理论力学习题选集

上海市业余工业大学力

海

前　　言

本习题选集是在上海市力学学会、力学教学组的倡议下，为适应目前理论力学的教学需要而编集的参考书籍。习题主要选编于美国目前较为普遍采用的一些理论力学教材。

全书分十六章，每章习题前有内容提要和例题，其中共有例题100题，习题70[illegible]生参考。

本习题选集由上海市业余工业大学力学教研室集体编写。其中最后两章由[illegible]亭同志参加编写。在编写的过程中得到了上海交通大学[illegible]先生的不少指导和帮助，在此一并表示感谢。

由于时间仓促，经验不足，缺点和错误在所难免，希望大家批评、指正。

编　者

1980年3月

第 一 章　平面力系 …………………………………………………………(1)
第 二 章　空间力系 …………………………………………………………(39)
第 三 章　摩　擦 ……………………………………………………………(81)
第 四 章　重　心 ……………………………………………………………(112)
第 五 章　点的运动 …………………………………………………………(135)
第 六 章　刚体的运动 ………………………………………………………(164)
第 七 章　动力学基本方程 …………………………………………………(243)
第 八 章　动量定理 …………………………………………………………(271)
第 九 章　动量矩定理 ………………………………………………………(295)
第 十 章　动能定理 …………………………………………………………(323)
第十一章　转动惯量 …………………………………………………………(363)
第十二章　碰　撞 ……………………………………………………………(380)
第十三章　达伦培尔原理 ……………………………………………………(402)
第十四章　振　动 ……………………………………………………………(441)
第十五章　虚位移原理和动力学普遍方程 …………………………………(475)
第十六章　拉格朗日方程 ……………………………………………………(506)

第一章　平面力系

提要：

（一）平面力系的简化：

（1）一般情况下，平面力系向刚体内任选一点O（称简化中心）简化可得一个力$\overrightarrow{R}_0$和一个力偶M_0，该力作用于简化中心，其大小方向等于该力系的主矢，该力偶的矩等于力系对简化中心的主矩。

平面力系各力的矢量和称为该力系的主矢。

其数学表达式为：

$$\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2+\overrightarrow{F}_3+\cdots\cdots+\overrightarrow{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F}_i$$

平面力系各力对简化中心O点力矩的代数和称为该力系的主矩。

其数学表达式为：

$$m_0(\overrightarrow{F}_1)+m_0(\overrightarrow{F}_2)+\cdots\cdots+m_0(\overrightarrow{F}_n)=\sum_{i=1}^{n}m_0(\overrightarrow{F}_i)$$

当简化中心改变时，主矢的大小和方向不变，即主矢与简化中心的选择无关，而主矩则与简化中心的选择有关。

这样，如用分析式来表示$\overrightarrow{R}_0$和M_0，则$\overrightarrow{R}_0$的大小和方向为：

$$R_0=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}$$

---

* 本书图中粗体字均为矢量以下同

$$\cos(\vec{R}_0, x) = \frac{\Sigma F_x}{R_0}, \quad \cos(\vec{R}_0, y) = \frac{\Sigma F_y}{R_0}$$

而M_0的大小和转向为：$M_0 = \Sigma m_0(\vec{F})$

（2）简化后可能得到的几种结果

（a）$\vec{R}_0 \neq 0$，$M_0 = 0$，　力系简化为一合力$\vec{R}_0$，其作用线通过简化中心。

（b）$\vec{R}_0 = 0$，$M_0 \neq 0$。力系简化为一个力偶M。

（c）$\vec{R}_0 \neq 0$，$M_0 \neq 0$。力系可进一步简化为一个合力$\vec{R}$，它的作用线到简化中心的距离$d = \dfrac{M_0}{R_0}$

