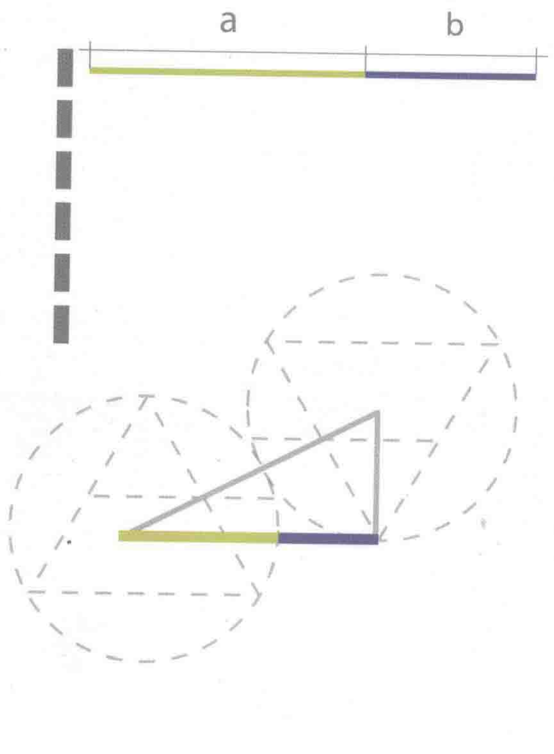
普通高等教育"十三五"规划教材

高等数学（理工类）下册

杨海涛 主编



上海财经大学出版社
SHANGHAI UNIVERSITY OF FINANCE & ECONOMICS PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（理工类）

下册

主　编　杨海涛

编　写　（以编写内容顺序为序）
叶洪波　陈玉成　杨海涛
翟绍辉

上海财经大学出版社

内容提要

本书是在贯彻落实教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"要求精神的基础上，按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，并结合当前大多数本科院校学生基础和教学特点进行编写的. 全书分上、下两册. 上册分4章，内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何；附录包括二阶和三阶行列式简介、常用曲线方程与图像、积分表、数学建模、数学实验. 下册分4章，内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程；附录包括数学建模与数学实验. 每册书后附有习题答案与提示.

本书知识系统、体系结构清晰、详略得当、例题丰富、语言通俗、讲解透彻、难度适中. 适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)高等数学课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：下册 / 杨海涛主编. —上海：上海财经大学出版社，2016.8

(普通高等教育"十三五"规划教材)

ISBN 978-7-5642-2536-0/F.2536

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第204877号

□ 责任编辑 温 涌

□ 封面设计 杨雪婷

GAODENG SHUXUE

高 等 数 学

(理工类)

下册

杨海涛 主编

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路321号乙 邮编200434)

网 址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海华教印务有限公司印刷装订

2016年8月第1版 2016年8月第1次印刷

787 mm×1 092 mm 1/16 15.75印张 383千字

印数：0 001—3 000 定价：38.00元

前　言

由于“高等数学”在各个领域都有广泛的应用，因而成为本科教学中重要的基础课程之一．为了适应当前我国高等教育正经历从“精英型教育”向“大众化教育”的转变过程，满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点，我们编写了这本高等数学教材．

本书在编写过程中，认真贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神，严格按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，同时参考了近几年国内外出版的相关教材，并结合编者的教学实践经验以及当前多数本科院校学生基础和教学特点进行编写．

全书以通俗的语言，系统介绍了高等数学的知识．全书分上、下两册．上册分4章，内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何；上册附录包括二阶和三阶行列式简介、常用曲线方程与图像、积分表、数学建模与数学实验．下册分4章，内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和微分方程；下册附录包括数学建模与数学实验．每册书后附有习题答案与提示．

本书在编写中有以下几点考虑：

(1) 本书内容覆盖面较广，教师可根据不同专业要求的教学时数适当取舍．讲完全书(包括习题课)约需192学时；删去加“*”号的部分约需176学时，降低部分较难理论的证明约需152学时；再对第6、7、8章作适当删减，可供112学时或96学时的课程选用．

