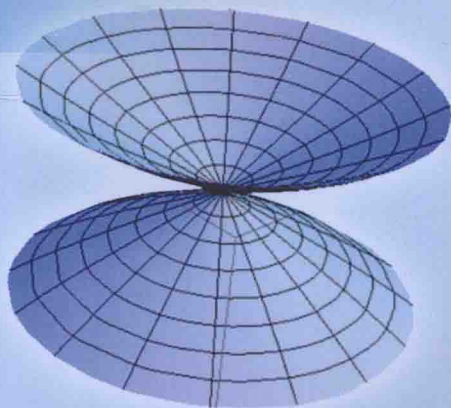


数学实验 与数学建模

◎ 朱晓峰 编著



 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学实验与数学建模

编著 朱晓峰

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

数学实验与数学建模/朱晓峰编著. —北京: 北京理工大学出版社,
2016. 7

ISBN 978 - 7 - 5682 - 2478 - 9

I. ①数… II. ①朱… III. ①高等数学 - 实验 - 高等学校 - 教材
②数学模型 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13 - 33②O141. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 141679 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 虎彩印艺股份有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 14

责任编辑 / 孟雯雯

字 数 / 260 千字

文案编辑 / 多海鹏

版 次 / 2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷

责任校对 / 周瑞红

定 价 / 49.00 元

责任印制 / 马振武

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

前 言

大学数学课程是高等院校的一门重要的基础课，是培养学生基本素质的重要课程之一，它在极为广泛的领域有着重要的应用，对提高学生的综合素质和解决实际问题有着积极作用。

大学数学课程能够培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力，以及综合运用所学知识来分析问题和解决问题的能力，它为高校学生学习后继课程、进行科学研究和进一步获得近、现代科学知识奠定了必备的数学基础。

数学实验就是运用计算机技术和软件包进行数学模型的求解，它是数学建模教学过程中必不可少的一个实践性教学环节。

本书通过大量精选的实例讲解 Mathematica 5.0 的符号运算、绘图、数值计算、程序设计等基本功能，介绍了它在工程数学和数学建模等课程中的应用。本书集数学实验和数学建模为一体，在对工程数学知识点进行梳理的基础上，介绍了运用数学软件 Mathematica 5.0 对相关数学问题进行求解的方法和步骤。

书中列举诸多实例，既帮助学生理解数学概念、巩固数学知识，又结合数学软件教给学生数学实验的基本方法，这有利于提高学生解决实际问题的能力。

本书可作为高等院校本科学生学习工程数学、数学实验和数学建模等课程的教材，也可作为应用数学教学的参考书。

由于编者水平有限，书中难免有错误与不妥之处，欢迎读者批评指正。

本书是北京印刷学院的特色教材，是北京印刷学院优秀教学团队（建设项目）的一项成果，得到了北京高等学校教育教学改革项目（2013—lh08）的资助。

编 者

目 录

第一篇 基础实验

实验一 Mathematica 入门	3
实验目的	3
实验内容	3
1. Mathematica 概述	3
2. Mathematica 的基本操作	4
3. Mathematica 语言入门	8
实验二 函数的图形 极限	26
实验目的	26
实验内容	26
实验原理	26
1. 函数的概念及特性	26
2. 平面曲线的参数方程	26
3. 平面曲线的极坐标方程转化为参数方程	27
4. 空间曲线的参数方程	27
5. 空间曲面参数方程	27
6. 极限	27
实验步骤	28
1. 二维平面曲线的绘制	28
2. 三维空间作图	42
3. 动画	52
4. 极限	53
实验三 微分法及其应用	59
实验目的	59
实验内容	59

实验原理	59
1. 一元函数和多元函数的微分法	59
2. 几何意义	59
3. 函数的性态	60
4. 求函数的极值	60
5. 中值定理	61
实验步骤	61
1. 一元函数微分法及其应用	62
2. 多元函数微分法及其应用	80
实验四 积分学	93
实验目的	93
实验内容	93
实验原理	93
1. 原函数存在定理	93
2. 定积分的定义	93
3. 变上限函数求导	94
4. 微积分基本定理	94
5. 二重积分	94
6. 空间立体的投影区域绘制	94
7. 三重积分	94
8. 曲线积分	95
9. 曲面积分	96
10. 格林公式、奥—高公式	96
实验步骤	97
1. 一元函数积分法	97
2. 多元函数积分法	102
实验五 级数 微分方程 积分变换	114
实验目的	114
实验内容	114
实验原理	114
1. 函数的幂级数展开	114
2. 函数的傅里叶级数展开	114

