



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学 微积分

(第二版)上册

上海交通大学数学科学学院
微积分课程组

编

高等教育出版社

普通高等教育 十一五 国家级规划教材

大学数学 微积分

Weijifen

(第二版)

上册

上海交通大学数学科学学院
微积分课程组 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“大学数学”系列教材之一,结合上海交通大学高等数学课程多年的教学实践,对第一版教材在内容取舍、习题配置上都做了改进。

本书注重微积分的思想和方法,重视概念和理论的阐述与分析。结合教材内容,适当介绍了一些历史知识,指出微积分发展的背景和线索,以提高读者对微积分的兴趣和了解;重视各种数学方法的运用和解析,如分析和综合法、类比法、特殊到一般法、数形结合法等;探索在微积分中适度渗入一些现代数学的思想和方法。

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、积分、微分方程等6章。在内容的安排和阐述上力求朴素明了,深入浅出。例题精心选择,类型丰富,由易到难,解法中融入了各种数学基本方法且加以分析,有助于读者领会和掌握各种数学思维方法,有利于读者自学。同时配以丰富的习题,易难结合,帮助读者通过练习巩固和提高微积分的知识和方法。

本书适用于高等学校理工类各专业,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.微积分.上册/上海交通大学数学科学学院微积分课程组编.--2版.--北京:高等教育出版社,2016.8

ISBN 978-7-04-045987-6

I. ①大… II. ①上… III. ①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 IV. ①O13②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 176456 号

策划编辑 张彦云

责任编辑 张彦云

封面设计 张楠

版式设计 马敬茹

插图绘制 尹文军

责任校对 杨凤玲

责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印刷 北京市鑫霸印务有限公司

开本 787mm×960mm 1/16

印张 25

字数 450千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>

<http://www.hepmall.com>

<http://www.hepmall.cn>

版次 2008年6月第1版

2016年8月第2版

印次 2016年8月第1次印刷

定价 38.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 45987-00

第二版前言

本书自 2008 年初版以来,一直作为上海交通大学本科高等数学课程的主教材,另外其他高校也有部分师生选用此教材作为微积分教学的参考书。从多年的教学实践所得到的反馈意见表明,本书阐述严谨、分析透彻、例题典型,符合上海交通大学“起点高、基础厚、要求严”的教学定位,但也存在一些需要修改的问题。为更加适应教学的实际需求,此次再版基本上保持了第一版的结构和特点,主要改动包括以下几个方面:

(1) 对某些章节的内容阐述做了简化,主要涉及极限存在性和函数可积性理论的相关内容;

(2) 对习题做了适当增删,增加了题目的类型,删除某些过难的证明题;

(3) 对原书中的一些错误做了订正。

第二版修订工作由乐经良、王承国、何铭、王铭和陈克应完成。编写得到了上海交通大学数学科学学院的支持,广大教师也提出了许多宝贵的意见和建议。在此一并表示感谢。

虽经修改,本书中的缺点和不足之处在所难免,敬请同行和读者不吝指正。

编者

2016.6

第一版前言

高等数学(或微积分)课程一直是高等院校最重要的基础课。课程不仅传授学生在专业学习中所需的数学知识,同时在培养学生的理性思维、科学审美和使用科学语言方面有着不可替代的作用。

上海交通大学是一所历史悠久的研究型综合性大学,尤以理工经管科见长,主要培养综合素质高、实践能力强、富有创新精神的各类管理、科研和工程技术人才,有着“起点高、基础厚、要求严”的教学传统。高等数学作为一门重要的基础课,始终继承了这一传统。

本教材是在上海交通大学高等数学课程建设和教学改革的基础上形成的,同时也是对原有教材《微积分》多年使用实践的总结和提高。其主要特点是:

