YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI SHUXUE FENXI
ZHENTI JIJIE(SHANG CE)

研究生入学考试数学分析真题集解（上册）

梁志清　黄军华　钟镇权 ◎ 编著

西南交通大学出版社

YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI SHUXUE FENXI
ZHENTI JIJIE(SHANG CE)

研究生入学考试数学分析真题集解（上册）

梁志清　黄军华　钟镇权 ◎ 编著

西南交通大学出版社
·成都·

内容简介

本书收集了全国100多所高校近十几年研究生入学考试数学分析真题，并对真题进行了分类编排，给予了详细解答．全书分上、中、下三册．其中，上册3章：极限，一元函数连续性，一元函数微分学；中册3章：一元函数积分学，广义积分，级数；下册4章：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，含参变量积分．

本书可作为报考数学各专业硕士研究生复习数学分析的参考书，也可供讲授数学分析课程的教师及学习数学分析课程的在校大学生作为参考书使用．

图书在版编目（CIP）数据

研究生入学考试数学分析真题集解：全3册／梁志清，黄军华，钟镇权编著．—成都：西南交通大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-5643-5142-7

Ⅰ．①研…　Ⅱ．①梁…　②黄…　③钟…　Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－教学研究　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第283951号

研究生入学考试数学分析真题集解
（上中下册）

梁志清
黄军华　编著
钟镇权

责任编辑　张宝华
封面设计　严春艳

总印张　73　**总字数**　1821千
成品尺寸　185 mm × 260 mm
版次　2016年11月第1版
印次　2016年11月第1次
印刷　成都蜀通印务有限责任公司

出版发行　西南交通大学出版社
网址　http://www.xnjdcbs.com
地址　四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码　610031
发行部电话　028-87600564　028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-5142-7　**定价**：188.00元

前　言

“数学分析”是数学专业最重要的基础课之一，也是数学各专业考研的必考科目. 历届的考研真题，除内容外，还包含诸多有价值的信息，如试题的形式、试题难度、考点及重点范围、每个知识点的出题频率、各个章节的出题比例及每年都要考的知识点等. 数学分析考研真题对数学各专业的考研复习是非常重要的.

为了使考生在考研真题中汲取更多知识，掌握更多解题方法，我们收集了全国 100 多所高校近十几年研究生入学考试数学分析真题，并对真题进行了分类编排，给予了详细解答. 旨在使考生熟悉考试的内容，抓住考试的重点与难点，掌握考试中经常出现的题型和每种题型的解法，有针对性地分类复习，达到触类旁通、举一反三之功效. 同时也使考生熟悉高校的出题思路、命题规律，充分了解考研题目的难度，从而提高应试复习的效率.

全书分上、中、下三册. 其中，上册 3 章：极限，一元函数连续性，一元函数微分学；中册 3 章：一元函数积分学，广义积分，级数；下册 4 章：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，含参变量积分.

本书具有题型丰富、解题思路新颖、解题方法典型而富有启发性等特点，可作为报考数学各专业硕士研究生复习数学分析的参考书，也可供讲授数学分析课程的教师及学习数学分析课程的在校大学生作为参考书使用.

本书在编写过程中参考了全国硕士研究生入学考试真题，在此对本书所引用试题的出题老师和有关单位表示真诚的感谢.

感谢西南交大出版社对本书出版的大力支持，感谢为该书的出版做出贡献与支持的各界人士.

由于时间仓促、学识有限，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正.

作　者

二〇一六年一月

目　录

1 极 限

1.1 数列极限

1. 用定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}=2$.(吉林大学 2010)

解题过程:

$n\geqslant 2$时,

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2-1}-2\right|=\left|\frac{3}{n^2-1}\right|\leqslant 3\left|\frac{1}{n^2-\dfrac{n^2}{2}}\right|\leqslant\frac{6}{n^2}<\frac{6}{n}.$$

对 $\forall\varepsilon>0$,解不等式 $\dfrac{6}{n}<\varepsilon$,得 $n>\dfrac{6}{\varepsilon}$.只要取 $N=\left[\dfrac{6}{\varepsilon}\right]+2$,则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2-1}-2\right|<\frac{6}{n}<\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}=2$.

2. 设 $a_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.(西北工大 2012,昆明理工 2011,北京大学 1997,矿业大学 2005,浙江工大 2011,江苏大学 2014)

解题过程:

由保不等式性可得 $a\geqslant 0$.

