一百囚徒与一个灯泡

One Hundred Prisoners and a Light Bulb

〔荷〕汉斯 · 范 · 狄马斯〔荷〕巴塔德 · 寇易 / 著
〔印度〕易兰车兹彦 / 插图
马明辉 / 译

科学出版社

一百囚徒与一个灯泡

One Hundred Prisoners and a Light Bulb

〔荷〕汉斯·范·狄马斯〔荷〕巴塔德·寇易／著
〔印度〕易兰车兹彦／插图
马明辉／译

科学出版社
北京

图字：01-2016-8750

Translation from English language edition:
One Hundred Prisoners and a Light Bulb
By Hans van Ditmarsch and Barteld Kooi

图书在版编目（CIP）数据

一百囚徒与一个灯泡 / （荷）汉斯·范·狄马斯(Hans van Ditmarsch)，(荷)巴塔德·寇易(Barteld Kooi)著；马明辉译．—北京：科学出版社，2017. 3

书名原文：One Hundred Prisoners and a Light Bulb

ISBN 978-7-03-050939-0

I. ①一… II. ①汉… ②巴…③马…III. ①逻辑思维-思维训练 IV. ①B804.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 283393 号

责任编辑：郭勇斌　樊　飞 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟 / 封面设计：黄华斌

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www. sciencep. com
北京教园印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2017 年 3 月第一次印刷　印张：13 1/4
字数：268 000
定价：69.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

国家社会科学基金重大项目“信息互动的逻辑、计算与认知研究”
（批准号14ZDB016）资助出版

序 言

这本书呈现了 11 个不同的关于已知和未知的谜题。每个谜题单独成章，进行了深入阐释，每一章还有一些附加谜题，书后可以找到这些谜题的答案。这些谜题的一个永恒话题是，谜题中所涉及的人宣告他们知道和不知道的东西，然后似乎自相矛盾。这样的知识谜题在动态认知逻辑领域的发展过程中起到了重要的作用。本书单独有一章介绍动态认知逻辑。

本书的插图是易兰车兹彦（Elancheziyan）绘制的。易兰车兹彦是生活在清奈（Chennai）的一位讲泰米尔语的印度画家。汉斯·范·狄马斯（Hans van Ditmarsch）在印度清奈数理科学研究院兼职，经东道主拉马努詹（Ramanujam）联络，在苏巴舍利·德斯堪（Shunashree Desikan）进行泰米尔语-英语翻译的友好帮助下，汉斯与易兰车兹彦取得了联系。每一章的插图的来历本身就是一个故事，我们非常感谢易兰车兹彦的必不可少的合作。

我们要对保罗·勒夫雷（Paul Levrie）和维什列夫·桑达拉简（Vaishnavi Sun-dararajan）表示感谢，他们为本书最后一版书稿的校对做出了实质性的、非常令人钦佩的努力。彼特·范·埃姆德·博阿斯（Peter van Emde Boas）毫不厌倦地提供关于连续自然数之谜的历史细节，对于我们写作本书有很大的鼓励。我们还要感谢施普林格出版社的阿伦·曼恩（Allen Mann），他鼓励并促使我们开展这本书的写作计划。汉斯讲课时，南锡高等矿业学院的尼克拉斯·梅耶尔（Nicolas Meyer）发现了灯泡协议中一处令人尴尬的错误，此时离我们交书稿只有几个星期的时间。他是许多我们希望感

谢的人中的一位。如果回顾在学院、大学和暑期学校教授逻辑与谜题的 25 年，我们要感谢更多的学生和同事：通过一个例子，我们希望在此感谢所有的人。毫无疑问，本书难免还存在一些错误，这些错误全都是作者的责任。

法国南锡　　荷兰格罗宁根

汉斯·范·狄马斯　　巴塔德·寇易

2014 年 12 月 25 日

目　录

1 连续的自然数

安妮和比尔听到：“给定两个自然数。它们是连续的数。我会窃窃私语，把一个数告诉安妮，把另一个数告诉比尔。”这件事发生了。安妮和比尔现在有如下对话：

安妮：“我不知道你的数。”

比尔：“我不知道你的数。”

安妮：“我知道你的数。”

比尔：“我知道你的数。”