1. 特别注重对微积分的基本思想和基本方法的阐述,尽可能突出极限、导数和积分等重要概念,努力从多种视角解释这些数学概念的背景、内涵以及它们之间的有机联系。

2. 在教材中适度渗入现代数学观点和表达形式,例如在多元部分采取向量表示指出二维格林公式和三维高斯公式具有相同表达形式,从而揭示它们是微积分基本定理在多元情况下的推广、指出线性微分方程解集合具有线性空间结构等以及某些数学符号的采用都是这方面的尝试。

3. 在概念的引入、定理的推演和问题的分析中有意识地介绍一些常用数学方法,包括数形结合的方法、类比的方法、构造辅助函数的方法和由特殊到一般的方法等,并给予适当点评以凸显这些方法。

4. 对微积分的各部分内容的应用予以充分的重视,从导数到积分,直至微分方程均给出了较多的应用实例,并尝试将数学建模的思想融入其中。

5. 教材选择了大量例题,并对解决它们的思路和方法做出一定的分析,各种典型例题的介绍有助于对微积分基本方法乃至一般数学方法的领会和掌握。

虽然本教材从整体框架而言保持了传统微积分的基本内容和结构,但是上述特点体现了编者在高等数学课程改革方面的一些思考与探索,同时教材也反映了上海交通大学高等数学课程的特色和定位。

本书符合由教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。参考教学时数为 162~180 学时,标以“*”的个别小节或内容在教学中可视实际情况选用。

全书分为两册,上册为一元微积分和微分方程,下册为多元微积分与级数。

本书由乐经良主编,各章分别由乐经良、王承国、何铭、王铭和陈克应编写,全书由何铭与乐经良统稿。上海交通大学原有教材《微积分》(上海交通大学版)是本书编写的重要基础与参考材料,景继良和孙薇荣两位教授参加了原教材的编写,郑麒海等老师选编了原教材的习题,课程组许多老师对教材都提出过有益的意见或建议。

本书的编写得到上海交通大学数学系和国家工科数学教学基地的支持,也得到上海交通大学教务处的支持,高等教育出版社理工出版中心数学分社以及责任编辑认真细致的工作保证了本书的顺利出版,编者在此表示衷心的感谢。

尽管本书编者都有微积分教学的长期经验,也对本教材的编写作了反复的讨论和思考,然而对此教材的编写并不能得心应手,对许多内容的处理斟酌再三仍然未觉满意,深感这一数学基础课教材编写之不易。限于编者水平,加上时间仓促,本书中的缺点乃至错误之处势必难免,敬请国内同行和读者批评指正。

编 者

2008.4

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 实数集	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 逻辑符号	2
1.1.3 有理数集和实数集	2
1.1.4 区间和邻域	3
1.1.5 不等式	4
1.1.6 数集的界	5
1.2 函数	7
1.2.1 函数的概念	7
1.2.2 函数的运算	11
1.2.3 函数的简单性质	15
1.2.4 初等函数	17
1.2.5 双曲函数	22
1.2.6 隐函数、由参数方程或极坐标方程表示的函数	23
1.2.7 函数图形的变换	29
习题 1	31
第 2 章 极限与连续	36
2.1 数列的极限	36
2.1.1 数列	36
2.1.2 数列极限的定义	38
2.1.3 无穷小和无穷大	43
2.2 数列极限的性质和运算法则	45
2.2.1 数列极限的性质	45
2.2.2 数列极限的运算法则	49
2.3 数列极限存在的判别法	53
2.3.1 夹逼定理	53
2.3.2 单调有界数列极限存在定理	56
2.4 函数的极限	61

