ADVANCED MATHEMATICS

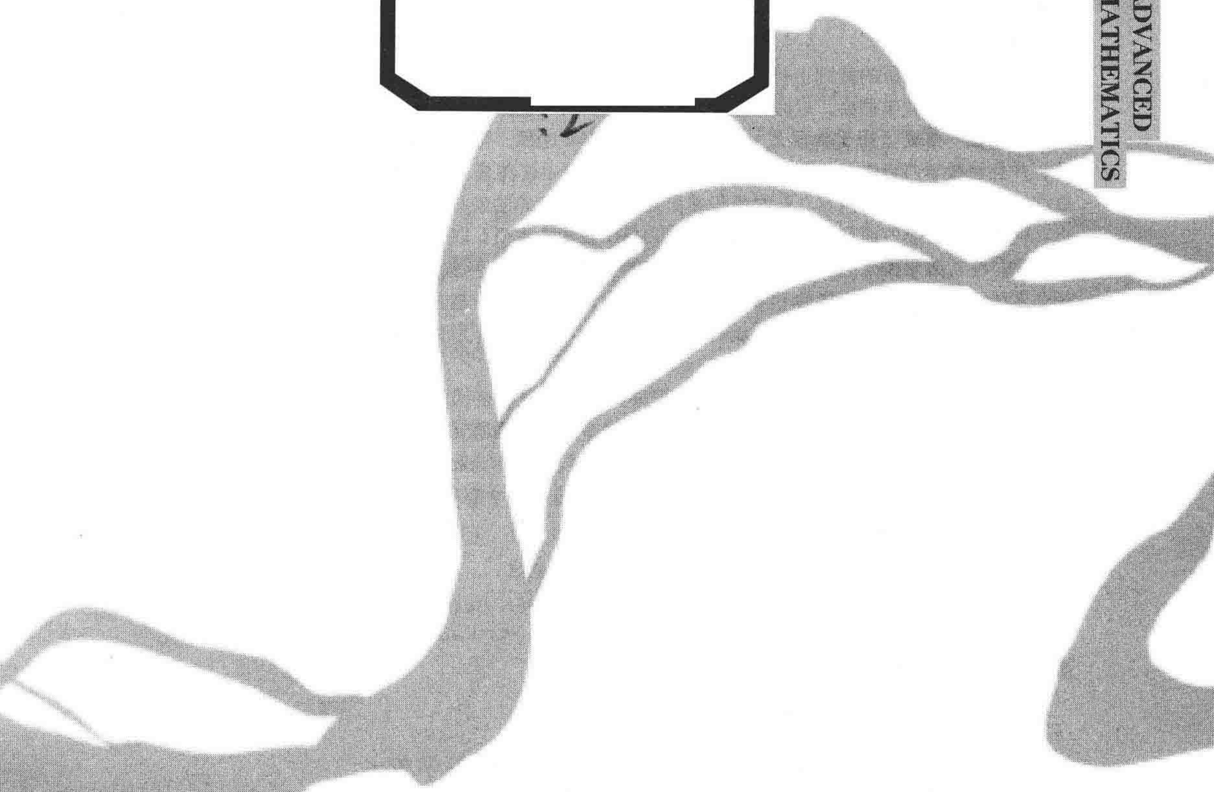
高等学校教材

高等数学

第四版 下册

金 路 童裕孙 於崇华 张万国 编

高等教育出版社



ADVANCED MATHEMATICS

高等学校教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

第四版 下册

金 路 童裕孙 於崇华 张万国 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是在第三版的基础上修改而成的。作者根据大量的教学信息反馈和更加深刻的教学体会，对原书作了大量的修改，并增删了部分内容，其目的是使本书更适用于大学数学基础课的实际教学过程，符合实际需要，并且使教学内容更易于学生理解和接受。本书的主要特色是以现代数学的观点审视经典的内容，科学组织并简洁处理相对成熟的素材，对分析、代数、几何等方面作了统一的综合处理，揭示数学的本质、联系和发展规律；注重数学概念的实际背景和几何直观的引入，强调数学建模的思想和方法；在适度运用严格数学语言的同时，注意论述方式的自然朴素，以便读者易于理解；配有丰富的图示、多样的例题和习题，便于学生理解和训练。

全书分上、下两册。上册包括一元微积分、线性代数、空间解析几何；下册包括多元微积分、级数、常微分方程、概率论与数理统计。

本书可作为高等学校理科、工科和技术学科等非数学类专业的教材，也可供经济、管理等有关专业使用，并可作为上述各专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册 / 金路等编．-- 4版．-- 北京：高等教育出版社，2016.9

ISBN 978-7-04-045800-8

Ⅰ．①高… Ⅱ．①金… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第143653号

策划编辑 杨 波　　责任编辑 杨 波　　封面设计 张申申　　版式设计 马 云
插图绘制 郝 林　　责任校对 李大鹏　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂		http://www.hepmall.com
开　本	787 mm×960 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	36.25	版　次	2001年12月第1版
字　数	660千字		2016年9月第4版
购书热线	010－58581118	印　次	2016年9月第1次印刷
咨询电话	400－810－0598	定　价	56.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 45800－00