若 $a=0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $a_n<\varepsilon^2$,从而

$$|\sqrt{a_n}-0|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

若 $a>0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $|a_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon$.从而

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

3. 证明下列结论.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (a 为有限数或 $\pm\infty$),则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$ (a 为有限数或 $\pm\infty$).(中科大 2013,河海大学 2010,重庆大学 2009,计量学院 2009,西安理工 2005,安徽大学 2005,湖北大学 2002,地质大学 2002,浙江师大 2005,福州大学 2005,上海师大 2004,燕山大学 2011,扬州大学 2011/2007.特别 $a=0$:西安电子科技 2008,西北工大 2004,东南大学,华南师大 2005,南航 2007,河北工大 2002,华侨大学 2008,暨南

大学 2007,中山大学 2008,郑州大学 2007)

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+\sqrt{n}} = a$.(云南大学 2010)

(3) 证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1$.(北京师大 2007,河北大学 2009,青岛大学 2011,华北水电 2005)

(4) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k x_n = a$,其中 $\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}$.(中南大学 2005)

(5) 若 $\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = a, \lim_{n\to\infty} x_{2n} = b$,则 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{a+b}{2}$.(中科大 2012)

(6) 已知数列 $\{a_n\}$ 非负且单调递减, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$,证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = b$.(武汉大学 2011)

(7) 设 $\{a_n\}$ 为正实数列, $s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $r_n = \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}$,且 $\lim_{n\to\infty} s_n$, $\lim_{n\to\infty} r_n$ 均存在. 证明: $\lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} r_n \geqslant 1$.(厦门大学 2012)

解题过程:

(1) 情形 1: a 为有限数.

因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$,当 $n > N_1$ 时,有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| &= \left|\frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + \cdots + (x_n - a)}{n}\right| \\ &\leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|}{n} + \frac{|x_{N_1+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} \\ &< \frac{A}{n} + \frac{n - N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

其中 $A = |x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_{N_1} - a|$ 为非负数.

因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} = 0$,故对上述的 $\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$,当 $n > N_2$ 时,有 $\frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

于是 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$.

情形 2: $a = +\infty$.

因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$,则 $\forall G > 0, \exists N_1 > 0$,当 $n > N_1$ 时,有 $x_n > 2G$,且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1} > 0$.于是

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n} > \frac{x_{N_1+1} + \cdots + x_n}{n} > \frac{2G(n - N_1)}{n} = 2G - \frac{2N_1}{n}G .$$

取 $N = 2N_1$,当 $n > N$ 时, $\frac{2N_1}{n}G < G$.于是

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>2G-G=G.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

情形 3: $a=-\infty$.

证法与情形 2 类似(或令 $a_{n}=-x_n$ 转化为情形 2).

注 1:这种“拆分方法”是证明某些极限问题的一个常用方法.

注 2:本题也可用 Stolz 公式证明.

(2) 由(1)得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\cdot\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\right)=a$.

(3) 由(1)得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(4) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$,当 $n>N_1$ 时,有 $|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.所以

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k x_n-a\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}C_n^k(x_n-a)-\frac{a}{2^n}\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{2^n}C_n^k|x_n-a|+\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{1}{2^n}C_n^k|x_n-a|+\frac{|a|}{2^n}\\&\leqslant N_1A\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{N_1}C_n^k+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1+1}^{n}C_n^k+\frac{|a|}{2^n}\\&=N_1A\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{N_1}C_n^k\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=N_1+1}^{n}C_n^k\right)+\frac{|a|}{2^n}\\&\leqslant N_1A\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{N_1}C_n^k\right)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|a|}{2^n}.\end{aligned}$$

其中 $A=|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|$ 为非负数.

由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{N_1}C_n^k\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C_n^1}{2^n}+\frac{C_n^2}{2^n}+\cdots+\frac{C_n^{N_1}}{2^n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{2^n}+\cdots+\frac{1}{N_1!}\frac{n(n-1)\ldots(n-N_1)}{2^n}\right]=0\end{aligned}$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|}{2^n}=0$,故对上述的 ε, $\exists N_2>0$,当 $n>N_2$ 时,有 $\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{N_1}C_n^k<\dfrac{\varepsilon}{4N_1A}$, $\dfrac{|a|}{2^n}<\dfrac{\varepsilon}{4}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k x_n-a\right|<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k x_n=a$.

(5) 记 $a_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n})}{2n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1})}{n} + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n})}{n} = \frac{1}{2}(a+b) .$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n-1}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-2})}{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} \frac{(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1})}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n-1} \frac{(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n-2})}{n-1} = \frac{1}{2}(a+b) .$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{a+b}{2}$.