(2) 为培养学生应用意识和实践能力，编排了一定数量的应用题，并在上、下册分别安排了与教学内容相应的数学建模与数学实验，教师可根据情况另外安排8～16学时的实践课．

(3) 本书编写重在基本概念、基本理论和基本方法的介绍，知识面较广，但对深入的理论和技巧不作要求．

(4) 本书在编写中，根据知识的特点，有的内容是以介绍的方式编写，有的内容是以探讨与研究的方式编写，目的在于培养学生的数学思维和分析解决问题的能力．

(5) 适当渗透现代数学思想．

本书知识系统、结构清晰、内容详略得当、例题丰富、语言通俗、讲解透彻、难度适中，适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)高等数学课程的教材使用，可供成教学院或申请升本的专科院校选用为教材，也可供相关专业人员和广大教师参考．

与本教材同步出版的《高等数学学习指导(理工类)》是教材内容的补充、延伸、拓展和深

入，对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨，对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本教材的教学效果大有裨益，也可作为本教材配套的习题课参考书.

本书由杨海涛主编，参加编写的人员有(按编写教材内容顺序)：李克华、胡航宇、吴俊义、叶洪波、陈玉成、杨海涛、翟绍辉.全书由杨海涛统稿、定稿.

在本书的编写过程中，参考了书后所列参考文献.作者在此对这些参考文献的作者表示感谢.

感谢韩明教授，他在审阅中提出了一些宝贵而又中肯的建议，使本书避免了一些错误和不当之处.

在本书的编写和出版过程中，得到各作者单位和出版社有关专家的关心与大力支持，在此一并表示衷心的感谢!

由于时间仓促，加之我们对教材内容体系改革的研究还处于尝试阶段，虽然全力以赴，但书中一定还有不少不尽如人意之处，热忱希望专家、教师和读者提出宝贵意见.

杨海涛

2016 年 8 月

目　录

第 5 章　多元函数微分学

在上册的内容中,主要讨论了只有一个自变量的函数的微积分,即一元函数微积分,但在很多实际问题中涉及的函数是含有多个自变量的函数,即多元函数.因此,将一元函数的微分学与积分学推广到多元函数的情形是必要的,也是自然的.本章主要讨论多元函数的微分学及其应用.讨论中以二元函数为主,至于更多个自变量的情况,可类似地进行讨论.

5.1　多元函数的概念、极限与连续

5.1.1　区域、空间、多元函数

在讨论一元函数时,一些概念、理论和方法,是基于 R^1 中的点集、两点间距离、区间和邻域等概念.为了将一元函数推广到多元的情形,首先需要将上述 R^1 中的相应概念加以推广.先引入平面点集的一些基本概念,将有关概念从 R^1 中的情形推广到 R^2 中;然后引入到 n 维空间 R^n,把相应概念推广到 R^n 中.

1. 区域

由平面解析几何知,平面上的点 P 可以用坐标 (x,y) 来表示,且这些点的全体构成整个平面,即 $R^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合,称为平面点集,记为

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 具有性质 }P\}.$$

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是坐标平面上的一个点,δ 是某一个正数,与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 P_0 的邻域,记作 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\},$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上,$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

去掉邻域的中心,得到的集合称为点 P_0 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域的半径 δ,则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域,点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

下面介绍一些有关点和点集的名称.

设 E 是平面上的一个点集,点 P 是平面上任意一点,则它们有如下关系:

(1) **内点**. 若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P) \subset E$,则称 P 为 E 的内点.

(2) **外点**. 若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$,使得 $U(P) \cap E = \varnothing$,则称 P 为 E 的外点.

(3) **边界点**. 若点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的边界点.

(4) **边界**. E 的边界点的全体称为 E 的边界,记作 ∂E.

