

ADVANCED
MATHEMATICS

高等学校教材

高等数学

第四版 下册

金 路 童裕孙 於崇华 张万国 编

高等教育出版社

ADVANCED
MATHEMATICS

高等学校教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

第四版 下册

金 路 童裕孙 於崇华 张万国 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是在第三版的基础上修改而成的。作者根据大量的教学信息反馈和更加深刻的教学体会,对原书作了大量的修改,并增删了部分内容,其目的是使本书更适用于大学数学基础课的实际教学过程,符合实际需要,并且使教学内容更易于学生理解和接受。本书的主要特色是以现代数学的观点审视经典的内容,科学组织并简洁处理相对成熟的素材,对分析、代数、几何等方面作了统一的综合处理,揭示数学的本质、联系和发展规律;注重数学概念的实际背景和几何直观的引入,强调数学建模的思想和方法;在适度运用严格数学语言的同时,注意论述方式的自然朴素,以便读者易于理解;配有丰富的图示、多样的例题和习题,便于学生理解和训练。

全书分上、下两册。上册包括一元微积分、线性代数、空间解析几何;下册包括多元微积分、级数、常微分方程、概率论与数理统计。

本书可作为高等学校理科、工科和技术学科等非数学类专业的教材,也可供经济、管理等有关专业使用,并可作为上述各专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册 / 金路等编. -- 4版. -- 北京 : 高等教育出版社, 2016.9

ISBN 978-7-04-045800-8

I. ①高… II. ①金… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 143653 号

策划编辑 杨波
插图绘制 郝林

责任编辑 杨波
责任校对 李大鹏

封面设计 张申申
责任印制 毛斯璐

版式设计 马云

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 国防工业出版社印刷厂
开本 787 mm × 960 mm 1/16
印张 36.25
字数 660千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2001年12月第1版
2016年9月第4版
印 次 2016年9月第1次印刷
定 价 56.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 45800-00

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人将承担相应的民事责任和行政责任;构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

目 录

第三篇 多元函数微积分

第七章 多元函数微分学	3
§ 1 多元函数的极限与连续	3
$\mathbf{R}^n$ 中的点集	3
多元函数	5
多元函数的极限	7
多元函数的连续性	10
有界闭区域上连续函数的性质	12
$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的映射(向量值函数)	12
习题	14
§ 2 全微分与偏导数	15
全微分	16
偏导数	16
偏导数与全微分的计算	19
空间曲面的切平面(1)	22
高阶偏导数	23
可微映射	26
空间曲线的切线(1)	28
习题	29
§ 3 链式求导法则	31
多元函数求导的链式法则	31
全微分的形式不变性	37
复合映射的导数	37
坐标变换下的微分表达式	39
习题	41
§ 4 隐函数微分法及其应用	44
一元函数的隐函数存在定理	44
多元函数的隐函数存在定理	46
多元函数组的隐函数存在定理	47

空间曲面的切平面(2)	51
空间曲线的切线(2)	54
习题	57
§ 5 方向导数、梯度	59
方向导数	59
数量场的梯度	62
等值面的法向量	64
势量场	65
习题	66
§ 6 Taylor 公式	67
二元函数的 Taylor 公式	67
n 元函数的 Taylor 公式	71
习题	72
§ 7 极值	72
多元函数的无条件极值	72
函数的最值	78
最小二乘法	80
矛盾方程组的最小二乘解	82
条件极值	85
习题	89
§ 8 空间曲线和曲面的几何特征	91
一元向量值函数的导数	91
空间曲线的弧长	92
空间曲线的曲率和挠率	94
曲面的第一基本形式	98
曲面的第二基本形式	100
曲面的法曲率、平均曲率和 Gauss 曲率	103
习题	106
第八章 多元函数积分学	107
§ 1 重积分的概念及其性质	107
重积分概念的背景	107
重积分的概念	109
重积分的性质	110
习题	111
§ 2 二重积分的计算	112