2.4.1	函数极限的定义	61
2.4.2	函数极限的性质、运算法则和判别法	69
2.4.3	两个重要的函数极限	75
2.4.4	无穷小的比较	77
2.5	函数的连续性	81
2.5.1	函数连续的定义	81
2.5.2	函数间断点的分类	83
2.5.3	连续函数的运算	86
2.5.4	初等函数的连续性	87
2.6	闭区间上连续函数的性质	88
	习题 2	92
第 3 章	导数与微分	100
3.1	导数的概念	100
3.1.1	典型例子	100
3.1.2	导数的定义	102
3.1.3	可导与连续的关系	108
3.2	微分	110
3.2.1	微分的概念	110
3.2.2	微分与导数的关系	111
3.2.3	微分的几何意义	112
3.2.4	微分应用于近似计算及误差估计	113
3.3	导数与微分的运算法则	116
3.3.1	导数的四则运算法则	116
3.3.2	复合函数的导数	119
3.3.3	反函数的导数	123
3.3.4	基本导数和微分公式表	125
3.4	隐函数与参数方程求导法	127
3.4.1	隐函数的导数	127
3.4.2	由参数方程所确定的函数的导数	129
3.5	导数概念在实际问题中的应用	131
3.5.1	一些学科中的变化率问题举例	132
3.5.2	相关变化率	134
3.6	高阶导数	136
3.6.1	高阶导数的概念	136

3.6.2 高阶导数运算法则和莱布尼茨公式	139
3.6.3 隐函数的高阶导数和参数方程表示的函数的高阶导数	141
习题 3	142
第 4 章 微分中值定理与导数的应用	152
4.1 微分中值定理	152
4.1.1 费马定理	152
4.1.2 罗尔定理	154
4.1.3 拉格朗日定理	158
4.1.4 柯西定理	162
4.1.5 导函数的两个性质	163
4.2 洛必达法则	166
4.3 泰勒公式及其应用	172
4.3.1 泰勒定理	172
4.3.2 一些简单函数的麦克劳林公式	176
4.3.3 泰勒公式的应用	179
4.4 利用导数研究函数性态	181
4.4.1 函数的单调性	181
4.4.2 函数的极值和最值	185
4.4.3 函数的凸性与拐点	189
4.4.4 函数图形的描绘	193
4.5 平面曲线的曲率	198
4.5.1 曲线弧长概念及其微分	199
4.5.2 曲率和曲率公式	200
4.6 方程的近似解	203
4.6.1 二分法	204
4.6.2 牛顿切线法	205
习题 4	208
第 5 章 积分	217
5.1 定积分的概念	217
5.1.1 典型实例	217
5.1.2 定积分的定义	220
5.1.3 函数可积的充分条件	222
5.2 定积分的性质	224
5.2.1 定积分的运算性质	225

5.2.2	积分中值定理	229
5.3	微积分基本定理	232
5.3.1	原函数与变上限积分	232
5.3.2	牛顿-莱布尼茨公式	236
5.4	不定积分	239
5.4.1	不定积分的概念和性质	239
5.4.2	基本积分表	241
5.4.3	第一换元法	242
5.4.4	第二换元法	244
5.4.5	分部积分法	247
5.4.6	几类常见函数的不定积分	251
5.5	定积分的计算	257
5.5.1	定积分的换元法	258
5.5.2	定积分的分部积分法	263
5.5.3	定积分的综合例题	266
5.5.4	定积分的近似计算	271
5.6	定积分的应用	274
5.6.1	微元法	275
5.6.2	定积分的几何应用	276
5.6.3	定积分的物理应用	286
5.7	反常积分	290
5.7.1	无穷区间上的反常积分	290
5.7.2	无界函数的反常积分	293
	习题 5	298
第 6 章	微分方程	310
6.1	微分方程的基本概念	310
6.2	一阶微分方程	312
6.2.1	可分离变量方程	313
6.2.2	齐次微分方程和其他可化为可分离变量形式的方程	316
6.2.3	一阶线性微分方程	320
6.3	某些可降阶的高阶微分方程	323
6.4	线性微分方程解的结构	326
6.4.1	二阶线性齐次微分方程解的结构	327
6.4.2	二阶线性非齐次方程解的结构	329

6.5 常系数线性微分方程	332
6.5.1 常系数线性齐次方程	332
6.5.2 常系数线性非齐次方程	335
6.5.3 欧拉方程	342
6.6 微分方程的数值解	344
6.7 微分方程的应用举例	347
习题 6	357
部分习题参考答案	363

第 1 章 函 数

函数是数学最基本的概念,也是微积分研究的主要对象.