(5) **聚点**. 如果对于任意给定的 $\delta > 0$,点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内有 E 中的点,则称 P 是 E 的聚点.

(6) **开集**. 若点集 E 的点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

(7) **闭集**. 若点集 E 的余集 E^C 为开集,则称 E 为闭集.

(8) **连通集**. 若点集 E 内任何两点都可用折线连接起来,且该折线上的点都属于 E,则称 E 为连通集.

(9) **区域(开区域)**. 连通的开集称为区域或开区域.

(10) **闭区域**. 开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

(11) **有界集**. 对于平面点集 E,如果存在某一正数 r,使得

$$E \subset U(O,r),$$

其中,O 是坐标原点,则称 E 为有界集.

(12) **无界集**. 一个集合如果不是有界集,则称该集合为无界集.

例如,设平面点集

$$E = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}.$$

满足 $1 < x^2 + y^2 < 2$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点;满足 $x^2 + y^2 = 1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点,它们都不属于 E;满足 $x^2 + y^2 = 2$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点,它们都属于 E;点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点. 再如,集合 $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ 是开集;集合 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ 是闭集;而集合 $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ 既非开集,也非闭集. 又如,集合 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ 是有界闭区域;集合 $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2\}$ 是无界开区域,也可称为无界区域;集合 $\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2\}$ 是无界闭区域.

2. 空间

设 n 为取定的一个自然数,用 R^n 表示 n 元有序实数组 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ 的全体构成的集合,即

$$R^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n\text{个}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

对 R^n 中的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,当所有的 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 都为零时,称这样的元素为 R^n 中的零元,记为 $\mathbf{0}$ 或 O. 在解析几何中,通过直角坐标系,R^2 或 R^3 中的元素分别与平面或空间中的点或向量建立一一对应,因而 R^n 中的元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也称为 R^n 中的一个点或一个 n 维向量,x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量. 特别地,R^n 中的零元 $\mathbf{0}$ 称为 R^n 中的坐标原点或 n 维零向量.

注 为了书写方便,以后我们不加区别地将向量 $\boldsymbol{x}$ 用 x 表示,根据上下文,读者不难判

断出 x 是元素(向量)还是坐标(分量).

为了在集合 R^n 中的元素之间建立联系,在 R^n 中定义线性运算如下:

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 R^n 中任意两个元素, $\lambda\in\mathbf{R}$, 规定

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n).$$

这样定义了线性运算的集合 R^n 称为 n 维线性空间,简称 n 维空间.

R^n 中点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离记作 $\rho(x,y)$,规定

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然, $n=1,2,3$ 时,上述规定与数轴上、直角坐标系下平面及空间中两点间的距离一致.

R^n 中元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 $\mathbf{0}$ 之间的距离 $\rho(x,0)$ 记作 $\|x\|$ (在 R^1,R^2,R^3 中,通常将 $\|x\|$ 记作 $|x|$),即

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

采用这一记号,结合向量的线性运算,便得

$$\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}=\rho(x,y).$$

在 n 维空间 R^n 中定义了距离以后,就可以定义 R^n 中变元的极限:

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$. 如果

$$\|x-a\|\to 0,$$

则称变元 x 在 R^n 中趋于固定元 a,记作 $x\to a$.

显然, $x\to a$ 的充分必要条件是 $x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n$.

在 R^n 中引入线性运算和距离,使得前面讨论过的有关平面点集的一系列概念,可以类似地被引入到 $n(\geqslant 3)$ 维空间中来. 例如:

设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$, δ 是某一正数,则 n 维空间内的点集

$$U(a,\delta)=\{x\mid x\in R^n,\rho(x,a)<\delta\}$$

称为 R^n 中点 a 的 δ 邻域. 以邻域为基础,可以定义点集的内点、外点、边界点和聚点,以及开集、闭集、区域等一系列概念. 这里就不再赘述.