（d）$\vec{R}_0 = 0$，$M_0 = 0$。　力系平衡。

（二）平面力系的平衡方程：

(1) 平面力系的平衡方程为：

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma m_0(\vec{F}) = 0$$

如平面力系中所有各力都汇交于一点称平面汇交力系，其平衡方程为：

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0$$

如平面力系中所有各力都相互平行称平行力系，其平衡方程为：

$$\Sigma F_y = 0; \quad \Sigma m_0(\vec{F}) = 0$$

平面力系的平衡方程还可以有其它两种形式：

（2） $\Sigma m_A(\vec{F})=0$，　$\Sigma m_B(\vec{F})=0$　$\Sigma F_y=0$

其中所取之 y 轴不能垂直 A，B 两矩心之连线。

（3） $\Sigma m_A(\vec{F})=0$，　$\Sigma m_B(\vec{F})=0$，　$\Sigma m_C(\vec{F})=0$，

其中三个矩心 A，B，C 不能取在一直线上。

（三）平面力系的解题步骤及注意点：

解题步骤：

（1）根据题意，确定研究对象，并把它单独画出。

（2）对研究对象进行受力分析，画出受力图。

（3）选取坐标轴及矩心，然后列出平衡方程求解。

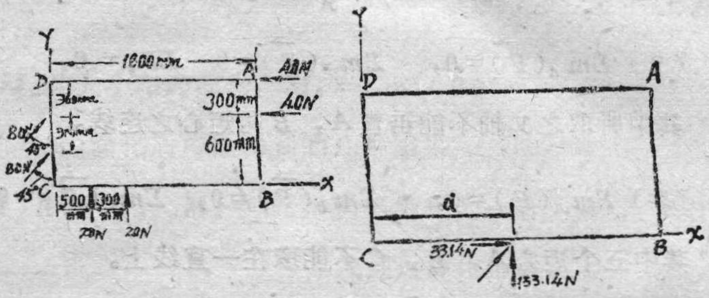
注意点：

（1） 在解物体系统问题时，研究对象应在对各单个物体及整体进行受力分析的基础上恰当选出，这样可使解题简捷、清楚。

（2）选取适当的矩心及坐标轴，使每个方程中的未知量愈少愈好，为此矩心可取在未知力较多的交点上，坐标轴尽可能与较多的未知力垂直，这样可使计算简化。

（3）根据力系类型确定平衡方程的形式，并判定是否静定可解。

例1-1，矩形板受到三个人的推力，如图所示。试求这些力的合力及其作用点在 BC 边上的位置。



例 1-1 图

解：$$\vec{R}=\Sigma\vec{F}=\Sigma F_x\vec{i}+\Sigma F_y\vec{j}$$

$$=[2(80\cos45^\circ)-2(40)]\vec{i}+[2(80\sin45^\circ)+2(20)]\vec{j}$$

$$=33.14\vec{i}+153.14\vec{j}$$

若取坐标轴 x y 的原点 c 为中心，则得主矩：

$$\Sigma m_c=-(80\cos45^\circ)0.3-(80\cos45^\circ)0.6+20(0.3)+20(0.6)+40(0.6)+40(0.9)=27.1(N\cdot m)$$

把主矢 $\vec{R}$ 及主矩 M_c 进一步向 B C 边上某一点简化，则得：

$$d=\frac{M_c}{R_y}=\frac{27.1}{153.14}=0.18(m)$$

例 **1-2**，小园柱体质量为 m，其两端分别与一弹簧相连，(图中只表示出一端)，它约束在处于光滑水平面上的半园柱体，如图所示。设弹簧的刚度系数为 K，原长为 R，试求当小园