函数概念是随着人类社会生产力发展而产生并逐步形成的,它反映了变量之间的依赖关系.使用函数一词始于德国数学家莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716),虽然他没有给出函数的定义;而函数的记号 $f(x)$ 则是由瑞士数学家欧拉(Euler, 1707—1783)引进的.然而在相当长的时期内数学家都认为函数是由一个解析表达式所给出的,直至 1837 年才由德国的狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)首先给出接近现代概念的函数定义.

本书中的函数都是在实数范畴内变化的.这一章我们首先介绍有关实数集的基本概念和一些性质;继而讨论函数的概念及其一般性态,同时对基本初等函数的性质概括地做一些回顾.本章的内容是初等数学某些知识的复习、总结和提高,也是学习微积分的基础.

1.1 实 数 集

1.1.1 集 合

一些事物组成的整体称为集合,而集合中的每个事物称为这集合的元素.通常把具有某种属性的事物放在一起组成一个集合.

表示一个集合可以通过列出它所有元素的方式(枚举法),例如自然数集

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

整数集

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n, \dots\};$$

也可以通过描述集合中元素的属性的方式(属性法),常写为 $\{x \mid \text{使 } x \text{ 属于该集合的性质}\}$,例如方程 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ 所有的根组成的集合可表示为

$$A = \{x \mid x^4 - 10x^2 + 9 = 0\}.$$

若 a 是集合 A 中的元素,则称 a 属于 A ,记为 $a \in A$;若 a 不是集合 A 中的元素,则称 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$.

若集合 A 中每一个元素都属于集合 B , 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$, 此时我们也称 A 包含于 B 或 B 包含 A .

例如, 自然数集 \mathbf{N} , 正整数集 \mathbf{N}_+ , 整数集 \mathbf{Z} 之间有如下包含关系:

$$\mathbf{N}_+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}.$$

集合之间可以定义其他一些运算, 例如, 集合的并集、交集、差集等, 这在初等数学里已经介绍过, 这里不再一一列举了.

1.1.2 逻辑符号

在数学概念和命题的论述中, 经常使用以下一些逻辑符号.

符号“ \forall ”表示“对任意给定的”(for any given), 它是 Any 的第一个字母 A 的倒写, 符号“ \exists ”表示“存在”(exist), 它是 Exist 的第一个字母 E 的反写.

例如命题“对任意给定的正整数 n , 存在整数 m , 使得 $n+m=0$ ”用上述逻辑符号可以表述为:

$$\forall n \in \mathbf{N}_+, \exists m \in \mathbf{Z}, \text{使得 } n+m=0.$$

符号“ \Rightarrow ”表示“蕴涵着”或“推导出”, 符号“ \Leftrightarrow ”表示“等价于”或“充要条件是”.

例如命题“若 $a>b, b>c$, 则有 $a>c$ ”用逻辑符号可以表述为:

$$a>b, b>c \Rightarrow a>c;$$

“ $x^2-x-2 \leq 0$ 等价于 $-1 \leq x \leq 2$ ”用逻辑符号可以表述为:

$$x^2-x-2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

1.1.3 有理数集和实数集

有理数集 \mathbf{Q} 定义为

$$\mathbf{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}_+, \text{且 } p, q \text{ 互质} \right\}.$$

有理数集 \mathbf{Q} 有一些重要性质:

\mathbf{Q} 是一个数域, 即任意两个有理数进行加、减、乘、除 (零不为除数) 运算的结果仍为有理数, 或者说有理数集对于四则运算是封闭的.