目　　录

第三篇　多元函数微积分

第四篇 常微分方程

第五篇 概率论与数理统计

第三篇　多元函数微积分

在丰富多彩的现实世界中，各类客观事物的发展过程一般都受到众多因素的制约．其中，有些因素的作用基本上是独立的，更多的因素却相互关联，相互影响，彼此交织地作用着，远比单一因素的效应复杂．为了定量地刻画由多个因素决定的客观对象的变化规律，经常需要作多元分析，多元函数微积分就是多元分析的重要基础．

多元微积分的研究产生于18世纪初期．在早期并没有导数与偏导数的区别，而物理学的研究要求在多个自变量中考虑只有某一个自变量变化的导数，才使偏导数有了坚实的背景和意义．多元微分学的发展动力来源于早期的偏微分方程研究和物理学的需要，经过法国数学家 Fontaine（方丹），Clairaut（克莱罗），d'Alembert（达朗贝尔）和瑞士数学家 Euler（欧拉）等欧洲数学家的工作，逐步形成了完整的理论．

重积分的思想是 Newton（牛顿）从研究引力问题引入的．在18世纪，Euler建立了平面区域的二重积分理论，并给出了利用累次积分计算重积分的方法．法国数学家 Lagrange（拉格朗日）用三重积分表示引力，并利用球坐标变换来计算三重积分，开始了重积分变量代换的研究．在19世纪上半叶，德国数学家 Jacobi（雅可比）发现了重积分变量代换的 Jacobi 行列式，俄国数学家 Остроградский（奥斯特罗格拉茨基）研究热传导理论中建立了 Gauss（高斯）公式（Gauss 也发现了这个公式），英国数学家 Green（格林）在研究位势方程中发现了 Green 公式，之后 Stokes（斯托克斯）又将其推广到三维空间，建立了 Stokes 公式．这三个公式揭示了重积分与曲面积分及曲线积分，以及曲面积分与曲线积分之间的联系，至此，形成了内容丰富的多元积分理论．

多元微积分理论在数学及各个科学技术领域都有着重要的应用，是不可或缺的数学工具．

在多元微积分中，有关极限、连续、导数、微分和积分的概念虽然与一元微积分中的相应概念源于同类问题的思考，并遵循类似的分析途径．但是，它们具有一系列新的特点，同时，面对多元情况下形态各异的种种研究对象，还出现了许多更为复杂的问题，需要引入更为深刻的方法和技巧，作出本质上比较一般的讨论．本篇的前两章就来建立起多元函数的微分学与积分学．

本篇还将介绍有着广泛应用的级数理论，它从离散的角度来研究函数关

系．如果把数列看作自然数集上的函数，那么函数列便可视为一类特殊的多元函数．由于与之对应的函数项级数是表示函数和研究函数性质的重要工具，因而级数理论也是微积分的一个重要组成部分．

第七章 多元函数微分学

本章讨论的问题类同于一元函数微分学，主要是以极限为工具研究有关增量、变化率、极值等函数的局部性质，并由此进而分析函数的最值等某些整体性质．由于多元函数定义于 n 维线性空间，而微分学基本思想之一又是局部线性化，因而线性代数的理论和方法在多元函数微分学中起着重要的作用．

§1 多元函数的极限与连续

$\mathbf{R}^n$ 中的点集

$\mathbf{R}^n$ 中的元素也称为**点**，下面要展开讨论的 n 元函数定义于 $\mathbf{R}^n$ 的子集（也称为**点集**）上．为了讨论 n 元函数的变化性态，首先需要介绍一些 $\mathbf{R}^n$ 中的距离以及有关点集的基本概念与性质．

上一篇已经在 $\mathbf{R}^n$ 中引入范数：对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，称

$$\|\boldsymbol{x}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**．利用范数，可以自然地引入 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离，即，对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，规定 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$

我们已经知道，这样规定的距离具有以下性质：

（1）**正定性**：$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$；且 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$；

（2）**对称性**：$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$；

（3）**三角不等式**：$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$.

设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,r>0$. 记

$$O(\boldsymbol{x},r)=\{\boldsymbol{y}\mid d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})<r\},$$

它称为 $\boldsymbol{x}$ 的 r **邻域**．

定义 7.1.1 设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 为点集，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$. 如果存在 $r>0$，使得

$$O(\boldsymbol{x},r)\subset S,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**内点**（见图 7.1.1）；如果对于任何 $r>0$，均有

$$O(\boldsymbol{x},r)\cap S\neq\varnothing,\ 且\ O(\boldsymbol{x},r)\cap(\mathbf{R}^n\setminus S)\neq\varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的**边界点**. S 的内点全体称为 S 的**内部**，记作 $\mathring{S}$；S 的边界点全体称为 S 的**边界**，记作 ∂S.

例如，对 $S=[a,b)\subset\mathbf{R}(=\mathbf{R}^1)$，满足 $a<x<b$ 的每个 x 均为 S 的内点，S 的边界点为 a 和 b，即 $\partial S=\{a,b\}$.