柱体处于图示平衡位置时，θ 角与其它参数之关系式。

例 1-2 图

解： 研究对象：小园柱体。

画受力图：平面汇交力系。

列平衡方程：

$\Sigma F_y = 0$； $\quad -mg + N\sin 2\theta - F_{弹}\sin\theta = 0$

$$N = \frac{F_{弹}\sin\theta + mg}{\sin 2\theta} \qquad (1)$$

$\Sigma F_x = 0$； $\quad N\cos 2\theta - F_{弹}\cos\theta = 0 \quad (2)$

计算$F_{弹}$：

弹簧伸长 $\Delta l = 2R\cos\theta - R = R(2\cos\theta - 1)$

$F_{弹} = 2K\Delta l = 2KR(2\cos\theta - 1) \quad (3)$

(1)(3)代入(2)：

$$\frac{F_{弹}\sin\theta + mg}{\sin 2\theta}\cos 2\theta - F_{弹}\cos\theta = 0$$

$F_{弹}\sin\theta\cos 2\theta + mg\cos 2\theta - F_{弹}\cos\theta\sin 2\theta = 0$

$F_{弹}(\sin\theta\cos 2\theta - \cos\sin 2\theta) + mg\cos 2\theta = 0$

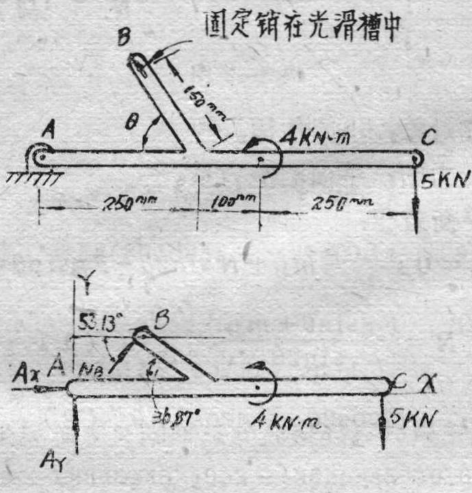
$-F_{弹}\sin\theta + mg\cos 2\theta = 0$

$-2KR(2\cos\theta - 1)\sin\theta + mg\cos 2\theta = 0$

$$-2RK\sin2\theta+2KR\sin\theta+mg\cos2\theta=0$$

$$\therefore\quad \cos2\theta-\frac{2KR}{mg}(\sin2\theta-\sin\theta)=0$$

例1-3；分叉杆如图，其上作用一5（KN）的力和一4（$KN\cdot m$）的力偶，试求当$\theta=36.87°$时，支座A及固定销子B处反力。



例 1-3 图

解：研究对象：分叉杆。

画受力图：平面一般力系。

列平衡方程：

$$\Sigma m_A=0;\ -N_B\cos53.13°(0.15\sin36.87°)$$
$$+N_B\sin53.13°(0.25-0.15\cos36.87°)$$
$$+4-5(0.6)=0\qquad(1)$$

$$\Sigma F_x=0;\ N_B\cos53.13°+A_x=0\qquad(2)$$

$$\Sigma F_y=0;\ N_B\sin53.13°+A_y-5=0\qquad(3)$$

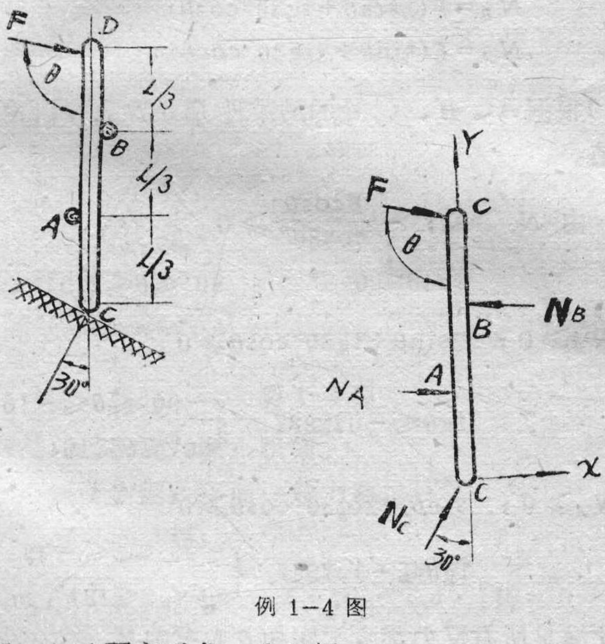
由(1)得 $N_B=-20(KN)$ 与假设方向相反。

代入(2) $A_x=12(KN)$

代入(3) $A_y=21(KN)$

例1-4：无重杆插入销子A和B之间，并静止于光滑的地面上。试求(a)用F和θ来表示所有的约束反力。

(b)讨论杆处于平衡时的θ角范围。



例 1-4 图

解：(a)研究对象：CD杆。

画受力图：平面一般力系。

列平衡方程：

$$\Sigma m_C=0;\quad -N_A(L/3)+N_B(2L/3)-F\sin\theta(L)=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_x=0;\quad N_C\sin30^\circ+N_A-N_B+F\sin\theta=0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0\;;\quad N_C\cos 30^\circ + F\cos\theta = 0 \qquad (3)$$