直角坐标系下二重积分的计算	112
二重积分的变量代换法	116
极坐标系下二重积分的计算	119
习题	121
§ 3 三重积分的计算及应用	123
直角坐标系下三重积分的计算	123
三重积分的变量代换	126
柱坐标变换和球坐标变换	127
重积分的应用:质心与转动惯量	129
重积分的应用:引力	131
习题	133
§ 4 反常重积分	134
无界区域上的反常重积分	135
无界函数的反常重积分	139
习题	141
§ 5 两类曲线积分	142
第一类曲线积分的概念及性质	142
第一类曲线积分的计算	143
第二类曲线积分的概念及性质	146
第二类曲线积分的计算	148
两类曲线积分的关系	150
习题	150
§ 6 第一类曲面积分	152
曲面的面积	152
第一类曲面积分的概念	155
第一类曲面积分的计算	155
习题	158
§ 7 第二类曲面积分	159
曲面的侧与有向曲面	159
第二类曲面积分的概念及性质	161
第二类曲面积分的计算	163
习题	168
§ 8 Green 公式和 Stokes 公式	169
Green 公式	169
Stokes 公式	174

习题	179
§ 9 旋度和无旋场	180
环量和旋度	180
无旋场、保守场和势量场	183
原函数	187
习题	190
§ 10 Gauss 公式和散度	190
流场的流出量	190
Gauss 公式	193
散度	196
Hamilton 算符和 Laplace 算符	199
习题	202
第九章 级数	204
§ 1 数项级数	204
级数的概念	204
级数的基本性质	207
级数的 Cauchy 收敛准则	209
正项级数的比较判别法	210
正项级数的 Cauchy 判别法与 d'Alembert 判别法	214
正项级数的积分判别法	216
任意项级数	218
* 更序级数	221
级数的乘法	222
习题	224
§ 2 幂级数	227
函数项级数	227
幂级数	228
幂级数的收敛半径	229
幂级数的性质	232
* 幂级数性质的证明	236
函数的 Taylor 级数	239
初等函数的 Taylor 展开	241
习题	249
§ 3 Fourier 级数	251
周期为 2π 的函数的 Fourier 展开	251

正弦级数和余弦级数	254
任意周期的函数的 Fourier 展开	256
Fourier 级数的收敛性	257
最佳平方逼近	261
习题	263
§ 4 Fourier 变换初步	265
Fourier 变换和 Fourier 逆变换	265
Fourier 变换的性质	268
习题	272

第四篇 常微分方程

第十章 常微分方程	276
§ 1 常微分方程的概念	276
习题	279
§ 2 一阶常微分方程	279
变量可分离方程	280
齐次方程	283
全微分方程	286
线性微分方程	289
Bernoulli 方程	292
数学建模	294
一阶微分方程的数值解法	300
习题	302
§ 3 二阶线性微分方程	305
二阶线性微分方程	305
线性微分方程的解的结构	306
二阶常系数齐次线性微分方程	310
二阶常系数非齐次线性微分方程	313
用常数变易法解二阶非齐次线性微分方程	319
Euler 方程	321
习题	324
§ 4 可降阶的高阶微分方程	326
方程形式为 $F(x, y^{(n)}) = 0$	327
方程形式为 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	329
方程形式为 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	333

习题	336
§ 5 微分方程的幂级数解法	337
习题	342
§ 6 一阶线性微分方程组	343
解的存在与唯一性	343
一阶线性微分方程组的解的结构	345
常系数一阶线性微分方程组的一些解法	349
习题	357

第五篇 概率论与数理统计

第十一章 概率论	360
§ 1 概率	360
随机事件	360
事件之间的关系与运算	362
概率的概念	363
古典概率	364
几何概率	366
概率的公理化定义与概率的性质	367
习题	372
§ 2 条件概率与事件的独立性	374
条件概率	374
全概率公式和 Bayes 公式	376
事件的独立性	379
Bernoulli 概型	382
习题	383
§ 3 一维随机变量	385
随机变量的概念	385
离散型随机变量	387
连续型随机变量	392
习题	401
§ 4 二维随机变量	404
二维随机变量	404
二维离散型随机变量	405
二维连续型随机变量	407
随机变量的相互独立性	411