开始他们都不知道这两个数，然后就知道了。这如何可能？两个数中可以确定其中哪一个数？

自然数是 0、1、2、3，等等。如果两个数相差 1，它们就是连续的。在这个谜题的表述中，重要的事情是安妮和比尔同时明白这个情景，他们也知道两个人都明白这个情景，如此等等。所以，他们被亲耳告知一个自然数，而不是收到写下的字条等其他方式。所以，自然数通过窃窃私语进入他们的耳朵——窃窃私语创造了共同知识，即他们收到了信息。我们可以想象这个谜题设定的情景，安妮、比尔和坐在桌子旁边的说话者，这位说话者必须侧向安妮从而对她窃窃私语，然后必须侧向比尔并且对他窃窃私语。

1.1 哪些数是可能的？

我们通过逐步分析情节的发展来解决这个谜题。最初的信息如下：

• 给定两个自然数。

此时我们还不知道这两个数是什么，但是显然有两个相关的变量：安妮将要听到的数 x 和比尔将要听到的数 y。接下来的问题是确定 (x, y) 这个数对。我们还知道 x 和 y 都是自然数：0、1、2，等等。所以，数对可能是 $(0, 0)$、$(0, 1)$、$(1000, 243)$，等等。当然，还有无穷多个这样的数对。由所有这样的数对组成的状态空间如下：

⋮	⋮	24	34	44
03	13	23	33	43
02	12	22	32	42
01	11	21	31	…
00	10	20	30	…

为简化表述，我们把 (x, y) 写成 xy。为方便起见，我们以网格式为数对排序。数对 $(1, 2)$ 不同于数对 $(2, 1)$：每个数对中第一个数是安妮将要听到的数，第二个数是比尔将要听到的数。在 $(1, 2)$ 中，安妮将听到 1，而在 $(2, 1)$ 中，安妮将听到 2。

接下来的信息是：

• 它们是连续的自然数。

这意味着可能的数对 (x, y) 只能是满足 $x=y+1$ 或者 $y=x+1$ 的数对。因此，只剩下这样的数对：

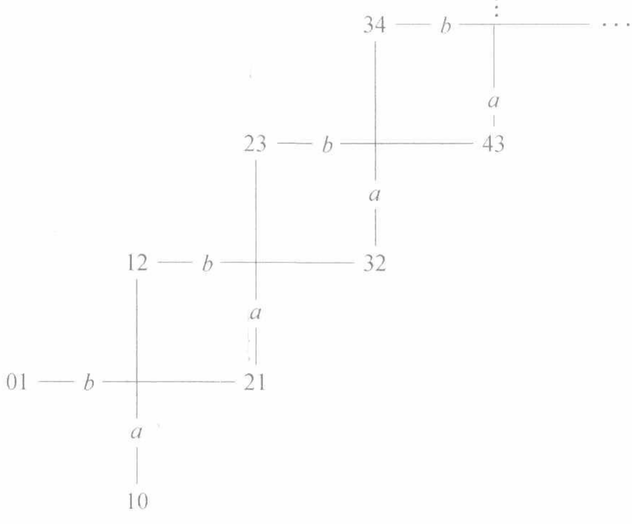
					34	
			23			43
	12				32	
01				21		
		10				

1.2　安妮和比尔知道什么

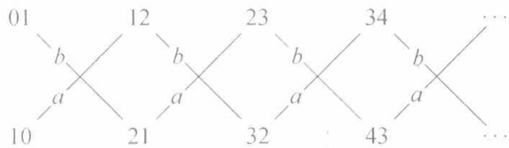
到目前为止，读者的视角与安妮和比尔的视角是相同的：这些数都是自然数，而且它们是连续的。这些数对是我们要考虑的所有可能的数对。我们不能区分这些数对。接下来的信息促使安妮和比尔的视角与读者的视角产生差异：

- “我会窃窃私语，把一个数告诉安妮，另一个数告诉比尔”。这件事发生了。

假设窃窃私语告知的数是把 5 告诉安妮，把 4 告诉比尔。当安妮听到 5 以后，她知道比尔的数是 4 或 6。除了(5, 4)和(5, 6)以外，她可以排除所有其他数对。比尔对这个情形的看法与安妮不同，他听到了 4。从他的观点看，剩下的数对是(5, 4)和(3, 4)。作为读者，你不能排除任何数对！但是你仍然了解到一些事情，也就是安妮和比尔关于任何数对和关于彼此所知道的东西。我们可以让信息变化在给定的连续数对的集合中显示出来：我们可以显示，在窃窃私语发生之后，安妮或比尔不能区分哪些数对。一种显示手段是用带标记 a（安妮）的线或者带标记 b（比尔）的线把这些数对连起来。于是我们得到：



