 如果集合 A 为有限集且可以明确它的所有元素, 也可以列举出 A 的元素. 例如, 上面的集合 $A = \{-1, 1\}$. 有时为了方便, 也把集合 $\{x | x \in E, x\text{有性质}P\}$ 简写为

$E(x有性质P)$. 例如, 设 $f(x)$ 是集合 E 上的一个函数, c 是一个实数, 则集合 $\{x|x\in E, f(x)\leqslant c\}$ 可简写为 $E(f(x)\leqslant c)$.

以后, 若无特别声明, 所有函数均为实值函数.

1.1.2 集合运算

1. (任意) 无限交和并运算

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为**集族**, 即 Γ 为集合, 对任意 $\alpha\in\Gamma$, A_α 是集合. 集合

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x|存在\alpha\in\Gamma使得x\in A_\alpha\}$$

和

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x|对任意\alpha\in\Gamma, x\in A_\alpha\}$$

分别称为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的**并**和**交**.

例 1.1.1 设 f,g 为定义于集合 E 上函数. 对任意 $c\in\mathbf{R}$,

$$h(x)=\max\{f(x),g(x)\}, x\in E.$$

则

$$\{x|h(x)>c\}=\{x|f(x)>c\}\bigcup\{x|g(x)>c\}.$$

证明 对任意 $x\in E$,

$$\begin{aligned}
x\in\{x|h(x)>c\}\quad &当且仅当\quad h(x)=\max\{f(x),g(x)\}>c\\
&当且仅当\quad f(x)>c或者g(x)>c\\
&当且仅当\quad x\in\{x|f(x)>c\}或者x\in\{x|g(x)>c\}\\
&当且仅当\quad x\in\{x|f(x)>c\}\bigcup\{x|g(x)>c\}.
\end{aligned}$$

从而结论成立. □

例 1.1.2 $(a,b)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\dfrac{1}{n},b-\dfrac{1}{n}\right]$, $[a,b]=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(a-\dfrac{1}{n},b+\dfrac{1}{n}\right)$. 上面两个等式中如果对某个 n 出现区间的左端点大于右端点的情况, 就将这一“区间”理解为空集.

证明 设 $x \in (a,b)$, 则 $a < x < b$. 从而由

$$a = \inf\left\{a+\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbf{Z}_+\right\} < x,$$

知有 $N_1 \in \mathbf{Z}_+$ 使得 $a + \frac{1}{N_1} < x$. 同理, 有 $N_2 \in \mathbf{Z}_+$ 使得 $x < b - \frac{1}{N_2}$. 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $x \in \left[a+\frac{1}{N}, b-\frac{1}{N}\right]$, 从而 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$.

反之, 若 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$, 设 $x \in \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$, 对某个 n 成立, 因为 $\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \subset (a,b)$, 从而 $x \in (a,b)$. 这就证明了第一个等式.

对任意 n, 显然, $[a,b] \subset \left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right)$, 从而

$$[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right).$$

反之, 设 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right)$, 则对任意 $n \in \mathbf{Z}_+$, 都有

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n},$$

于是, 由

$$a = \sup\left\{a-\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbf{Z}_+\right\} \leqslant x \leqslant \inf\left\{b+\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbf{Z}_+\right\}$$

即知 $x \in [a,b]$. 这就证明了第二个等式. □

例 1.1.3 $\{x|f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x|f(x) > \frac{1}{n}\right\}$.

证明和例 1.1.2 类似, 从略.

2. 差集和补集

设 A, B 为集合, 令 $A \setminus B = \{x \in A且x \notin B\}$, 称为 A 和 B 的**差集**.

设 X 为非空集合, $A \subset X$, 则 $X \setminus A$ 称为 A 在 X 中的**补集**. 当不会引起混淆时, 补集 $X \setminus A$ 简记为 A^{c}.

由定义易证下述定理:

定理 1.1.1 (De Morgan 公式) 设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 为 X 中的子集族. 则

(1) $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$.

(2) $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$.

证明 只证 (1). 对任意 $x\in X$, 设 $x\in(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c$, 则 $x\notin(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)$, 因此对任意 $\alpha\in\Gamma$, $x\notin A_\alpha$. 于是 $x\in A_\alpha^c$ 对任意 $\alpha\in\Gamma$ 成立. 从而 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$. 这就证明了 $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)^c\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$.

以上证明过程是可逆的. 因此反面的包含也成立. □

下面是几个通过已知集合以及集合运算表示待定集合的例子.

例 1.1.4 设 $\{f_n\}$ 为定义于集合 E 上的函数列, $x\in E$. 则

$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 为有界序列 $\Leftrightarrow$ 存在 $M\in\mathbf{R}_+$ 使得 $|f_n(x)|\leqslant M$ 对任意 n 成立. 从而

$$A=\{x\in E|f_n(x)\text{有界}\}=\bigcup_{M\in\mathbf{R}}\bigcap_{n=1}^\infty\{x\in E||f_n(x)|\leqslant M\},$$

$$A^c=\{x\in E|f_n(x)\text{无界}\}.$$

例 1.1.5 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为定义于集合 E 上的函数列, 同例 1.1.4, 可知 f_n 收敛于 0 的点构成的集合为

$$A=\{x\in E|\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0\}=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbf{R}_+}\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N+1}^\infty\{x||f_n(x)|<\varepsilon\},$$

$$A^c=\bigcup_{\varepsilon\in\mathbf{R}_+}\bigcap_{N=1}^\infty\bigcup_{n=N+1}^\infty\{x\in E||f_n(x)|\geqslant\varepsilon\}.$$