随机变量函数的分布	413
习题	419
§ 5 随机变量的数字特征	423
数学期望	423
随机变量的函数的数学期望	426
方差和标准差	428
几种常见分布的数学期望和方差	430
协方差与相关系数	434
分位数与中位数	440
习题	441
§ 6 大数定律和中心极限定理	444
Чебышёв 不等式	445
大数定律	446
中心极限定理	449
习题	453
第十二章 数理统计	455
§ 1 样本与抽样分布	455
总体与样本	455
直方图	457
统计量	459
三个重要分布	461
抽样分布	465
习题	468
§ 2 参数估计	469
点估计	469
矩估计法	470
最大似然估计法	472
估计量优劣的评判标准	475
区间估计	479
习题	486
§ 3 假设检验	489
假设检验的基本概念	489
单个正态总体均值与方差的假设检验	490
两个正态总体的均值差与方差比的假设检验	494
总体分布的假设检验	497

习题	501
§ 4 一元线性回归分析	504
一元线性回归分析的数学模型	504
回归函数的确定	506
估计量的分布	508
回归系数的区间估计	510
线性假设的显著性检验	510
预测和控制	513
习题	516
附表 1 Poisson分布表	518
附表 2 标准正态分布数值表	521
附表 3 χ^2 分布的上侧分位数表	523
附表 4 t 分布的上侧分位数表	525
附表 5 F 分布的上侧分位数表	526
部分习题答案与提示	533

第三篇 多元函数微积分

在丰富多彩的现实世界中,各类客观事物的发展过程一般都受到众多因素的制约. 其中,有些因素的作用基本上是独立的,更多的因素却相互关联,相互影响,彼此交织地作用着,远比单一因素的效应复杂. 为了定量地刻画由多个因素决定的客观对象的变化规律,经常需要作多元分析,多元函数微积分就是多元分析的重要基础.

多元微积分的研究产生于 18 世纪初期. 在早期并没有导数与偏导数的区别,而物理学的研究要求在多个自变量中考虑只有某一个自变量变化的导数,才使偏导数有了坚实的背景和意义. 多元微分学的发展动力来源于早期的偏微分方程研究和物理学的需要,经过法国数学家 Fontaine(方丹), Clairaut(克莱罗), d'Alembert(达朗贝尔)和瑞士数学家 Euler(欧拉)等欧洲数学家的工作,逐步形成了完整的理论.

重积分的思想是 Newton(牛顿)从研究引力问题引入的. 在 18 世纪, Euler 建立了平面区域的二重积分理论,并给出了利用累次积分计算重积分的方法. 法国数学家 Lagrange(拉格朗日)用三重积分表示引力,并利用球坐标变换来计算三重积分,开始了重积分变量代换的研究. 在 19 世纪上半叶,德国数学家 Jacobi(雅可比)发现了重积分变量代换的 Jacobi 行列式,俄国数学家 Остроградский(奥斯特罗格拉茨基)研究热传导理论中建立了 Gauss(高斯)公式(Gauss 也发现了这个公式),英国数学家 Green(格林)在研究位势方程中发现了 Green 公式,之后 Stokes(斯托克斯)又将其推广到三维空间,建立了 Stokes 公式. 这三个公式揭示了重积分与曲面积分及曲线积分,以及曲面积分与曲线积分之间的联系,至此,形成了内容丰富的多元积分理论.

多元微积分理论在数学及各个科学技术领域都有着重要的应用,是不可或缺的数学工具.

在多元微积分中,有关极限、连续、导数、微分和积分的概念虽然与一元微积分中的相应概念源于同类问题的思考,并遵循类似的分析途径. 但是,它们具有一系列新的特点,同时,面对多元情况下形态各异的种种研究对象,还出现了许多更为复杂的问题,需要引入更为深刻的方法和技巧,作出本质上比较一般的讨论. 本篇的前两章就来建立起多元函数的微分学与积分学.