由(3)得 $$N_C = -\frac{F\cos\theta}{\cos 30^\circ}$$

代入(2) $$\left(-F\frac{\cos\theta}{\cos 30^\circ}\right)\sin 30^\circ + N_A - N_B + F\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

将(1)(2)联立解得；

$$N_B = F(2\sin\theta + \mathrm{tg}30^\circ\cos\theta)$$
$$N_A = F(\sin\theta + 2\mathrm{tg}30^\circ\cos\theta)$$

(*b*)根据 A、B、C 处的约束性质，N_A, N_B, N_C 不可能为负值。

由 $N_C \geqslant 0$； $-\dfrac{F\cos\theta}{\cos 30^\circ} \geqslant 0$

$\cos\theta \leqslant 0 \qquad 90^\circ \leqslant \theta \leqslant 270^\circ$

由 $N_B \geqslant 0$； $2\sin\theta + \mathrm{tg}30^\circ\cos\theta \geqslant 0$

$$\mathrm{tg}\theta \leqslant -0.2887 \quad \begin{cases} -90^\circ \leqslant \theta \leqslant -16^\circ \\ 90^\circ \leqslant \theta \leqslant 164^\circ \end{cases}$$

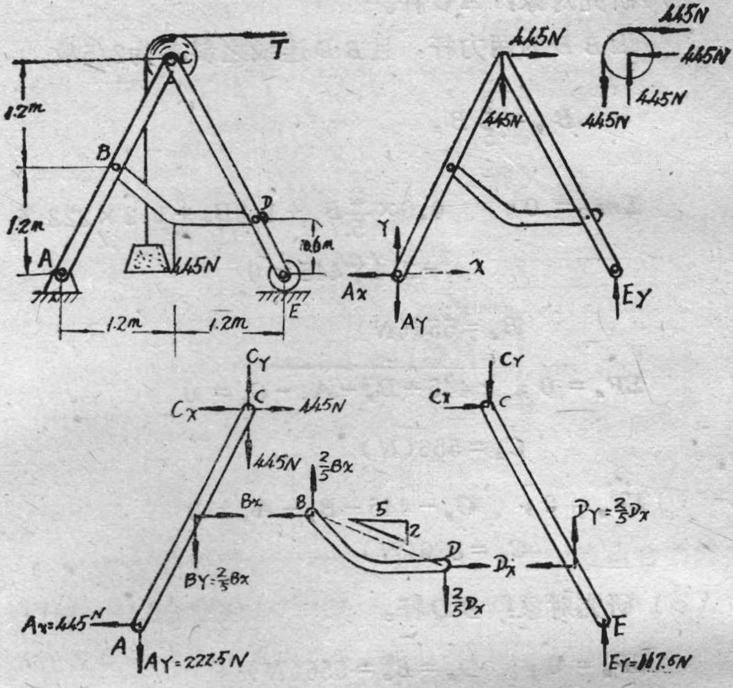
由 $N_A \geqslant 0$； $\sin\theta + 2\mathrm{tg}30^\circ\cos\theta \geqslant 0$

$$\mathrm{tg}\theta \leqslant -1.1547 \quad \begin{cases} -90^\circ \leqslant \theta \leqslant -49^\circ \\ 90^\circ \leqslant \theta \leqslant 131^\circ \end{cases}$$

因此满足所有反力都大于零的 θ 角范围是：

$$90^\circ \leqslant \theta \leqslant 131^\circ$$

例1-5，起重架的载荷和支座如图所示。如不计杆和滑轮的重量，求杆在 A、B、C、D 和 E 处所受的力。



例 1—5 图

解：（ a ）研究对象；机架。

画受力图；平面一般力系。

列平衡方程：

$$\Sigma m_A = 0；\ 2.4E_y - 1.2\times445 - 2.4\times445 = 0$$

$$E_y = 667.5(N)$$

$$\Sigma F_y = 0；\quad -A_y + E_y - 445 = 0$$

$$A_y = 222.5(N)$$

$$\Sigma F_x = 0；\quad A_x = 445(N)$$

(*b*)研究对象：*AC*杆。

因*BD*为两力杆，且*BD*连线之斜率为2/5故，

$$B_y = \frac{2}{5} B_x$$

$\Sigma m_C = 0$；　$0.6 \times \frac{2}{5} B_x + 1.2 B_x + 1.2 \times 222.5 - 2.4 \times 445 = 0$