我们也可以放倒这个图，从而节省空间：



事实上，我们只不过得到了两个无穷长的带交互标记的数对链条，其中一个链条如下：

$$10 \overset{a}{\text{——}} 12 \overset{b}{\text{——}} 32 \overset{a}{\text{——}} 34 \overset{b}{\text{——}} \cdots$$

现在安妮和比尔的视角相互不同，而且不同于读者的视角。在窃窃私语的行动之前，对于安妮、比尔和读者来说，所有数对都是可能的。在窃窃私语之后，对读者来说所有数对仍然都是可能的，这些数对可能是 3 和 4，或者 5 和 4，或者 89 和 88，等等；但是对于安妮和比尔来说，情况不再是这样：如果安妮的数是 3，她就知道另一个数不可能是 88，而只可能是 2 或者 4。读者所知道的事情是，安妮和比尔现在知道了这一点。

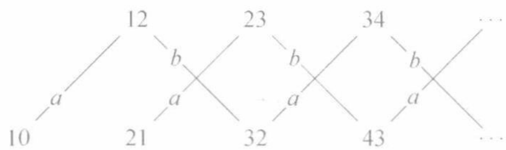
1.3 提供信息的宣告

我们把上面这样的图称为描述谜题的初始状态的模型。在描述问题时，随着新的信息不断出现，模型逐步被改变。有两种改变方式：排除数对（比如不是连续自然数的数对）；说明哪些数对可以被安妮和比尔区分[比如安妮可以区分 (2, 3) 和 (5, 6)，但是不能区分 (2, 3) 和 (2, 1)]。在我们解决问题的过程中，下一步是把安妮和比尔做出的每个宣告转化为某种模型变换运算。在这个谜题中，所有进一步的改变都是第一种：排除数对。这里关键是我们不区别对待安妮的宣告和起初告知安妮和比尔的匿名说话者的“宣告”。安妮和比尔都听到了他们自己的宣告，而且彼此都知道他们都听到了他们所说的东西等等。读者也“听到了”这些宣告：读者必须把自己想象为沉默的旁观者，在最初说话者与安妮、比尔的互动场合出现，而且在后来的宣告中出现。让我们考

虑第一个宣告：

• 安妮："我不知道你的数。"

什么时候安妮会知道比尔的数？假设安妮听到了 0。她知道比尔的数是比她自己的数多 1 或者少 1 的数。这个数不可能是-1，因为-1 不是自然数。因此，唯一剩下的可能性是比尔的数是 1。所以，安妮知道比尔的数是 1。然而，她说"我不知道你的数"，因此我们可以排除数对(0, 1)。不仅是我们，比尔也会排除这个数对。这种变化（对比尔和安妮来说）是公开的，因为安妮是大声说出来的。倘若她写在一张纸上，她就可能不确定这个消息是否传递给了比尔，或者比尔不确定安妮是否知道这个消息已经传递给他，如此等等。这个消息就不会是公开的。假设这种变化是公开的，结果就是下面这个模型：

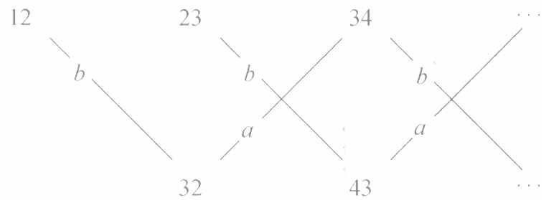


现在关键要看到这是一个不同的模型，因此它可能满足不同的命题。此前假的命题现在可以是真的，此前真的命题现在可以是假的。这样就可以解释，现在"我不知道你的数"而后来"我知道你的数"表面上是矛盾的，但实际上不矛盾。这些观察都是关于系统中不同信息状态的观察。宣告帮助我们解决关于数对是什么的不确定性。同样，宣告也会帮助安妮和比尔解决他们的不确定性。我们继续分析，考虑下一个宣告：

• 比尔："我不知道你的数。"

