普通高等教育"十三五"规划教材
应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

概率论与数理统计

（理工类）

主编　廖靖宇　吴亚桢

科学出版社

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

概率论与数理统计

(理工类)

主　编　　廖靖宇　吴亚桢
副主编　　孟晓然　郑恩伟

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书目的是为应用型高等学校的理科类、工科类等各专业学生提供一本比较适合的教材或学习参考书. 概率论与数理统计是定量地研究随机现象统计规律的现代数学分支之一, 有着非常广泛的应用背景, 在工业、农业、商业、军事、科学研究、工程技术、经济管理等几乎所有领域都有重要应用. 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来概率统计方法在经济、金融、保险、生物、农林、医学和管理等许多领域中得到了广泛应用和深入发展.

教学内容模块化, 将本教材的内容划分为 29 个模块, 介绍了包括随机事件及其运算、概率的定义及性质、等可能概率模型、条件概率、独立性、随机变量及其分布、常见的离散型分布、常见的连续型分布、随机变量函数的分布、二维随机变量及其分布、二维随机变量的边缘分布、二维随机变量的独立性、条件分布、二维随机变量函数的分布、一维随机变量的数学期望、一维随机变量的方差与标准差、二维随机变量的数字特征、大数定律、中心极限定理、数理统计的基本知识、三大抽样分布、参数估计的概念与点估计量的求法、估计量的评价标准、区间估计、假设检验的基本思想和方法、参数的假设检验、单因素方差分析、双因素方差分析、一元线性回归等模块.不同的理工科专业可根据本专业培养方案的要求, 从中选取相应的模块, 使教学内容对专业更具有针对性, 同时, 本书也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(理工类)/廖靖宇, 吴亚桢主编. —北京: 科学出版社, 2016. 8

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材
ISBN 978-7-03-049512-9

I. ①概… II. ①廖… ②吴… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 179314 号

责任编辑: 张中兴 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 白 洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16
2016 年 8 月第一次印刷 印张: 13 3/4
字数: 326 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

丛书序言

Preface to the series

本系列教材参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求，结合编者多年来教学实践中的经验和体会，在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成，其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括:《高等数学(理工类)(上、下册)》、《线性代数(理工类)》、《概率论与数理统计(理工类)》、《高等数学(文科类)》、《大学数学(经济管理类)(Ⅰ高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》.

我们知道，高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程，随着现代科学技术的迅猛发展，特别是计算机和信息技术的发展，近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业，而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前，关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多，这类教材主要以经典数学的理论为基础，讲述其理论、方法与例题分析，目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是，这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的，这对于非数学类专业学生学习数学课程不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外，这类教材几乎通用于所有的非数学类专业，而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此，本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术，特别是信息技术发展相适应，强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化，将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块，不同的专业可根据本专业培养方案的要求，从中选取相应的模块，使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象，根据各个学科专业的特点，针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题，以突出教学内容的应用性，使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性，能广泛适用于非数学类各专业的学生可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出，易教易学，突出重点，强调案例式教学方法.

当然，上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷，本系列教材距这样的目标还有一定的距离.

由于编者水平有限, 系列教材中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

丛书编委会
2016 年 6 月

前　言

Preface

本书参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业概率论与数理统计课程教学基本要求，结合多年来教学实践中的经验和体会，在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成，其目的是为应用型高等学校的理科类、工科类等各专业学生提供一本比较适合的教材或学习参考书.

概率论与数理统计是定量地研究随机现象统计规律的现代数学分支之一，有着非常广泛的应用背景，在工业、农业、商业、军事、科学研究、工程技术、经济管理等几乎所有领域都有重要应用．随着现代科学技术的迅猛发展，特别是计算机和信息技术的发展，近年来概率统计方法在经济、金融、保险、生物、农林、医学和管理等许多领域中得到了广泛应用和深入发展．正是这种广泛的应用性，使得概率论与数理统计课程成为高等学校大部分专业开设的一门重要的必修或选修课程．通过本课程的学习可以使学生学习掌握处理随机性观察数据的基本理论和方法，为各专业知识的深入学习或应用打下良好的基础.