$$B_x = 556(N)$$

$\Sigma F_x = 0$；　$445 + B_x' - A_x - C_x = 0$

$$C_x = 556(N)$$

$\Sigma F_y = 0$；　$C_y - 445 - B_y - A_y = 0$

$$C_y = 890(N)$$

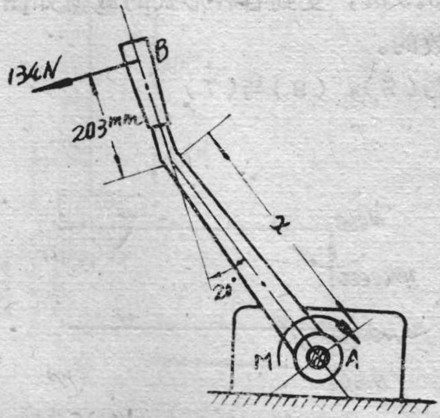
(*c*) 研究对象：*BD*杆。

$\Sigma F_x = 0$；　$D_x = B_x' = 556(N)$

$\Sigma F_y = 0$；　$D = \frac{2}{5} B_x = 222.5(N)$

1-1 操纵手柄如图，受力偶$M = 68(N \cdot m)$作用，*B*点作用134(*N*)的拉力，欲使此力和力偶之合力 通 过*A*点，求尺寸x。

答：$x = 323.8mm$

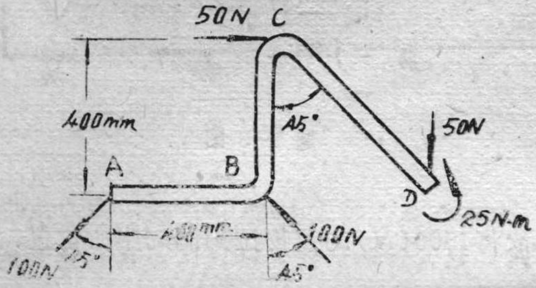


题 1—1 图

1-2 弯管受载荷如图所示。试求(*a*)这些载荷合力的大小和方向。(*b*)合力作用点在*AB*线上的位置。(*c*)合力作用点在*BC*线上的位置。

答：(*a*) $R=104(N)$，　$\theta_x=28.8°$

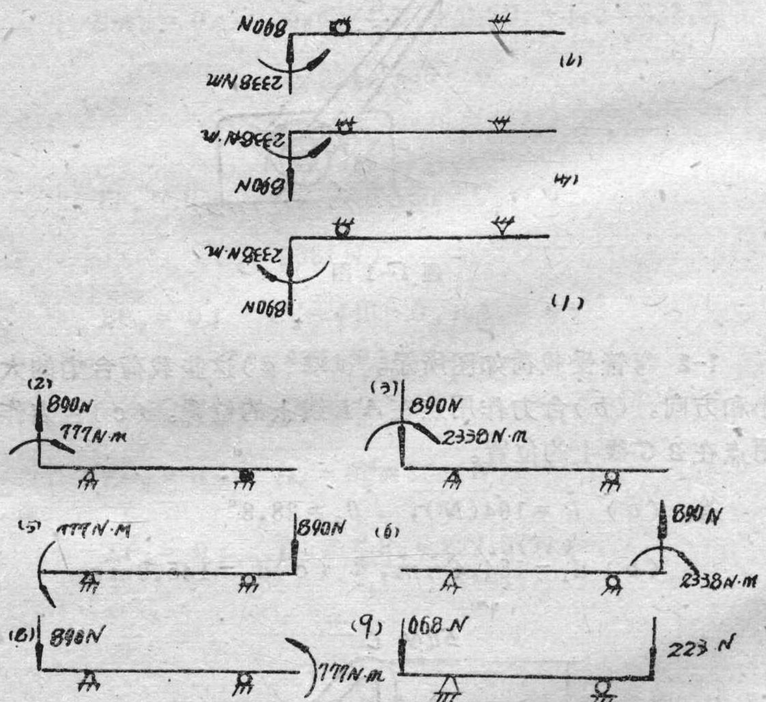
(*b*) $d_1=134.4mm$，　(*c*)$d_2=145.9mm$



题 1—2 图

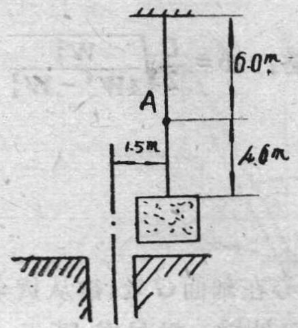
1-3 梁长 3.5 m，受到各种形式的载荷如图。试找出那两种载荷是等效的。

答：（3）与（5），（9）与（7）