(6) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$,当 $n > N_1$ 时,有 $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.于是

$$\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - b \right| = \left| \frac{a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \right|$$

$$\leqslant \frac{a_1 |b_n - b| + a_2 |b_{n-1} - b| + \cdots + a_{n-N_1} |b_{N_1+1} - b|}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$+ \frac{a_{n-N_1+1} |b_{N_1} - b| + \cdots + a_n |b_1 - b|}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$< \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-N_1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{a_{n-N_1+1} + \cdots + a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{N_1 a_{n-N_1+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-N_1+1}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{N_1 a_{n-N_1+1}}{(n - N_1 + 1) a_{n-N_1+1}} = \frac{\varepsilon}{2} + A \frac{N_1}{n - N_1 + 1} ,$$

其中 $A = \max\{|b_1 - b|, |b_2 - b|, \cdots, |b_{N_1} - b|\}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{AN_1}{n - N_1 + 1} = 0$,故对上述的 $\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$,当 $n > N_2$ 时,有 $\dfrac{AN_1}{n - N_1 + 1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,有

$$\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - b \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = b$.

(7) 由于 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \dfrac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}$,所以

$$s_n r_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \geqslant 1 .$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} r_n \geqslant 1$.

4. 证明下列结论或求极限.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} = ab$.(安徽大学 2005,中科院 2004,电子科技 2002,河北工大 2001,山西大学 2005)

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1y_{2n} + x_3y_{2n-2} + \cdots + x_{2n-1}y_2}{n}$.(安徽师大 2013)

解题过程:

(1) 令 $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} |\beta_n| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,所以 $\{\alpha_n\}$ 有界,即 $\exists M > 0$, $\forall n \in N^+$,有 $|\alpha_n| \leqslant M$.于是

$$0 < \frac{|\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1|}{n} \leqslant M \frac{|\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \cdots + |\beta_1|}{n}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1|}{n} = 0$.于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + (a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1}) + \cdots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(ab + a\frac{\beta_n + \beta_{n-1} + \cdots + \beta_1}{n} + b\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} \right) = ab.
\end{aligned}$$

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ 知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n} = b$.由(1)得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_{2n} + x_3y_{2n-2} + \cdots + x_{2n-1}y_2}{n} = ab.$$

注:本题的变换具有一般性,常用这种变换将一般情况归结为特殊情况.例如本例,原来是"已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n} = ab$",经变换后,归结为"已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n} = 0$".

5. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛,且 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (几何平均值收敛公式).(重庆大学 2012,北京工大 2003,上海交大 2006,华南理工 2001($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$))

解题过程:

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则由极限的不等式性质得 $a \geqslant 0$.

(1) 若 $a > 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) = \ln a$.于是

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = \mathrm{e}^{\ln a} = a.$$

(2) 若 $a=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$.因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=-\infty$.于是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=0.$$

注:当 $a=0$ 时,也可直接用定义证明.

6. 证明:若 $x_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$,并求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[n]{n!}}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^{\alpha}}(\alpha>0)$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

(华南理工 2014,广西师大 2003/2007,天津工大 2005,南开大学 2009,扬州大学 2010,青岛理工 2009,四川大学 2007,河北大学 2010,地质大学 2002,武汉大学 2011,宁波大学 2006; $\alpha=1$:重庆大学 2013,青岛理工 2012,安徽师大 2007/2013)

解题过程:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{x_1}\cdot\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

(1) 方法 1:设 $x_n=\frac{n^n}{n!}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\mathrm{e}$.

方法 2:因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=-1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}}=\mathrm{e}^{-1},$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}=\mathrm{e}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{\ln n}{n}=\mathrm{e}\cdot 0=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^{\alpha}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1},\alpha=1,\\ 0,\alpha>1,\\ \infty,\alpha<1.\end{cases}$

(4) 方法 1: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{n}=\mathrm{e}\cdot 0=0$.