$\forall a, b \in \mathbf{Q}$, 下列关系有且仅有一个成立:

$$a < b, a > b, a = b;$$

我们常用 $a \leq b$ 表示 $a < b$ 或 $a = b$, 于是 $\forall a, b \in \mathbf{Q}$, 则 $a \leq b$ 与 $a > b$ 两者必居其一, 即有理数是有序的.

任意两个不同的有理数之间必定还存在有理数, 即: $\forall a, b \in \mathbf{Q}, a < b, \exists c \in \mathbf{Q}$, 使得 $a < c < b$. 由此可推知任意两个不同的有理数间存在无穷多个有理数, 这个

性质称为有理数的稠密性.

有理数可以与数轴上的点对应,每个有理数对应于数轴上一点(有理点).稠密性意味着数轴上任何一小段内都有无穷多个有理点.

然而有理点并不能充满整个数轴,换言之,在有理点间有着“空隙”.例如,若边长为 1 的正方形对角线的长度为 a ,则 $a^2=2$,用反证法可以证明 a 不是有理数.若在数轴上作出到原点距离等于 a 的点 A (图 1.1),那么数轴上这个点 A 就不是有理点,故有理点在实数轴上稠密但之间有空隙.我们将数轴上有理点之外的点称为无理点,它们对应无理数.可以证明任何两个不同的有理数之间都存在无理数.因而无理点在数轴上也是稠密的,即数轴上任何一小段内都有无穷多个无理点.

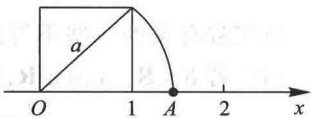


图 1.1

我们定义实数集 \mathbf{R} 为有理数集和无理数集的并集.

实数集 \mathbf{R} 仍然是一个数域,即它对四则运算是封闭的.显然实数也是有序的并且有着稠密性.

实数与数轴上的点是一一对应的,即每个实数对应数轴上一个点;反过来,数轴上每个点也对应一个实数.这意味着与实数对应的点(有理点和无理点)充满了整个数轴,没有空隙,没有间断,这个性质称为实数的连续性.

实数的连续性将保证实数集在以后所学的微积分基本运算——极限运算下依然是封闭的.

我们知道实数与数轴上点的对应是通过点的坐标来实现的,在以后的讨论中往往对实数和它所对应数轴上的点不加区别,例如数轴上点的坐标为 x ,我们常说点 x 或数 x .

1.1.4 区间和邻域

实数集 \mathbf{R} 的子集称为数集,一类常见的数集就是区间,例如

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}, \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}, \quad [a, b) = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b, x \in \mathbf{R}\}, \quad (-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

前两个区间分别称为开区间,闭区间,第三、四个区间称为半开半闭区间,它们都是有限区间,最后三个区间是无限区间,其中符号“ $+\infty$ ”、“ $-\infty$ ”分别读作“正无穷大”、“负无穷大”.

对于非特定的区间,经常用字母 I 表示.

区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为实数 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0, \delta)$, 而 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0,$

$x_0 + \delta$) 称为实数 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 其中实数 $\delta > 0$. x_0 和 δ 分别称为邻域的中心和半径, 而在不必强调邻域半径大小时, 则将邻域和去心邻域简记为 $U(x_0)$ 和 $\dot{U}(x_0)$.

有时需要考察点 x_0 一侧的小区间, 将 $(x_0 - \delta, x_0]$ 、 $[x_0, x_0 + \delta)$ 分别称为 x_0 的左、右 δ 邻域, 相应地也可以有 x_0 的左、右去心 δ 邻域的概念.

1.1.5 不等式

与实数有关的一些不等式是重要的, 首先我们回忆与绝对值有关的不等式:

(1) 若 $\delta \in \mathbf{R}_+$, $x, a \in \mathbf{R}$, 则

$$|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta;$$

(2) 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 则

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x \pm y| \geq ||x| - |y||.$$

下面介绍两个重要的不等式以及一个很重要的数学方法“数学归纳法”.