3. 收敛级数的和	115
4. 常微分方程	115
5. 积分变换	115
实验步骤	116
1. 幂级数	116
2. 微分方程	122
3. 积分变换	124
实验六 线性代数	128
实验目的	128
实验原理	128
1. 矩阵的基本运算	128
2. 向量组的线性表示及线性相关性	128
3. 特征值与特征向量	128
4. 线性方程组的解	129
5. 施密特正交法	129
6. 二次型及标准形	129
实验内容与步骤	130
1. 矩阵	130
2. 线性方程组	137
3. 矩阵的特征值与特征向量	139
第二篇 数学建模初步	
实验七 曲线的最佳拟合	147
实验目的	147
实验内容	147
1. 问题	147
2. 曲线拟合	147
3. 曲线拟合的评判标准	148
实验八 盈亏转折分析和投入产出分析	154
实验目的	154
实验内容	154
1. 实验的基本理论与方法	154

2. 实验内容与步骤	156
实验九 昆虫模型	160
实验目的	160
实验内容	160
1. 问题	160
2. 数学模型	160
3. 问题的分析与求解	161
实验十 数学命题的探究	166
实验目的	166
实验内容	166
1. 问题的引入	166
2. 设计实验	166
3. 实验分析	167
4. 命题论证	169
5. 命题拓展	169
附录一 美国大学生数学建模竞赛 (MCM/ICM) 优秀论文选编	174
附录二 全国大学生数学建模竞赛规则和指导说明	209
附录三 MATLAB 简介	210

第一篇 基础实验

基础实验部分主要讲解了数学软件 Mathematica 5.0 的符号运算、绘图、数值计算、程序设计等基本功能，介绍了它在高等数学、线性代数等工程数学中的应用。在对工程数学知识点进行梳理的基础上，介绍了运用数学软件 Mathematica 5.0 对相关数学问题进行求解的方法、步骤及命令。书中列举诸多实例，既帮助学生理解数学概念、巩固数学知识，又结合数学软件教给学生数学实验的基本方法，这为学生今后开展数学建模奠定了必要的实验基础，也有利于提高学生解决实际问题的能力。

实验一 Mathematica 入门

实验目的

1. 掌握 Mathematica 的基本操作。
2. 掌握 Mathematica 的基本命令。
3. 掌握 Mathematica 的基本编程语句。

实验内容

1. Mathematica 的基本操作。
2. Mathematica 的基本命令。
3. Mathematica 的编程入门。

1. Mathematica 概述

Mathematica 5.0 的基本系统是用 C 语言编写的，因此能够很方便地移植到各种计算机系统中。

Mathematica 拥有强大的数学计算功能，早期主要在数学、物理等理论研究领域中流传，近几年在工程技术领域中也得到了广泛应用。Mathematica 是一种数学分析 (Math Analysis) 型软件，以符号计算见长。其最大的优势在于用户可以得到解析符号解，只要用户愿意，还可以得到任意精度的数值解。Mathematica 主要有以下特点：

(1) 内容丰富，功能齐全。Mathematica 能够进行初等数学、高等数学、工程数学等的各种数值计算和符号运算。特别是其符号运算功能，给数学公式的推导带来了极大的方便。它有很强的绘图能力，能简便地画出各种美观的曲线、曲面，甚至可以进行动画设计。

(2) 语法简练，编程效率高。Mathematica 的语法规则简单，语句简练。和其他高级语言（如 C 语言、Fortran 语言）相比，其语法规则和表示方式更接近数学运算的思维和表达方式。通过 Mathematica 编程，用较少的语句就可完成复杂的运算和公式推导等任务。

(3) 操作简单, 使用方便。Mathematica 命令易学易记, 运行也非常方便。用户既可以和 Mathematica 进行交互式的“对话”, 逐个执行命令, 也可以进行“批处理”, 将多个命令组成的程序一次性地交给 Mathematica, 完成指定任务。