3. 多元函数

多元函数就是含有多个自变量的函数,例如,

例1　三角形的一边 c 是另外两边 a 与 b 及其夹角 θ 的函数,记作

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}.$$

例2　一定质量的理想气体的压强 p 是其体积 V 及温度 T 的函数,记作

$$p=k\frac{T}{V},k=\text{常数}.$$

例3　R 是电阻 R_1,R_2 并联后的总电阻,则可得 R 的表达式

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

下面给出多元函数的定义.

定义 5.1.1 设有一个集合 $D \subset R^n$，如果对于集合 D 中每一点 $(x_1, x_1, \cdots, x_n)$，按照一定的规则 f，都有一个唯一确定的实数 $u \in \mathbf{R}$ 与之相对应，则称 f 是一个定义在 D 上的 **n 元函数**. 这里 D 称为 f 的定义域，与 $(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ 相对应的数 u 称为 f 在点 $(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ 的值，并记为 $f(x_1, x_1, \cdots, x_n)$，全体函数值的集合

$$f(D) = \{f(x_1, x_1, \cdots, x_n) \mid (x_1, x_1, \cdots, x_n) \in D\}$$

称为 f 的值域.

通常把 $(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ 称为自变量，u 称为因变量，有时也称 u 是 $(x_1, x_1, \cdots, x_n)$ 的函数.

习惯上将 R^2 中的点用 (x, y) 表示，而 R^3 中的点用 (x, y, z) 表示，故通常的二元函数与三元函数用 $z = f(x, y)$ 与 $u = f(x, y, z)$ 表示.

当 $n = 1$ 时，n 元函数就是一元函数；当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域，与一元函数相类似，可作如下约定：在讨论用算式表达的多元函数 $u = f(x)$ 时，就以使这个算式有意义的变元 x 的值所组成的点集为这个多元函数的自然定义域. 因此，对这类函数的定义域不再特别指出.

例如，函数 $z = \ln(x + y)$ 的定义域为 $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$，这是一个无界区域. 如图 5.1 所示.

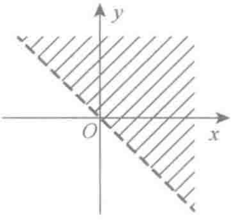


图 5.1

设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x, y) \in D$，对应的函数值为 $z = f(x, y)$. 因此，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z = f(x, y)$ 为竖坐标，在空间上就能确定一点 $M(x, y, z)$. 当 (x, y) 取遍 D 上的每一点时，得到一个空间点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

这个点集称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形，这是空间坐标系中的一张曲面.

例如，函数 $z = ax + by + c(abc \neq 0)$ 的图形是一张平面，如图 5.2 所示. 函数 $z = x^2 + y^2$ 的图形是旋转抛物面，如图 5.3 所示.

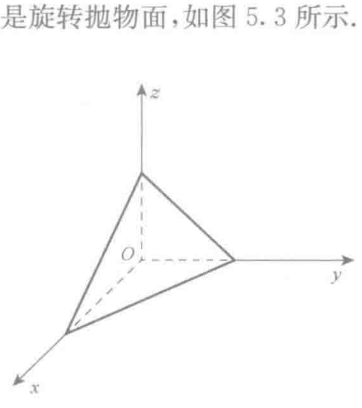


图 5.2

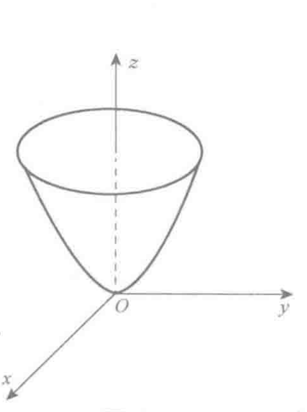


图 5.3

注　对于多元函数,常以二元函数为例进行讨论.