本篇还将介绍有着广泛应用的级数理论,它从离散的角度来研究函数关

系. 如果把数列看作自然数集上的函数, 那么函数列便可视为一类特殊的多元函数. 由于与之对应的函数项级数是表示函数和研究函数性质的重要工具, 因而级数理论也是微积分的一个重要组成部分.

第七章

多元函数微分学

本章讨论的问题类同于一元函数微分学,主要是以极限为工具研究有关增量、变化率、极值等函数的局部性质,并由此进而分析函数的最值等某些整体性质. 由于多元函数定义于 n 维线性空间,而微分学基本思想之一又是局部线性化,因而线性代数的理论和方法在多元函数微分学中起着重要的作用.

§ 1 多元函数的极限与连续

$\mathbf{R}^n$ 中的点集

$\mathbf{R}^n$ 中的元素也称为点,下面要展开讨论的 n 元函数定义于 $\mathbf{R}^n$ 的子集(也称为点集)上. 为了讨论 n 元函数的变化性态,首先需要介绍一些 $\mathbf{R}^n$ 中的距离以及有关点集的基本概念与性质.

上一篇已经在 $\mathbf{R}^n$ 中引入范数:对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 称

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

为 x 的范数. 利用范数,可以自然地引入 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离,即,对于 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 规定 x 与 y 的距离

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

我们已经知道,这样规定的距离具有以下性质:

- (1) 正定性: $d(x, y) \geq 0, x, y \in \mathbf{R}^n$; 且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;
- (2) 对称性: $d(x, y) = d(y, x), x, y \in \mathbf{R}^n$;
- (3) 三角不等式: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), x, y, z \in \mathbf{R}^n$.

设 $x \in \mathbf{R}^n, r > 0$. 记

$$O(x, r) = \{y \mid d(y, x) < r\},$$

它称为 x 的 r 邻域.

定义 7.1.1 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 为点集, $x \in \mathbf{R}^n$. 如果存在 $r > 0$, 使得

$$O(x, r) \subset S,$$

则称 x 为 S 的内点 (见图 7.1.1); 如果对于任何 $r > 0$, 均有

$$O(x, r) \cap S \neq \emptyset, \text{ 且 } O(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus S) \neq \emptyset,$$

则称 x 为 S 的边界点. S 的内点全体称为 S 的内部, 记作 $\dot{S}$; S 的边界点全体称为 S 的边界, 记作 ∂S .

例如, 对 $S = [a, b] \subset \mathbf{R} (= \mathbf{R}^1)$, 满足 $a < x < b$ 的每个 x 均为 S 的内点, S 的边界点为 a 和 b , 即 $\partial S = \{a, b\}$.

又如, 对 $S = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 2\}$, S 的内部为 $\dot{S} = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$, S 的边界为 $\partial S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, \text{ 或 } x^2 + y^2 = 2\}$.

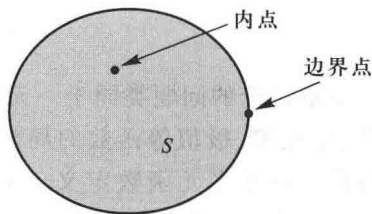


图 7.1.1

由定义可见 $\partial S = \partial(\mathbf{R}^n \setminus S)$. 并且对于 $x \in S$, $x \in \dot{S}$ 当且仅当 $x \in \overline{\partial S}$.

定义 7.1.2 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 为点集. 如果 S 中的每一点均为 S 的内点, 则称 S 为开集; 如果 $\partial S \subset S$, 则称 S 为闭集.

设 $S \subset \mathbf{R}^n$, 常记 $\mathbf{R}^n \setminus S$ 为 S^c , 它称为 S 的余集或补集. 由定义可知, 点集 S 为开集, 当且仅当 S 不包含其任何边界点. 这又等价于 S 的边界 (即其余集的边界) 包含于 S 的余集中, 即其余集为闭集. 这就得到一个结论: 开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集.