(4) 和其他语言交互。Mathematica 和其他高级语言, 如 C 语言和 Fortran 语言等能进行简单的交互, 可以调用 C 语言和 Fortran 语言等的输出, 并转化为 Mathematica 的表示形式, 也可以将 Mathematica 的输出转化为 C 语言、Fortran 语言和 Tex 编译器(注: Tex 是著名的数学文章编辑软件, 用它打印出的文章字体漂亮、格式美观)所需的形式, 甚至还可以在 C 语言中只嵌入 Mathematica 的语句。这使 Mathematica 编程更灵活方便, 增强了 Mathematica 的功能。

2. Mathematica 的基本操作

Mathematica 的功能非常多, 不仅可以进行基本的计算, 还可以进行图形、声音处理以及文件处理。本章就来介绍一下 Mathematica 的工作环境及其丰富的功能。这里所介绍的是 Windows 环境下的 Mathematica 5.0 版本。

为了能更好地使用 Mathematica 数学软件, 先来了解一下 Mathematica 的工作环境和一些基本操作。

2.1 启动 Mathematica

在 Windows 环境下安装好 Mathematica, 用鼠标双击 Mathematica 图标, 即可运行 Mathematica。它首先显示版本信息(如果你是新用户, 它将要求你登录账号和输入密码), 然后进入工作环境, 出现如图 1.1 所示的窗口。

从图 1.1 中可以看到, Mathematica 的窗口与其他应用软件略有不同, 它主要包括一个执行各种功能的工作条和各种工作区窗口, 这两部分是分开的。下面的工作区窗口也称为工作区, 可以随时关闭, 只留下工作条; 有时需要打开多个工作区窗口, 而这多个窗口是彼此分开的, 可以进行独立操作, 这种分开式的窗口结构使用起来很方便。Mathematica 将第一个工作区称为 Newnb-1, 其他工作区依次称为 Newnb-2、Newnb-3、..., 也可以对每个工作区使用不同的名字保存。以后对 Mathematica 的操作都是在工作区中进行的。