题 1—3 图

1-4 欲将4500（N）的重物拉到洞的中心位置，问需在钢索上 A 点作用多大的水平力 $\overrightarrow{P}$。

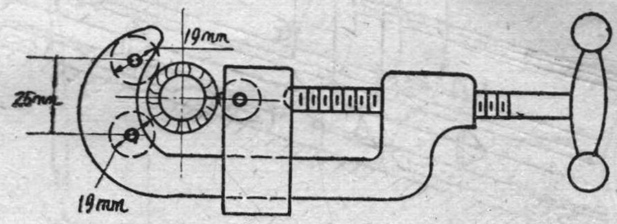


答：10662(*N*)

题 1-4 图

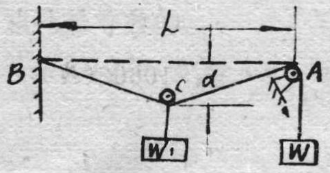
1-5 管子割刀由三个具有刀刃的轮子组成，切割时，夹紧螺杆并使割刀绕管子旋转。当切割内径为20*mm*，外径为27*mm*的管子时，在螺杆上受有4500(*N*)的压力，求直径19*mm*轮子上的销子反力。

答：2679(*N*)



题 1-5 图

1-6 滑轮*C*系一重为W_1的物体并悬挂在钢索上，钢索的一头固定在墙上*B*点，另一头通过滑轮*A*挂一重为*W*的物体，如图所示。*AB*之间的水平距离为*L*，滑轮的大小忽略不计。试用*W*，W_1及*L*表示中间下垂的距离*d*。

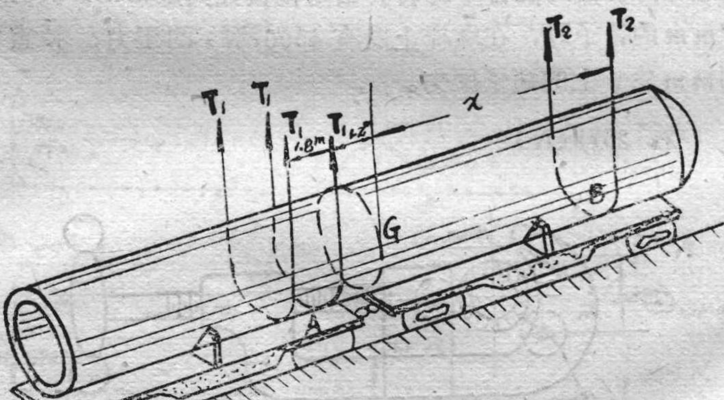


答： $d = \dfrac{L}{2}\sqrt{\dfrac{W_1^2}{4W^2 - W_1^2}}$

题 1－6 图

1-7 炼油塔重2942(KN)，重心在截面G处，欲从货车上将其吊起，在A处用两根吊索，在B处用一根吊索，若T_2之张力限制为245(KN)，求最小距离x。

答： $x = 10.5m$



题 1－7 图

1-8 重1780(N)的物体挂在AO杆上如图。BC弹簧的刚度系数$K = 2.2(N/mm)$，当$\theta = 0°$时弹簧不伸长，试求平衡位置θ角。

答： $\theta = 80.3°$