又如，对 $S=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$，$S$ 的内部为 $\mathring{S}=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<2\}$，$S$ 的边界为 $\partial S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1，或\ x^2+y^2=2\}$.

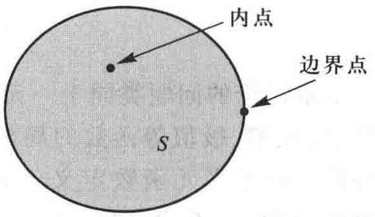


图 7.1.1

由定义可见 $\partial S=\partial(\mathbf{R}^n\setminus S)$. 并且对于 $\boldsymbol{x}\in S$，$\boldsymbol{x}\in\mathring{S}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}\notin\partial S$.

定义 7.1.2 设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 为点集. 如果 S 中的每一点均为 S 的内点，则称 S 为**开集**；如果 $\partial S\subset S$，则称 S 为**闭集**.

设 $S\subset\mathbf{R}^n$，常记 $\mathbf{R}^n\setminus S$ 为 S^C，它称为 S 的**余集**或**补集**. 由定义可知，点集 S 为开集，当且仅当 S 不包含其任何边界点. 这又等价于 S 的边界（即其余集的边界）包含于 S 的余集中，即其余集为闭集. 这就得到一个结论：开集的余集是闭集，闭集的余集是开集.

对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，称集合

$$\{t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中连接 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的**线段**. $\mathbf{R}^n$ 中首尾彼此相接的有限条线段组成 $\mathbf{R}^n$ 中的**折线**.

定义 7.1.3 设 $S\subset\mathbf{R}^n$ 为点集. 如果对 S 中任意两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，都有一条完全落在 S 中的折线将 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 连接起来，则称 S 为（折线）**连通**的.

定义 7.1.4 $\mathbf{R}^n$ 中的连通开集称为**开区域**，简称为**区域**.

常把开区域连同它的边界组成的点集称为**闭区域**.

例如，若 $r>0$，则 $S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\|<r\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开区域；$S_1=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\|\leqslant r\}$ 则是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭区域.

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，如果存在 $r>0$，使得 $S\subset O(\mathbf{0},r)$，则称 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**有界点集**，也称 S 是**有界**的. 否则称 S 为**无界点集**，也称 S 是**无界**的.

例如，$\mathbf{R}^2$ 中的区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$ 是有界（开）区域；矩形区域 $[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 是有界闭区域；右半平面 $\{(x,y)\mid x>0\}$ 是无界（开）区域.

多元函数

一元函数反映了在只含两个变量的变化过程中，这两个变量间的依赖关系；n 元函数反映了一个因变量关于 n 个自变量的依赖关系．

定义 7.1.5 设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集．如果按规则 f，对于 D 中每个点 $\boldsymbol{x}$，均有确定的实数 y 与之对应，则称 f 是 D 上的 n **元函数**，记作

$$f: D \to \mathbf{R},$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto y,$$

并记 $y=f(\boldsymbol{x})$ 或 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$．这个函数也常简记作 $f:D\to\mathbf{R}$．称 $\boldsymbol{x}$ 为自变量，y 为因变量．称 D 为 f 的**定义域**，常记为 $D(f)$，并称

$$R(f)=\{f(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in D\}$$

为函数 f 的**值域**．

如上定义的函数也常记作 $y=f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in D$，或 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{x}\in D$．

例如，圆柱体的体积 V 取决于底圆半径 r 和高 h，它们间的依赖关系为

$$V=V(r,h)=\pi r^2 h.$$

显然，$D(V)=\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$，$R(V)=(0,+\infty)$．

如同一元的初等函数那样，如果在多元函数的解析表达式中未对定义域作附加说明，则其定义域应理解为一切使表达式有意义的自变量的变化范围．

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 $D(f)$ 是 Oxy 平面上的一个点集，其图像

$$G(f)=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),\quad (x,y)\in D(f)\}$$

是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一个曲面．

例如，二元函数 $z=2\sqrt{2-x^2-\dfrac{y^2}{3}}$ 的定义域是 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}\leqslant 1\right\}$，其图像见图 7.1.2；函数 $z=\sin(x^2+y^2)$ 的定义域是整个 Oxy 平面，其图像见图 7.1.3.

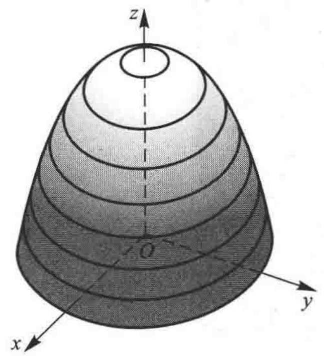


图 7.1.2

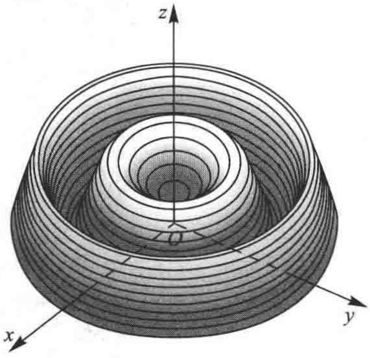


图 7.1.3