方法 2:令 $a_n=\frac{1}{n}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

7. 设 $a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$),证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.(华南师大 2008,首都师大 2005,地质大学 2005,桂林电子科技 2011/2008)

解题过程:

方法 1:因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.当 n 充分大时,有 $a_n\leqslant q^n$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

方法 2:因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$,由保号性,对 $q<r<1$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<r$.于是当 $n>N$ 时,有

$$0<a_{n+1}<ra_n<r^2a_{n-1}<\cdots<r^{n-N}a_{N+1}.$$

由两边夹定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

8. 证明下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(上海大学 2003,地质大学 2004,东华大学 2002,扬州大学 2005,北京交大 2002,东北师大 2003,河北工大 2010,上海理工 2005,江苏大学 2007,哈师大 2003/2008,南京理工 2005/2012,青岛大学 2012)

解题过程:

(1) 方法 1:当 $a>1$ 时,令 $\sqrt[n]{a}=1+h_n(h_n>0)$,则 $a=(1+h_n)^n\geqslant 1+nh_n=1+n(a^{\frac{1}{n}}-1)$.于是

$$0<a^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\frac{a-1}{n}<\frac{a}{n}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $a<1$ 时,记 $b=\frac{1}{a}$,则 $b>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=1$.

方法 2:记 $x_1=a,x_n=1,n=2,3,\cdots$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=1.$$

方法 3: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\sqrt[n]{a}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a}{n}}=\mathrm{e}^0=1$.

(2) 方法 1: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$.

方法 2:由于 $1\leqslant\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot 1\cdots 1}\leqslant\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+(n-2)}{n}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+(n-2)}{n}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

方法 3:令 $\sqrt[n]{n}=1+h_n(h_n>0)$,则 $n=(1+h_n)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$,即 $0<h_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

方法 4:转证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$.由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^0=1$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

9. 设 $a>0$, $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$,并求下列极限.(哈师大 2003)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4+\dfrac{1}{2n}}$.(广西师大 2010)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+b}$.($b=2$:南京航空 2011;$b=1$:山东大学,计量学院 2009)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}$.(青岛大学 2014)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+k^n}$.($k=2$:山西师大 2008;$k=3$:哈师大 2008)

解题过程:

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,则当 n 充分大时,有 $\dfrac{1}{2}a<a_n<\dfrac{3}{2}a$.于是 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}a}<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{\dfrac{3}{2}a}$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{2n}\right)=4$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4+\dfrac{1}{2n}}=1$.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)=1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+b}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{b}{n}}=1$.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{n}}=1$.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^k}{k^n}+1\right)=1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k+k^n}=k\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^k}{k^n}+1}=k$.

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$, $a_k>0, k=1,2,\cdots,m$.(重庆大学 2014,东北师大 2004/2005,浙江师大 2004,苏州科技 2010,电子科技 2001,大连海事 2002,山东师大 2010,重庆师大 2005,浙江工大 2012)

特例:① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$,其中 $a,b>0$.(南京大学 2009/2003($b=1$),华东师大 2006,暨南大学 2010,苏州大学 2005,扬州大学 2005,南京理工 2001;$b=1$:南京师大 2000,四川师大 2013,陕西师大 2005,北京大学 1999/1998;$b=2006, a=2005$:兰州大学 2006)

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$,其中 $a,b,c>0$.(中科院 2000/2003,辽宁大学 2004/2005,扬州大学 2005,湘潭大学 2009,哈师大 2006($a=1,b=2,c=3$),山东大学 2002($a=3,b=5,c=7$))

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n+4^n+5^n}$.(湘潭大学 2011)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 n+2\cos^2 n}$.(华东师大 2005)

解题过程:

(1) 记 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,则 $A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}A$.由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$ 及两边夹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A.$$

由此得:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=M=\max\{a,b\}$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n+4^n+5^n}=5$.

(2) 由于 $1<\sqrt[n]{\sin^2 n+2\cos^2 n}=\sqrt[n]{1+\cos^2 n}<\sqrt[n]{2}$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^2 n+2\cos^2 n}=1$.

11. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.(华中师大 2003,南航 2006,南京师大 2006,四川大学 2008,武汉大学 2007)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}}$.(华中师大 05,广西师大 2009,河北工大 2007)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$.(苏州大学 2012,华中师大 04,辽宁大学 2007,青岛理工 2010,安徽大学 2006,华中科技 2008)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin1+\sin\dfrac{1}{2}+\cdots+\sin\dfrac{1}{n}}$.(华东理工 2007,中科院 2004)

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{2006}}}$.(吉林大学 2006)

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$.(华中科技 2014)

解题过程:

(1) 方法 1:因 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\sqrt[n]{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\cdot\sqrt[n]{n}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{-1}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

方法 2:因 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln[(n!)^{\frac{1}{n^2}}]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{2n+1}=0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

方法 3:因 $1\leqslant(n!)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant(n^n)^{\frac{1}{n^2}}\leqslant n^{\frac{1}{n}}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

(2) 方法 1:令 $a_n=\dfrac{2n-1}{2n}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

方法 2:由 $\dfrac{1}{2n}\leqslant\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<1$ 得

$$\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}}<1.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}=1$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}}=1$.