关于概率论与数理统计的教材或教科书已非常多，这类教材主要以经典概率统计的理论为基础，讲述其理论、方法与例题分析，目的是帮助读者理解和掌握基本的概率统计概念和方法．但是，这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的，这对于非数学类专业学生学习该课程不能够很好地将其理论、方法应用于本专业．另外，这类教材几乎通用于所有的非数学类专业，而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容．为此，本书力求在以下六个方面做一些尝试：

(1) 以概率论为基础，以数理统计为主线，立足于概率统计的基本理论和方法；

(2) 尽量与现代科学技术，特别是信息技术发展相适应，强调应用性、实效性；

(3) 教学内容模块化，将本教材的内容划分为多个模块，不同的理工科专业可根据本专业培养方案的要求，从中选取相应的模块，使教学内容对专业更具有针对性；

(4) 改变传统教材太数学化、理科化的现象，根据全校各个理工科专业的特点，针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题，以突出教学内容的应用性，使教学内容更适应于应用型大学的需求；

(5) 有一定的可塑性，能广泛适用于普通大学理科类、工科类等专业，学生可根据其特点和需要选择教学内容和习题；

(6) 深入浅出，易教易学，突出重点，强调案例式教学方法.

当然，上述想法只是编者编写本书的希望或初衷，本书实际上还远没有达到这样的目标.

本书共分 29 个模块, 其中, 第 1~9 模块初稿由郑恩伟老师执笔, 第 10~21 模块初稿由孟晓然老师执笔, 第 22~29 模块初稿由吴亚桢老师执笔, 廖靖宇老师负责全书的统稿和定稿. 每个模块后面配有习题, 书末配有附表.

由于编者水平有限, 书中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

Contents

模块1 随机事件及其运算

1.1 随 机 现 象

自然界和社会上发生的现象是多种多样的.

(1) 向上抛一石子必然下落;

(2) 同性电荷必然互相排斥;

(3) 每天早晨太阳从东方升起;

(4) 水在标准大气压下加温到 100°C 沸腾;

(5) 抛掷一枚硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上;

(6) 一天内进入某超市的顾客数;

(7) 某种型号电视机的寿命.

在观察、分析、研究这各种现象时, 我们发现通常我们可将它们分为两类.

第一类: 确定性现象.

在一定条件下, 现象必然发生 (或必然不发生), 这类现象称为确定性现象. 例如: (1)、(2)、(3)、(4).

第二类: 随机现象.

在一定条件下, 现象可能发生, 也可能不发生, 这类现象称为随机现象 (或偶然现象). 例如: (5)、(6)、(7).

随机现象特点: ①结果不止一个; ②事先不知道哪一个会出现.

人们经过长期实践和深入研究之后, 发现随机现象在个别试验中, 偶然性起着支配作用, 呈现出不确定性, 但在相同条件下的大量重复试验中, 却呈现出某种规律性. 随机现象的这种规律性我们称为统计规律性. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

1.2 样 本 空 间

(1) **随机试验**(E)—— 对随机现象进行的试验与观察. 它具有两个特点: **随机性、重复性.**

E_1: 随机地抛掷一枚均匀的硬币, 观察其结果;

E_2: 随机地抛掷一枚均匀的骰子, 观察其结果;

E_3: 观察一天内进入某超市的顾客数;

E_4: 观察某种型号电视机的寿命.

(2) **样本点**(ω)—— 随机试验的每一个可能结果.

(3) **样本空间**(Ω)—— 随机试验的所有样本点构成的集合. 即随机现象的一切可能基本结果组成的集合称为样本空间, 记为 $\Omega=\{\omega\}$.