对于 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 称集合

$$\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中连接 x 和 y 的线段. $\mathbf{R}^n$ 中首尾彼此相接的有限条线段组成 $\mathbf{R}^n$ 中的折线.

定义 7.1.3 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 为点集. 如果对 S 中任意两点 x, y , 都有一条完全落在 S 中的折线将 x 和 y 连接起来, 则称 S 为 (折线) 连通的.

定义 7.1.4 $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集称为开区域, 简称为区域.

常把开区域连同它的边界组成的点集称为闭区域.

例如, 若 $r > 0$, 则 $S = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \|x\| < r\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开区域; $S_1 = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, \|x\| \leq r\}$ 则是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭区域.

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, 如果存在 $r > 0$, 使得 $S \subset O(0, r)$, 则称 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界点集, 也称 S 是有界的. 否则称 S 为无界点集, 也称 S 是无界的.

例如, $\mathbf{R}^2$ 中的区域 $\{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$ 是有界 (开) 区域; 矩形区域 $[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 是有界闭区域; 右半平面 $\{(x, y) \mid x > 0\}$ 是无界 (开) 区域.

多元函数

一元函数反映了在只含两个变量的变化过程中,这两个变量间的依赖关系;
 n 元函数反映了一个因变量关于 n 个自变量的依赖关系.

定义 7.1.5 设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集. 如果按规则 f , 对于 D 中每个点 $\mathbf{x}$, 均有确定的实数 y 与之对应, 则称 f 是 D 上的 n 元函数, 记作

$$f: D \rightarrow \mathbf{R},$$

$$\mathbf{x} \mapsto y,$$

并记 $y=f(\mathbf{x})$ 或 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. 这个函数也常简记作 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$. 称 $\mathbf{x}$ 为自变量, y 为因变量. 称 D 为 f 的定义域, 常记为 $D(f)$, 并称

$$R(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\}$$

为函数 f 的值域.

如上定义的函数也常记作 $y=f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, 或 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} \in D$.

例如, 圆柱体的体积 V 取决于底圆半径 r 和高 h , 它们间的依赖关系为

$$V=V(r, h)=\pi r^2 h.$$

显然, $D(V)=\{(r, h) \mid r>0, h>0\}$, $R(V)=(0, +\infty)$.

如同一元的初等函数那样, 如果在多元函数的解析表达式中未对定义域作附加说明, 则其定义域应理解为一切使表达式有意义的自变量的变化范围.

二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域 $D(f)$ 是 Oxy 平面上的一个点集, 其图像

$$G(f)=\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y) \in D(f)\}$$

是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一个曲面.

例如, 二元函数 $z=2\sqrt{2-x^2-\frac{y^2}{3}}$ 的定义域是 $\left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6} \leq 1\right\}$, 其图像见

图 7.1.2; 函数 $z=\sin(x^2+y^2)$ 的定义域是整个 Oxy 平面, 其图像见图 7.1.3.

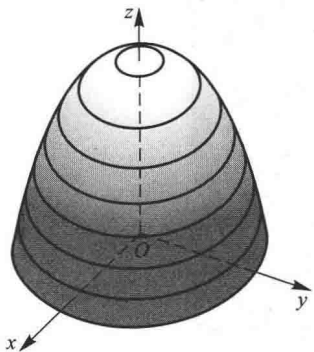


图 7.1.2

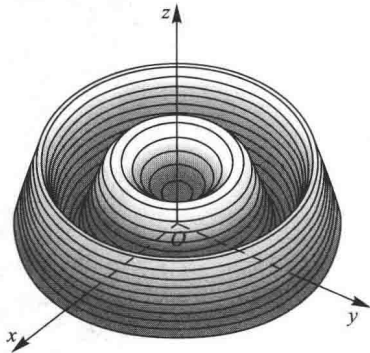


图 7.1.3