例 1.1.6 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的函数. 由连续函数的 ε-δ 语言可知 f 的连续点集合为

$$\begin{aligned}A&=\bigcap_{\varepsilon\in\mathbf{R}_+}\bigcup_{\delta\in\mathbf{R}_+}\{x\in\mathbf{R}|f((x-\delta,x+\delta))\subset(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)\}\\&=\bigcap_{m=1}^\infty\bigcup_{n=1}^\infty\left\{x\in\mathbf{R}|f\left(\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)\right)\subset\left(f(x)-\frac{1}{m},f(x)+\frac{1}{m}\right)\right\}.\end{aligned}$$

例 1.1.4～例 1.1.6 的讨论当中, 使用了由已知集合通过集合运算表示待研究集合的方法, 这一方法是实变函数论中的基本研究方法. 由上面几个例子的讨论可以看出, 集合的“并运算”相当于“存在一个”, “交运算”相当于“对所有的”, 而“补运算”相当于“否定”.

3. 集合的直积

如果 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为集合, 定义 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 为

$$\{(x_1,x_2\cdots,x_n)|x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ 称为 $\{A_i\}$ 的有限**直积**(**笛卡儿直积**).

类似地, 可以定义一列集合 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 的无限直积为

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(x_1,x_2,\cdots)|x_i\in A_i, i=1,2,\cdots\}.$$

当所有 A_i 相等时, 令 $A_i=A$, 则上述有限和无限直积可分别简记为 A^n 以及 A^∞.

例如, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2, \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^3$. $\mathbf{R}^\infty$ 为全体实数序列构成的集合.

4. 映射

设 X,Y 为非空集合, $f:X\to Y$ 为一个对应法则, 即 $\forall x\in X$, 有唯一的 $y=f(x)\in Y$ 与之对应, 则称 f 为 X 到 Y 的一个**映射**. X 到 Y 的映射全体用 Y^X 表示.

如果 $A\subset X, B\subset Y$, 则

$$f(A)=\{f(x)|x\in A\}\text{和}f^{-1}(B)=\{x\in X|f(x)\in B\}$$

分别称为 A 在 f 下的**像**和 B 在 f 下的**原像**(**或逆像**). $f(X)$ 称为 f 的**值域**.

如果当 $x_1\neq x_2$ 时, $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 为**单射**; 如果对每个 $y\in Y$, 有 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$, 则称 f 为**满射**. 既单又满的映射称为**双射**.

映射的基本性质

命题 1.1.1 (1) $A\subset f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B))\subset B$.

(2) $f(A_1\bigcup A_2)=f(A_1)\bigcup f(A_2), f^{-1}(B_1\bigcup B_2)=f^{-1}(B_1)\bigcup f^{-1}(B_2)$.

(3) $f(A_1\bigcap A_2)\subset f(A_1)\bigcap f(A_2), f^{-1}(B_1\bigcap B_2)=f^{-1}(B_1)\bigcap f^{-1}(B_2)$.

(4) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$.

证明 (1) $\sim$ (3) 由定义易证.

(4) $\forall x \in X, x \in f^{-1}(B^{\mathrm{c}}) \Leftrightarrow f(x) \in B^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^{\mathrm{c}}$.

命题 1.1.1 是实变函数论中经常用到的映射性质, 应当熟练掌握.

设 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ 为映射, 则由 $h(x) = g(f(x))$ 定义的映射称为 f 和 g 的复合映射, 记为 $g \circ f$.

命题 1.1.2 对任意 $C \subset Z$, 有 $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

5. 幂集和特征函数

设 X 为集合, $\mathscr{P}(X) = \{A | A \subset X\}$ 称为 X 的**幂集**, 它是由 X 的所有子集构成的集合.

一般地, 当 X 为有限集合时, 设 X 中有 n 个元素, 则 $\mathscr{P}(X)$ 中含有 2^n 个元素. 例如, 若 $X = \{1, 2\}$, 则 $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, X\}$.

设 X 为非空集合, $A \subset X$, 定义映射 χ_A 如下:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

称 χ_A 为 A 的**特征函数**.

令 $2 = \{0, 1\}$, 则 χ_A 可以看成 X 到 2 的映射, 用 2^X 表示 X 到 $2 = \{0, 1\}$ 的映射全体构成的集合, 即 $\chi_A \in 2^X$, 从而 $\rho(A) = \chi_A$ 定义了一个映射 $\rho: \mathscr{P}(X) \to 2^X$.

命题 1.1.3 对任意集合 X, 上述映射 ρ 为双射.

证明 首先, 对任意 $A, B \subset X$, 若 $A \neq B$, 不妨设有 $x \in A \setminus B$, 则 $x \in A, x \notin B$, 从而 $\chi_A(x) = 1 \neq 0 = \chi_B(x)$, 即 $\chi_A \neq \chi_B$, ρ 为单射.

反之, 任给一个映射 $f: X \to 2$, 易知 f 是 $A = \{x \in X | f(x) = 1\}$ 的特征函数, 从而 ρ 为满射. □

6. 集合列的上下极限

设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为集合列, 则 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**上极限**定义为

$$\limsup_{n \to +\infty} A_n = \{x | x \in A_n 对无限个 n 成立\};$$

其**下极限**定义为

$$\liminf_{n \to +\infty} A_n = \{x | x \in A_n 当 n 充分大时成立\}.$$