5.1.2　二元函数的极限与连续

1. 二元函数的极限

先讨论二元函数极限的情况,即 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

与一元函数的情况类似,一个二元函数(或多元函数)在一点处的极限,就是指当动点任意接近该点时,动点的函数值所趋向的值,即当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限. 下面用"ε-δ"语言来描述极限概念.

定义 5.1.2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个空心邻域内有定义,若有一常数 A,对任意给定的正数 ε,都存在正数 δ,使得当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时,就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, 则称点 (x,y) 趋于点 (x_0,y_0) 时, $f(x,y)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

有时也写成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限也称为**二重极限**.

注　在定义 5.1.2 中,条件 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 也常用 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, 点 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 来代替,两种形式的定义是等价的.

例 4　设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$,求证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证明　函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=R^2\setminus\{(0,0)\}$, 点 $O(0,0)$ 为 D 的聚点,因为

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2.$$

于是,对任意 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta,$$

即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(0,\delta)$ 时,总有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

成立,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

尽管二元函数极限的定义与一元函数极限的定义非常类似,但点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的方式有很多,可以沿任何方向趋于 P_0,可以沿直线,也可以沿折线,甚至可以沿曲线,函数

都趋于同一个常数. 这就提供了证明极限不存在的一种方法:只要能指出两条路径,当 P 沿这两条不同的路径趋于 P_0 时,$f(x,y)$ 趋于不同的常数,就可以断定当 $P\to P_0$ 时,$f(P)$ 没有极限.

例 5 问函数

$$f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否有极限?

解 令 $y=kx$,k 是任何固定的常数,显然当 $x\to 0$ 时,$y\to 0$;换句话说,点 (x,y) 是沿直线 $y=kx$ 趋向于点 $(0,0)$ 的. 在这种限制下,

$$f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

那么,当点 (x,y) 沿着直线 $y=kx$ 趋向于点 $(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 以 $\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ 为极限. 因此,沿着不同斜率的直线趋向点 $(0,0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 趋于不同的数. 所以,$f(x,y)$ 当点 $(x,y)\to(0,0)$ 时没有极限.

关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 6 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解 函数 $\dfrac{\sin(xy)}{x}$ 的定义域 $D=\{(x,y)\mid x\neq 0, y\in\mathbf{R}\}$,$P_0(0,2)$ 为 D 的聚点,由极限运算法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}&=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y\\&=1\times 2=2.\end{aligned}$$

2. 二元函数的连续

定义 5.1.3 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一个邻域内有定义,若函数 $z=f(x,y)$ 当点 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时有极限,且其极限等于函数值 $f(x_0,y_0)$,即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,且在 D 内每一点都连续,则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内连续,或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

例 7 函数 $f(x,y)=\sin(x+y)$,证明 $f(x,y)$ 是 R^2 上的连续函数.

证明 设 (x_0,y_0) 是 R^2 中任意给定的一点,那么对于任意一点 (x,y),有

$$\begin{aligned}|\sin(x+y)-\sin(x_0+y_0)|&=2\left|\sin\frac{(x+y)-(x_0+y_0)}{2}\cos\frac{(x+y)+(x_0+y_0)}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\sin\frac{(x+y)-(x_0+y_0)}{2}\right|\leqslant|(x+y)-(x_0+y_0)|\end{aligned}$$

$$\leqslant |x-x_0|+|y-y_0|.$$

于是，对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $|x-x_0|<\varepsilon$，$|y-y_0|<\varepsilon$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时，上式小于 ε，所以，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

例 8　设 $f(x,y)=\sin x$，证明 $f(x,y)$ 是 R^2 上的连续函数.

证明　设 $P_0(x_0,y_0)\in R^2$，对任意 $\varepsilon>0$，由于 $\sin x$ 在 x_0 处连续，故 $\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

以上述 δ 作 P_0 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$，则当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，显然

$$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta.$$

从而

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)=\sin x$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续. 由 P_0 的任意性知，$\sin x$ 作为 x,y 的二元函数在 R^2 上连续.