(3) 由于 $1\leqslant\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{1+1+\cdots+1}=\sqrt[n]{n}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}=1$.

(4) 由于 $\sqrt[n]{\sin 1}\leqslant\sqrt[n]{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{\sin 1}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin 1}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}=1.$$

(5) 由于 $1\leqslant\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^{2006}}+\frac{1}{3^{2006}}+\cdots+\frac{1}{n^{2006}}}\leqslant\sqrt[n]{n}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2006}}}=1$.

(6) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1}\leqslant\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\leqslant\sqrt[n]{n},\text{且}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}=1.$$

12. 证明下列命题.

(1) 设 $\{a_n\}$ 为有界正数列, $a=\sup\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=a$.(华东师大 2007,西南交大 2008)

(2) 设 $\{a_n\}$ 是单调递减的非负数列,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^n)^{\frac{1}{n}}=a_1$.(中科大 2006,山东师大 2005)

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 非负单调增加,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n)^{\frac{1}{n}}=a$.(厦门大学 2013,南开大学 2003,武汉大学 2012)

解题过程:

(1) 由确界定义,对 $\forall n$, $a_n\leqslant a$;对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists a_{N_1}$ 使得 $a_{N_1}>a-\varepsilon$.于是当 $n\geqslant N_1$ 时,

$$a-\varepsilon<a_{N_1}\leqslant\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}a_k^n}\leqslant n^{\frac{1}{n}}a.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}a=a$,对于上述 $\varepsilon>0$, $\exists N_2>0$,当 $n\geqslant N_2$ 时,有

$$n^{\frac{1}{n}}a<a+\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n\geqslant N$ 时,有

$$a-\varepsilon<\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}a_k^n}<a+\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=a$.

(2) 因 $0\leqslant a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_2\leqslant a_1$,故 $a_1\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant n^{\frac{1}{n}}a_1$.由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}a_1=a_1$ 及两边夹定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^n)^{\frac{1}{n}}=a_1$.

(3) 由 $a_n\leqslant a$ 得 $a_n\leqslant[a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n]^{\frac{1}{n}}\leqslant n^{\frac{1}{n}}a$.又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}[a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n]^{\frac{1}{n}}=a$.

13. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.(湘潭大学 2010,华中师大 2001,兰州大学 2005,河南师大 2010,华南师大 2000,重庆师大 2007)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2+2n-1}\right)$.(上海师大 2003)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.(昆明理工 2014,沈阳工大 2014,河海大学 2010/2002,兰州大学 2008,辽宁大学 2003,南京大学 2004,湖北大学 2004,上海师大 2006,上海理工 2005,中南大学 2007,天津大学 2005,温州大学 2009/2013,河南师大 2008,广西师大 2012,河南大学 2001,曲阜师大 2011,山西师大 2010,陕西师大 2008,苏州大学 2008,新疆大学 2009,重庆师大 2004,人民大学 2005)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)$.(湖北大学 2001)

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.(湘潭大学 2008/2013,青岛理工 2010)

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.(天津大学 2001,深圳大学 2005,广西大学 2005)

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.(浙江大学 2010,厦门大学 2011)

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+\frac{1}{n}}\right)$.(青岛大学 2009)

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3+2n+k}$.(湖南大学 2007)

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{7}n}{2n^2+1}+\dfrac{\sqrt{7}n}{2n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{7}n}{2n^2+n}\right)$.(电子科大 2014,陕西师大 2012)

解题过程:

(1) 由于

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) 由于

$$\frac{1}{n^2+2n-1}\cdot\frac{1+(2n-1)}{2}n\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2+2n-1}\leqslant\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{1+(2n-1)}{2}n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2n-1}\cdot\frac{1+2n-1}{2}n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\cdot\frac{1+2n-1}{2}n\right)=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2+2n-1}\right)=1.$$

(3) 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(4) 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2-n}},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=1.$$

(5) 由于

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\frac{1}{n+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{n}{n+1},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\frac{1}{n+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1.$$

(6) 方法 1:由于

$$0\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\leqslant\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}}_{n\text{个}}=\frac{1}{n},\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]=0.$$

方法 2:由级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛及柯西收敛准则得证.

(7) 由于

$$\frac{2n+2}{n+1}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant\frac{2n+2}{n},\text{且}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+1}=2,$$