什么时候比尔会知道安妮的数？有两种可能性。首先，如果数对是(2, 1)，比尔就会知道安妮的数。如果比尔的数是 1，那么他就会想象安妮有 0 和 2。在安妮（第一次）宣告之后，0 已经不可能，只剩下 2。所以比尔知道安妮的数是 2。但是，还有另一个数对(1, 0)，此时比尔也会知道安妮的数。正如在(0, 1)的情况中安妮那样，比尔会知道安妮的数是 1，因为-1 是不允许的。因为比尔说"我不知道你的数"，所以这两个数对都不可能是实际

的数对。所得到的情形如下：



这使我们进入第三个宣告：

- 安妮：“我知道你的数。”

在这个模型中，我们可以看到，安妮的宣告对于数对(2, 3)和(1, 2)来说是真的，因为此时安妮没有选择余地。我们也可以把这一点看做一个有效论证的结论。例如，对于数对(2, 3)：

> 如果安妮的数是 2，那么她现在知道比尔的数是 3，因为倘若比尔的数是 1，那么比尔就会在第二个宣告中说他知道安妮的数。但是他没有那样说。

由于安妮的宣告，所有其他的数都变成不可能的。因此，所得到的模型是：

12　　　　　23

这个模型描绘的是，如果两个数是 1 和 2，那么安妮和比尔知道这一点，他们彼此知道他们知道这一点，等等。这是他们之间的共同知识。如果两个数是 2 和 3，那么他们也有关于这些数的共同知识。尽管(1, 2)和(2, 3)都在模型中，但是这不意味着，如果这些数是 1 和 2，那么安妮和比尔也会认为它们可能是 2 和 3：在模型中没有 a 或 b 的连线。但读者不能确定两个数对中哪个数对是实际情况。现在转入最后一个宣告：

- 比尔：“我知道你的数。”

这个命题对于剩下的数对来说已经是真的。因此，没有产生改变。也可以说：最后这个宣告不提供任何信息。安妮已经知道比尔知道了她的数，而且二人都知道这一点。

谜题就这样被解决了。四个宣告都是真实的宣告。在这个谜题中，“我不知道你的数”和“我知道你的数”之间的矛盾不是矛盾，因为这些宣告是在不同时刻做出的。此前真的东西之后可能是假的。经过四个宣告后，剩下数对(1, 2)和(2, 3)。你不能在这两个数对之间做出选择。但是 2 这个数在两个数对中都出现了，因此它肯定是两个数之一。

1.4 其他版本

谜题 1.1

假设实际的数既不是 1 和 2，也不是 2 和 3，而是 4 和 5。四个宣告就不能都被真实地做出。错误在哪里？要重复几次“我不知道你的数”安妮和比尔才能知道另一个数？谁会知道另一个数？

谜题 1.2

这个谜题的另一种表述如下：

安妮和比尔的额头上都有一个自然数，它们是连续的数。现在安妮和比尔有如下对话：

- 安妮：“我不知道我的数。”
- 比尔：“我不知道我的数。”
- 安妮：“我知道我的数。”
- 比尔：“我知道我的数。”

这样表述的谜题的解答有何不同？

谜题 1.3

假设两个数不是连续的，它们相差 2。所以，谜题是这样的：

安妮和比尔听说：“给定两个自然数。这两个数相差 2。我会窃

窃私语，把一个数告诉安妮，把另一个数告诉比尔。”这件事发生了。现在安妮和比尔有如下对话：

- 安妮：“我不知道你的数。”
- 比尔：“我不知道你的数。”
- 安妮：“我知道你的数。”
- 比尔：“我知道你的数。”

在这种情况下，模型是怎样的？这个模型如何通过宣告进行变换？如果两个数相差 m，其中 m 是自然数，那么情况会怎样？

谜题 1.4

假设另一个人凯瑟琳也加入游戏。现在的谜题是：

安妮、比尔和凯瑟琳每个人的额头上都有一个自然数。它们是连续的数。例如，假设这些数（分别）是 3、4、5。为了发现自己的数，安妮、比尔和凯瑟琳之间要进行什么样的对话（关于每个人的数的知识和无知的对话）才是可能的？

谜题 1.5

安妮和比尔的额头上各有一个自然数。已知这两个数的和等于 3 或 5。现在安妮和比尔可以连续宣告他们是否知道自己的数。证明他们可以有如下对话：

- 安妮：“我不知道我的数。”
- 比尔：“我不知道我的数。”
- 安妮：“我知道我的数。”
- 比尔：“我知道我的数。”

（参见文献[20]，参考“1.5 历史”。）