2.2 在 Mathematica 中进行运算

Mathematica 的基本用法并不复杂, 只要在工作区中输入想要运算的表达

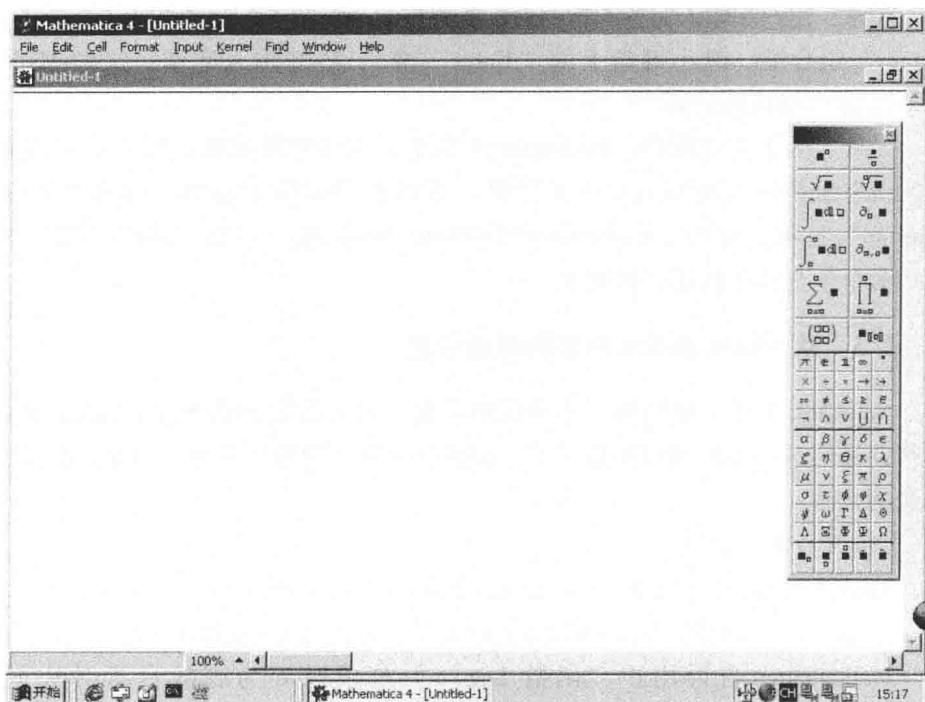


图 1.1

式和指令，按“Shift”+“Enter”组合键（或按小键盘上的“Enter”键）即可进行运算。例如，如果欲计算“2+3”，则在工作区中输入

$$2+3$$

然后按下“Shift”+“Enter”组合键，执行该计算，几秒钟后会出现

$$\text{In}[1]:=2+3$$

$$\text{Out}[1]=5$$

Mathematica 将输入的指令用标题“ $\text{In}[n]:=$ ”标识，输出结果用标题“ $\text{Out}[n]=$ ”标识（这是 Mathematica 自动标识的，不需要用户自己输入），其中数字“ n ”表示第 n 次输入的指令或第 n 次输出的结果。Mathematica 具有逐条运算功能。例如，若还想计算“ $6-4$ ”，则再输入

$$6-4$$

然后按下“Shift”+“Enter”组合键，即可计算出结果

$$\text{In}[2]:=6-4$$

$$\text{Out}[2]=2$$

你会发现这次输出的结果比第一次快。这是因为 Mathematica 在做第一次运算时要进行一些初始化工作，而以后则不用再做这些工作。

注意：用户在输入完各类指令后，要想得到运算结果，必须按下“Shift”+“Enter”组合键（或小键盘上的“Enter”键），告知输入完毕，这样 Mathematica 才可以进行运算。

另外，为了方便用户，Mathematica 建立了文件管理系统。用户可以将需要的所有运算或程序写入一个工作区，然后在 Mathematica 的主菜单中单击“Kernel”选项，再选“Evaluation—Evaluate Notebook”一栏，则整个工作区中的命令就全部依次运算出来了。

2.3 从 Mathematica 中获得帮助信息

Notebook 接口一般提供了多种图形装置，可允许用户从 Mathematica 中获得帮助和信息。用户可以使用“?”来得到帮助。例如，下面是得到函数 Log 信息的方法：

```
In[3]:= ? Log
```

```
Log[z] gives the natural logarithm of z (logarithm to
base e). Log[b,z] gives the logarithm to base b.
```

Mathematica 告诉用户“函数 Log[z] 是求以 e 为底的自然对数值，Log[b, z] 是求以 b 为底的对数值”。

注意：用户使用问号“?”来获得信息时，必须把“?”放于需要查询内容的第一个字符的前面。只有这样，Mathematica 才能分清楚用户是在寻求帮助信息，而不是在进行一般的运算输入。

用户还可以使用双问号“??”来得到更多的帮助信息。例如，通过以下输入可以获得函数 Log 更多的信息：

```
In[4]:= ?? Log
```

```
Log[z] gives the natural logarithm of z (logarithm to
base e). Log[b,z] gives the logarithm to base b.
```

```
Attributes[Log] = {Listable, NumericFunction, Protec-
ted}
```

除了得到帮助信息外，使用“?”还可以得到一些目标信息。例如，下面是查询所有以“O”开头的函数名称的方法。

```
In[5]:= ? O*
```

O	Order
OddQ	OrderedQ
Off	Orderless
Offset	Oscillatory

OLEData	Out
On	Outer
OneIdentity	OutputAutoOverwrite
OneStepRowReduction	OutputForm
Open	OutputFormData
OpenAppend	OutputGrouping
OpenFunctionInspectorPacket	OutputMathEditExpression
OpenRead	OutputNamePacket
OpenSpecialOptions	OutputStream
OpenTemporary	OutputToOutputForm
OpenWrite	OutputToStandardForm
Operate	Over
Optional	Overflow
OptionInspectorSettings	Overhang
OptionQ	Overlaps
Options	Overscript
OptionsPacket	OverscriptBox
OptionValueBox	OverscriptBoxOptions
OptionValueBoxOptions	OwnValues
Or	

其中 “*” 是可以代替任何字符的通配符。

用户可以使用 “?” 来查询 Mathematica 中使用的特殊输入形式的信息。这里是查询 “:=” 符号的特殊例子：

```
In[6]:=?:=
```

```
lhs:=rhs assigns rhs to be the delayed value of lhs. rhs  
is maintained in an unevaluated form. When lhs appears,  
it is replaced by rhs, evaluated afresh each time.
```

另外，Mathematica 有提示信息的功能。当用户的输入有错误时，Mathematica 将会给出详细的提示信息来指出用户的错误。例如，平方根函数只能有一个参数，而当用户给了两个参数时，Mathematica 将提醒用户只需要一个参数。

```
In[7]:=Sqrt[a,b]
```

```
Sqrt::argx:Sqrt called with 2 arguments;1 argument is  
expected.
```

```
Out[7] = Sqrt[a,b]
```