例 1.1 E_1: 随机地抛掷一枚均匀的硬币, 观察其结果.

$$\Omega_1=\{\text{正面朝上,反面朝上}\}.$$

例 1.2 E_2: 随机地抛掷一枚均匀的骰子, 观察其结果.

$$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

例 1.3 E_3: 观察一天内进入某超市的顾客数.

$$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}.$$

例 1.4 E_4: 观察某种型号电视机的寿命.

$$\Omega_4=\{t|t\geqslant 0\}.$$

(4) **两类样本空间**

离散样本空间: 样本点的个数为有限个或可列个.

连续样本空间: 样本点的个数为无限不可列个.

1.3 随 机 事 件

(1) **随机事件**—— 某些样本点组成的**集合**, 即样本空间 Ω 的**子集**.

基本事件——Ω 的单点集; **复杂事件**——Ω 的多点集.

无论是基本事件还是复杂事件, 它们在试验中发生与否, 都带有随机性, 所以都叫随机事件或简称为事件. 习惯上用大写字母 A, B, C 等表示事件.

在例 1.2 中,

$$\begin{aligned}&\text{令}A_1=\{1\},\text{则表示结果为1点的基本事件;}\\&\text{令}A_2=\{3\},\text{则表示结果为3点的基本事件;}\\&\text{令}A_3=\{1,3,5\},\text{则表示结果为奇数点的复杂事件.}\end{aligned}$$

注 在试验中, 如果出现 A 中所包含的某一个样本点 ω, 则称作 A 发生, 并记作 $\omega\in A$.

(2) **必然事件**($\boldsymbol{\Omega}$)—— 显然样本空间 Ω 包含了全体样本点, 因而在任一次试验中, 必然要出现 Ω 中的某一样本点 ω, 即 $\omega\in\Omega$. 也就是在试验中, Ω 必然会发生, 所以今后又用 Ω 代表一个**必然事件**.

(3) **不可能事件**($\varnothing$)—— 空集.

相应地, 空集 $\varnothing$ 可以看作是 Ω 的子集, 在任一次实验中不可能有 $\omega \in \varnothing$, 所以 $\varnothing$ 是**不可能事件**. 为了方便起见, 我们把必然事件和不可能事件看作随机事件的两个极端情形.

一个样本空间 Ω 中, 可以有很多的随机事件. 概率论的任务之一, 是研究随机事件的规律, 通过对较简单事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律. 为此, 需要研究事件之间的关系和事件之间的一些运算.

1.4 事件间的关系

(1) 包含关系: $A \subset B$, A 发生必然导致 B 发生.

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称 B 包含了 A, 并记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 如图 1.1 所示. 因为不可能事件 $\varnothing$ 不含有任何 ω, 所以对任一事件 A, 我们约定 $\varnothing \subset A$.

(2) 相等关系: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 而且 $B \subset A$. 如果有 $A \subset B$, $B \subset A$ 同时成立, 则称事件 A 与 B 相等, 记作 $A = B$, 如图 1.2 所示.

(3) 互不相容 (互斥): A 和 B 不可能同时发生. 如图 1.3 所示.

1.5 事件的运算

并: $A \cup B$ 概率解释: A 与 B 至少有一个发生, 如图 1.4 所示.

交: $A \cap B = AB$ 概率解释: A 与 B 同时发生, 如图 1.5 所示.

差: $A - B$ 概率解释: A 发生但 B 不发生, 如图 1.6 所示.

A 的对立事件: $\bar{A}$ 概率解释: A 不发生, 如图 1.7 所示.

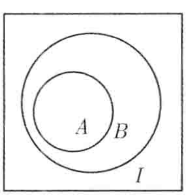

图1.1

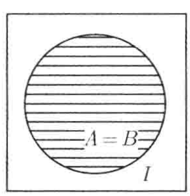

图1.2

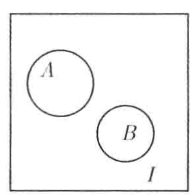

图1.3

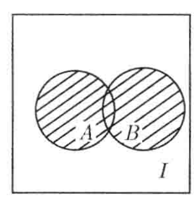

图1.4

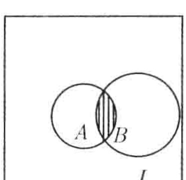

图1.5

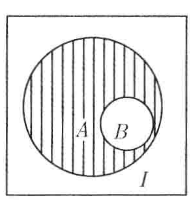

图1.6(a)