前面讨论过一元函数的四则运算及复合运算均保持函数的连续性，在多元函数中这些结论依然成立. 此外，一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域，是指包含在定义域内的开区域或闭区域.

例 9　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

解　函数 $f(x,y)=\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq0\}.$$

$P_0(0,1)$ 是 D 的内点，故存在 P_0 的某一个邻域 $U(P_0)\subset D$，而任何邻域都是区域，所以 $U(P_0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个定义区域，因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=f(0,1)=1.$$

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例 10　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}\\&=-\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

与一元函数类似,有界闭区域上连续的多元函数有下列性质:

性质1(有界性与最大值最小值定理) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(P)$ 在 D 上一定有界,且可以取得最大值和最小值.

性质2(介值定理) 在有界闭区域 D 上的多元函数可以取得介于最大值和最小值之间的任何值.

性质3(一致连续性定理) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数 $f(P)$ 必定在 D 上一致连续. 即对任意 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$,使对任意 $P_1,P_2\in D$,只要 $d(P_1,P_2)<\delta$,就有 $|f(P_1)-f(P_2)|<\varepsilon$.

习题 5.1

1. 求下列点集的内点、外点、边界点.

(1) $E=\{(x,y)\mid y<x^2\}$; (2) $E=\left\{(x,y)\middle| 1\leqslant x^2+\dfrac{y^2}{4}<4\right\}$;

(3) $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$; (4) $E=\{(x,y)\mid |x|<1,|y-1|<2\}$.

2. 求下列各函数的定义域.

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; (2) $z=\ln(y^2-2x+1)$;

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; (4) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$;

(6) $z=\ln(y-x)+\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\sin\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

4. 设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(3,2),f(x,y),f(x+h,y)$.

5. (1) 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x-2y}{2x-y}$,求 $f(1,3),f(2t,t)$;

(2) 设函数 $f(x,y)=(x+y)^{x-y}$,求 $f(0,1),f(-1,-1),f(2,3)$;

(3) 设函数 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

6. 证明:函数 $f(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$f(xy,uv)=f(x,u)+f(x,v)+f(y,u)+f(y,v).$$

7. 设 $z=x+y+f(x-y)$,已知 $y=0$ 时,$z=x^2$,求 $f(x)$ 和 z.

8. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin xy}{x}$; (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$; (6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

9. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

10. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0, \\ 0, & xy=0, \end{cases}$ 讨论下面三种极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$；(3) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

11. 求下列函数的间断点.

(1) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$；　　(2) $z=\tan(x^2+y^2)$.

12. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $O(0,0)$ 处的连续性.

5.2　偏导数与全微分

5.2.1　偏导数与高阶偏导数

1. 偏导数

考察一个二元函数 $z=f(x,y)$，将自变量 y 固定时，$z=f(x,y)$ 就是 x 的一个一元函数，自然可以考虑其导数，这样求得的对 x 的导数称作 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数. 类似地，也可以考虑 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导数.

定义 5.2.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，将 y 固定为 y_0，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.z_x\right|_{(x_0,y_0)},\text{或 } f_x(x_0,y_0).$$

类似地，若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称该极限为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.z_y\right|_{(x_0,y_0)},\text{或 } f_y(x_0,y_0).$$

从定义可看出，$f_x(x_0,y_0)$ 就是 $f(x,y_0)$ 作为 x 的一元函数在 x_0 处的导数，而 $f_y(x_0,y_0)$ 就是 $f(x_0,y)$ 作为 y 的一元函数在 y_0 处的导数.

因此，在求 $z=f(x,y)$ 的偏导数时，并不需要用新的方法. 因为这里只有一个自变量在变动，而另一个是固定的，可认为是常数，所以，仍旧是一元函数的微分法问题. 在求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量而对 x 求导数；在求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 x 暂时看作常量而对 y 求导数.