Mathematica 的函数名称及命令有的很长，除标准函数以外使用的都是函数的英文全称，可以通过名称知道函数的作用，但输入时不太方便。在 Mathematica 中提供了较方便的输入方法，只需要输入函数的前几个字母，然后按“Ctrl”+“K”组合键，Mathematica 就会给出以这些字母开头的函数名称列表的对话框，从中可以选择所需要的函数名称。如果以这些字母开头的函数是唯一的，那么 Mathematica 自动在输入处给出函数的全称，这对用户来说是十分方便和快捷的。例如，欲输入三维作图函数 ParametricPlot3D[]，可是只记得它前四个和后两个字母，这时可键入“Para”，再按“Ctrl”+“K”组合键。Mathematica 立刻弹出一个命令菜单，该菜单包含以“Para”开头的函数所有 Mathematica 命令，然后将光标指向末尾是“3D”的命令，单击鼠标左键即可得到所要键入的命令。

2.4 Mathematica 文件的保存

对于输入的指令和运算结果，如果需要保留待以后使用，可以将其保存到文件中。可以单击工作条中的“File”，然后选“Save”选项（或按“Ctrl”+“S”组合键），再依次选择存放的目录，给文件起名，如“aaa”，最后用鼠标确认“OK”（或按“Enter”键）后，系统就将工作区中的内容保存到文件“aaa.nb”内。“.nb”是系统默认的后缀。

如果下次想继续进行各项操作，只要单击工作条中的“File”，然后选“Open”选项（或按“Ctrl”+“O”组合键），再在相应的目录中找到所需要的文件，如“aaa.nb”，双击鼠标左键即可。这与 Windows 操作系统类似。

2.5 退出 Mathematica

当结束 Mathematica 的工作时，可以选择“File”菜单中的“Exit”选项或单击“关闭”按钮。如果工作区的内容没有存盘，Mathematica 会询问你是否保存对打开工作区内容的修改。选择“Save”选项保存文件；选择“Don't Save”选项放弃保存；选择“Cancel”选项取消这次退出操作并返回 Mathematica。这些与很多操作系统类似。

3. Mathematica 语言入门

3.1 算术运算

Mathematica 计算功能非常强，进行算术四则运算是它的基本功能，可以

作为多功能计算工具。Mathematica 的基本运算符号如表 1.1 所示。

表 1.1

符号	+	-	*(或空格)	/	^
运算	加法	减法	乘法	除法	乘幂

Mathematica 的数值计算可得到两种结果：精确值和近似值。当输入的式子中所有数字都不含小数点时，则输出的结果是精确值（不管含有多少位，也可能是不可约分式）。要想得到近似值可以使用两种方法：一是使用小数点；二是使用 Mathematica 的近似函数，如表 1.2 所示。

表 1.2

Mathematica 命令	功 能
expr//N	求 expr 的近似值（精确为 6 位）
N[expr]	求 expr 的近似值（精确为 6 位）
N[expr, n]	求 expr 的 n 位精度的近似值
注：expr 是算术表达式。	

下面给出一些运算的例子，读者从中可比较不同类型的输入和输出。

例 1.1 计算 $\frac{1}{7} \left[1 - \left(2 - \frac{3}{4} \right)^2 \right]$ ，并求不同精度的近似值。

解 In[1]:=(1-(2-3/4)^2)/7

$$\text{Out}[1] = -\frac{9}{112}$$

In[2]:=(1.0-(2-3/4)^2)/7

$$\text{Out}[2] = -0.0803571$$

In[3]:=N[(1-(2-3/4)^2)/7]

$$\text{Out}[3] = -0.0803571$$

In[4]:=(1-(2-3/4)^2)/7//N

$$\text{Out}[4] = -0.0803571$$

In[5]:=N[(1-(2-3/4)^2)/7,20]

$$\text{Out}[5] = -0.080357142857142857143$$

注意：表达式里的括号只允许是圆括号，不论多少层；另外，由于“空格”表示乘法运算，因此两个表达式之间不要随意添加空格。如果两个量相乘，千万不要忘记在二者之间加“*”或“空格”，否则 Mathematica 会将这两个量当成一个整体。