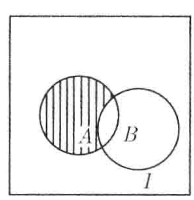

图1.6(b)

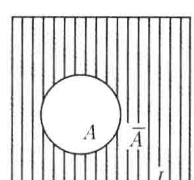

图1.7

若 A 是一个事件, 令 $\bar{A} = \Omega - A$, 称 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件或逆事件. 显然有: $A\bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = \Omega$, $\bar{\bar{A}} = A$.

注 (1) 事件互斥与对立之间的关系: 互斥不一定对立; 对立一定互斥.

(2) 若有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 则 “$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中**至少发生其一**” 这样的事件称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**并**, 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(3) 若 “$A_1, A_2, \cdots, A_n$**同时发生**”, 这样的事件称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**交**, 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

事件的运算性质:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$;

(3) 分配律: $(A \cup B)C = AC \cup BC$, $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;

(4) 对偶律 (德 · 摩根 (De Morgan) 定理): $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.

大家已经有了一定的集合论知识, 一定会发现事件间的关系及运算与布尔 (Boole) 代数中集合间的关系和运算之间是完全可以互相类比的. 下面给出这种类比的对应关系 (表 1.1).

表 1.1

概率论	集合论
样本空间	$\Omega = \{\omega\}$
事件	子集
事件 A 发生	$\omega \in A$
事件 A 不发生	$\omega \notin A$
必然事件	Ω
不可能事件	$\varnothing$
事件 A 发生导致 B 发生	$A \subset B$
事件 A 与 B 至少有一个发生	$A \cup B$
事件 A 与 B 同时发生	$A \cap B$
事件 A 发生而 B 不发生	$A - B$
事件 A 与 B 互不相容	$AB = \varnothing$

在很多场合, 用集合论的表达方式显得简练些, 也更容易理解些. 但对初学概率论的大家来说, 重要的是要学会用概率论的语言来解释集合间的关系及运算, 并能运用它们.

例 1.5　设 A, B, C 是 Ω 中的随机事件, 则

(1) 事件 “A, B, C 恰好发生一个” 可以表示成: $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$.

(2) 事件 “A, B, C 中恰好发生二个” 可以表示成: $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

(3) 事件 “A, B, C 中至少发生一个” 可以表示成: $A \cup B \cup C$ 或 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$.

(4) 事件 “A, B, C 中至少发生二个” 可以表示成: $AB \cup AC \cup BC$ 或 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$.

(5) 事件 “A, B, C 中有不多于一个事件发生” 可以表示成: $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(6) 事件 “A 与 B 发生, C 不发生” 可以表示成: $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$ 或 $AB - ABC$.

(7) 事件 “A 发生而 B 与 C 都不发生” 可以表示成: $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$.

习　题　1

1. 设 A, B, C 是三个随机事件, 用字母表示下列事件:

事件 A 发生, 事件 B,C 不都发生为____________;
事件 A,B,C 都不发生为____________;
事件 A,B,C 至少一个发生为____________;
事件 A,B,C 至多一个发生为____________.

2. 某人射击三次, 用 A_i 表示 "第 i 次射击中靶"$(i=1,2,3)$. 下列事件的含义是:
A_1 表示____________;
$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ 表示____________;
$\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3$ 表示____________;
$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3$ 表示____________.

3. (单选) 在事件 A,B,C 中, B,C 互不相容, 则下列式子中正确的是____________.

A. $\overline{A\cup BC}=A$; B. $\overline{A\cup BC}=\bar{A}$;
C. $\overline{A\cup BC}=\varnothing$; D. $\overline{A\cup BC}=\Omega$.