命题 1.1 (A-G 不等式, 即“正数的算术平均值不小于它们的几何平均值”)

若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$, 则

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

证 记 $A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, $n \in \mathbf{N}_+$.

用数学归纳法证明如下:

(1) 当 $n=1$ 时, $A_1 = x_1 = G_1$, 故 $A_1 \geq G_1$ 成立;

(2) 假设当 $n=k$ 时结论成立, 即 $A_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} = G_k$; 则当

$n=k+1$ 时:

由于 x_1, x_2, \dots, x_{k+1} 中必有最大正数, 不妨设为 x_{k+1} , 则有

$$A_{k+1} = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} = \left(\frac{kA_k + x_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} = \left(A_k + \frac{x_{k+1} - A_k}{k+1} \right)^{k+1},$$

利用二项式展开可得

$$A_{k+1}^{k+1} \geq A_k^{k+1} + C_{k+1}^1 A_k^k \left(\frac{x_{k+1} - A_k}{k+1} \right) = A_k^{k+1} + A_k^k x_{k+1} - A_k^{k+1}$$

$$= A_k^k x_{k+1} \geq G_k^k x_{k+1} = x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} = G_{k+1}^{k+1},$$

即得 $A_{k+1} \geq G_{k+1}$.

由(1)、(2)得到: $\forall n \in \mathbf{N}_+, A_n \geq G_n$ 成立. 命题得证.

命题 1.2 (伯努利 (Bernoulli) 不等式) 若 $x \geq 0, n \in \mathbf{N}$, 则

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

这个命题的证明比较简单, 留给读者作为练习.

1.1.6 数集的界

对实数集, 我们引进有界的概念.

定义 1.1 对非空实数集 $E \subset \mathbf{R}$,

(1) 若 $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in E$, 有

$$x \leq M,$$

则称 E 是有上界的, 称 M 是 E 的一个上界;

(2) 若 $\exists m \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in E$, 有

$$x \geq m,$$

则称 E 是有下界的, 称 m 是 E 的一个下界;

(3) 若 E 既有上界又有下界, 则称 E 为有界的. 此时, \exists 实数 $\bar{M} > 0$, 使得 $\forall x \in E$, 有 $|x| \leq \bar{M}$, \bar{M} 称为数集 E 的一个界.

例如, 自然数集 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 0 或任何一个负数都是它的下界, 但它无上界, 所以它是无界的. 而对集合 $A = \{x \mid x^2 < 2, x \in \mathbf{R}\}$, 有 $|x| < \sqrt{2} (\forall x \in A)$, 所以集合 A 是有界的, $\sqrt{2}$ 是它的界, 而 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 分别是它的上界和下界.

显然, 若一个数集有上界, 则其就有无穷多个上界. 事实上, 若 M 是集合 E 的一个上界, 那么 M 加上任何正数 c 的和 $M+c$ 仍是 E 的上界. 在这些上界中有一个具有特别重要的作用, 那就是上确界.

定义 1.2 设非空数集 $E \subset \mathbf{R}$, 若 $\exists \beta \in \mathbf{R}$ 满足:

(1) $\forall x \in E$, 有 $x \leq \beta$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E$, 使得 $x_\varepsilon > \beta - \varepsilon$,

则称 β 是 E 的上确界, 记为

$$\beta = \sup E.$$

上确界的定义包含了两层意思: (1) β 是 E 的上界, (2) 任何小于 β 的数 ($\beta - \varepsilon$) 都不是 E 的上界; 因此上确界 β 是 E 的最小上界.

类似地可以定义非空数集 E 的最大下界, 即下确界 $\alpha = \inf E$. 读者可根据上述定义用类似的方法 (即类比法) 自己给出定义.

上确界和下确界统称为确界.

若一个数集 E 中存在最大的数 b , 记为 $b = \max E$, 显然 b 就是 E 的上确界;