4. (单选) 用 A 表示 "甲产品畅销, 乙产品滞销", 则 $\bar{A}$ 表示____________.

A. "甲产品滞销, 乙产品畅销"; B. "甲、乙产品都畅销";
C. "甲产品滞销或乙产品畅销"; D. "甲、乙产品都滞销".

5. 将一枚骰子掷两次, 记录点数, 写出样本空间 Ω 及事件 $A=\{$点数之和为偶数$\}$; 事件 $B=\{$点数之和为 6$\}$; $C=\{$点数之差为 2$\}$.

6. 某袋子中装有编号为 1, 2, 3, 4 的签各一根, 不放回的从中先后取出两根签, 试写出该试验的样本空间.

模块2

概率的定义及性质

2.1 概率的统计定义

随机试验可大量重复进行, 如果随机事件 A 在 n 次反复试验中发生了 $n(A)$ 次, 称 $f_n(A) = \dfrac{n(A)}{n}$ 为 A 在 n 次试验中发生的频率.

在掷一次硬币时, 既可能出现正面, 也可能出现反面, 预先作出确定的判断是不可能的. 但是假如硬币均匀, 直观上出现正面与出现反面的机会应该相等, 即在大量试验中出现正面的频率, 应接近于 50%, 为了验证这点, 历史上曾有不少人做过这个试验, 其结果如表 2.1 所示.

表 2.1

实验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

又如, 在英语中某些字母出现的频率远远高于另外一些字母. 在进行了更深入的研究之后, 人们还发现各个字母被使用的频率相当稳定. 例如, 表 2.2 就是英文字母使用频率的一份统计表, 其他各种文字也都有着类似的规律.

表 2.2

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

字母使用频率的研究, 对于打字机键盘的设计 (在方便的地方安排使用频率较高的字母键)、印刷铅字的铸造 (使用频率高的应铸得多些)、信息的编码 (常用字母用较短的码)、密码的破译等方面都是十分有用的.

对于一个随机事件来说, 它发生可能性的大小是由它自身决定的, 并且是客观存在的. 就好比一根木棒有长度, 一块土地有面积一样, 概率是随机事件发生可能性大小的度量, 是随机事件自身的一个属性. 一个根本的问题是, 对一个给定的随机事件, 它发生可能性大小的度量 —— 概率, 究竟是多大呢? 在前面的试验中, 我们发现尽管每做一串 (n 次) 试验, 所得到的频率可能各不相同, 但是随着试验次数 n 的增大, 比值 $\dfrac{n(A)}{n}$ 会逐渐稳定到一个定值, 记

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}\to P \quad (n\to\infty).$$

由此得到的定值 P 在一定程度上反映了某一随机事件发生可能性的大小, 我们称之为概率. 因为这里的**概率是可以通过频率来"测量"的**, 所以我们又称这样得到的概率为**统计概率**.

1. 频率的性质

(1) 非负性: 即 $f_n(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: 即若 Ω 是必然事件, 则 $f_n(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性: 即若 A,B 互不相容 (即 $AB=\varnothing$), 则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

频率还具有一些别的性质, 但是这三条性质是最基本的, 其他的性质可以由它们推出. 作为练习, 自己验证下述几个性质:

(1) 不可能事件的频率为零, 即 $f_n(\varnothing)=0$;

(2) 若 $A\subseteq B$, 则 $f_n(A)\leqslant f_n(B)$, 由此还可推得对任一事件 A, 有 $f_n(A)\leqslant 1$;

(3) 对有限个两两不相容事件 (即任意两个事件互不相容), 频率具有可加性. 即若 $A_iA_j=\varnothing$ $(1\leqslant i,j\leqslant m, i\neq j)$, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

2.2 概率的公理化定义

定义 2.1 设样本空间 Ω, $\mathscr{F}$ 为 Ω 的某些子集组成的一个事件域, 如果对任一事件 $A\in\mathscr{F}$, 定义在 $\mathscr{F}$ 上的一个实值函数 $P(A)$ 满足:

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性: 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.